

非綫性微分系統周期解 之存在性与唯一性

李 炳 熙

(数学力学系)

Schauder-Тихонов 不动点定理曾被用以研究微分方程解的存在性(例如[1], [2])。Caccioppoli-Banach 不动点定理也曾被用来討論微分方程解的唯一性問題。本文試圖运用这些不动点定理来研究非綫性、非駐定常微分系統周期解的存在性与唯一性,并进一步研究非綫性微分差分系統周期解之存在性。在各种情形,都把多維系統的研究化为一維常微分方程的問題。

现把引用的定理陈述如下:

根据 S. Mazur ([3]) 的定理,可得 Schauder-Тихонов 不动点定理的下列形式。

定理甲 (参考[2])

設 X 是完备、局部凸綫性拓扑空間,映象 $F: X \rightarrow X$ 是完全連續的, $H \subset X$ 是凸、閉、有界集, $F(H) \subset H$, 則 F 在 H 至少有一不动点。

定理乙 (Caccioppoli-Banach)

設 X 是距离空間 (距离为 d), $H \subset X$ 是完备子空間,又設映象 $F: H \rightarrow H$ 是連續的,存在常数 K , $0 < K < 1$, 使对 H 的任两点 x, y , 都有

$$d(Fx, Fy) \leq Kd(x, y)$$

成立。則 F 在 H 有唯一的不动点。

I

考虑非綫性常微分系統

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

其中 $x \in E^n$, $f(t, x)$ 是 E^{n+1} 到 E^n 的連續映象, 且以 $\omega (> 0)$ 为周期, 即

$$f(t + \omega, x) \equiv f(t, x).$$

設 $f(t, x)$ 滿足解的存在、唯一性条件, 且(1)的解存在于 $(-\infty, +\infty)$ 。現來研究系統(1)存在以 ω 为周期的周期解的条件。以下, C 代表定义在 $[0, \omega]$ 取值于 E^n 的連續向量函数全体, 我們按照通常的方式引入基本运算:

$$\begin{aligned} x + y &= x(t) + y(t), \quad t \in [0, \omega], \\ \alpha x &= \alpha x(t), \quad t \in [0, \omega], \end{aligned}$$

$x, y \in C$. 对于 $u = (u^1, u^2, \dots, u^n) \in E^n$, 取

$$\|u\| = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + \dots + (u^n)^2},$$

对于 $x \in C$, 取范数为

$$\|x\| = \sup_{[0, \omega]} |x(t)|,$$

于是 C 成为 Banach 空間, 又因 C 的每个球都是凸的, 所以 C 也是完备、局部凸綫性拓扑空間。特別, 在 C 可引入距离 $d(x, y) = \|x - y\|$ 。

与(1)相应, 我們考虑作用在 C 上的运算符

$$(2) \quad Fx(t) = x(\omega) + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

于是有下列引理。

引理

(1) 存在以 ω 为周期的周期解的充分必要条件是运算符(2)存在不动点。

証明

首先注意, 由于 $f(t, x)$ 以 ω 为周期而且(1)的解存在唯一, 故解 $x(t)$ 是(1)的以 ω 为周期之周期解的充分必要条件是:

$$x(0) = x(\omega).$$

必要性。設 $x(t)$ 是(1)的周期解 (周期为 ω), 所以 $x(0) = x(\omega)$, 从而

$$Fx(t) = x(0) + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau = x(t),$$

即 F 存在不动点。至于充分性, 由 $Fx(t) = x(t)$ 推出 $x(0) = x(\omega)$, 而且 $x(t)$ 是(1)的解, 故 $x(t)$ 是(1)的以 ω 为周期的周期解。証毕。

由于运算子(2)是作用在完备、局部凸綫性拓扑空間 C 之上, 因此研究 F 的不动点問題, 可引用定理甲。为此, 对 $f(t, x)$ 作进一步的假設:

$$(3) \quad |f(t, x)| \leq \Phi(t, |x|), \quad t \in [0, \omega],$$

$x \in E^n$, $\Phi(t, \rho)$ 在 E^2 連續, 当 $t \in [0, \omega]$, $\rho \geq 0$, $\Phi(t, \rho)$ 对固定的 t 是 ρ 的非降函数。

再选取凸、闭、有界集

$$H = \{x | x \in C, |x(t)| \leq \rho(t)\},$$

这里, $\rho(t)$ 是 $[0, \omega]$ 上的正值連續函数。于是, 有下列定理

定 理 1

若微分方程

$$(4) \quad \frac{d\rho}{dt} = \Phi(t, \rho)$$

对某 $\rho_0 > 0$, 在区間 $[0, \omega]$ 上存在解 $\rho(t)$ 满足 $\rho(t) = \rho_0$, 則系統(1)存在周期为 ω 之周期解。

証 明

首先注意, 运算子(2)是完全連續的。事实上, 由 $f(t, x)$ 的連續性推得 F 的連續性; 另方面, 任取 C 的有界序列 $\{x_n\}$ ($n=1, 2, \dots$), 可証 $\{Fx_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) 是一致有界, 同等連續的, 从而由 Ascoli 引理知, 存在收斂子列 $\{Fx_{n_i}\}$ ($i=1, 2, \dots$), 故 F 是紧致的。因此 F 是連續的及紧致的, 即完全連續的。

可以証明 F 在 H 存在不动点。为此, 只要証明 (按定理甲) $F(H) \subset H$, 即只要証明

$$|x(t)| \leq \rho(t) \longrightarrow |Fx(t)| \leq \rho(t), \quad t \in [0, \omega].$$

注意到当 $|x(t)| \leq \rho(t)$, $t \in [0, \omega]$, 有

$$\begin{aligned} |Fx(t)| &\leq |x(\omega)| + \int_0^t |f(\tau, x(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq |x(\omega)| + \int_0^t \Phi(\tau, |x(\tau)|) d\tau \leq \\ &\leq |x(\omega)| + \int_0^t \Phi(\tau, \rho(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, \omega], \end{aligned}$$

由假設,

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \Phi(t, \rho), \\ \rho(t) = \rho_0. \end{cases}$$

故

$$|x(\omega)| + \int_0^t \Phi(\tau, \rho(\tau)) d\tau \leq \rho_0 + \int_0^t \Phi(\tau, \rho(\tau)) d\tau = \rho(t), \quad t \in [0, \omega],$$

从而

$$|Fx(t)| \leq \rho(t), \quad t \in [0, \omega],$$

即有

$$F(H) \subset H,$$

所以, 由定理甲和引理推知, 系統(1)存在以 ω 为周期的周期解。

若此不动点不是常数解, 則是对 t 的 ω 周期解。

II

现来考虑以 ω 为周期的周期解的唯一性问题。仍考虑系統(1), 我們有下列定理:

定理 2

設定理 1 的条件滿足, 而且

$$\sup_{[0, \omega]} |f(t, x) - f(t, y)| \leq \sigma \|x - y\|, \quad x, y \in H, \quad 0 < \sigma\omega < 1,$$

則系統(1)存在唯一的以 ω 为周期的周期解。

証 明

由定理 1 的証明知

$$F(H) \subset H,$$

由本定理的条件得出

$$\|Fx - Fy\| \leq \sigma\omega \|x - y\|,$$

于是, 由定理乙及引理即得本定理。

III

现轉向微分差分方程的討論上去。

考虑非綫性微分差分方程

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t-\omega)),$$

这里, $x(t) \in E^n$, $t \in [0, +\infty)$, $f[t, x(t), x(t-\omega)] \in E^n$, 滿足解存在唯一性条件, 解存在区間为 $(0, +\infty)$ 。对于以 ω 为周期的 $x(t)$ 而言, 有

$$f[t+\omega, x(t), x(t-\omega)] \equiv f[t, x(t), x(t-\omega)]$$

而且对于連續的 $x(t)$ 而言, f 是連續的, 对于分段連續的 $x(t)$ 而言, f 是分段連續的。

为簡明起見, 引入記号 $\hat{x} = x(t), t \in (-\infty, +\infty)$, 及

$$\psi(t, \hat{x}) \equiv f[t, x(t), x(t-\omega)],$$

考虑定义在 $[0, \omega)$ 上取值于 E^n 的連續函数全体, 按通常方式把此集合构成一 Banach 空間, 記为 C , 以 $\hat{x}_\omega = \hat{x}_\omega(t)$ 代表 $x \in C$ 以 $(0, \omega)$ 为基本区間的周期延拓, 显然以 ω 为周期的 $\hat{x}_\omega$ 或是連續或是分段連續的。

設 $\psi(t, \hat{x})$ 滿足下列条件:

$$(6) \quad |\psi(t, \hat{x}_\omega)| \leq M(t, |\hat{x}_\omega|), \quad t \in [0, \omega),$$

这里, M 是其变元的連續函数, 且对固定的 $t \in [0, \omega)$ 而言, 是非降函数, 考虑作用在 C 上的完全連續算子

$$(7) \quad Tx(t) = x(\omega) + \int_0^t \psi(\tau, \hat{x}_\omega) d\tau.$$

可以証明下列引理:

引 理 (4)

系統 (5) 有以 ω 为周期的周期解的充分必要条件是: 算子 T 存在不动点。

利用此引理及定理甲我們得到

定 理 3

設 (5) 的右端滿足条件 (6), 对某 $\rho_0 > 0$, 微分方程

$$\frac{d\rho}{dt} = M(t, \rho),$$

在 $[0, \omega)$ 存在解 $\rho(t)$ 滿足 $\rho(t) = \rho_0$, 則 (5) 存在周期为 ω 的周期解。

此外, 我們还可以按照第二节的类似手法討論系統 (5) 的 ω 周期解的唯一性問題。由于方法雷同, 从略。

作者对胡金昌教授的热情鼓励和指导, 表示衷心的謝意。

参 考 文 献

- (1) Tychonoff, A., 1935, Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111, 767—776.
- (2) Stokes, A., 1960, The application of a fixed point theorem to a variety of non-linear stability problems, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, vol. V, 173—184.
- (3) Mazur, S., 1930, Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält, Studia Math., I, II, 7—9.
- (4) Красносельский, М. А., 1963, Альтернативный принцип существования периодических решений для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, ДАН СССР, Т. 152, No. 4, 801—804.

On the Existence and Uniqueness of Periodic Solutions of Nonlinear Differential Systems

Li Ping-xi

Abstract

We use fixed point theorems, one of which due to Tychonoff, another due to Caccioppoli and Banach, to reduce the study of the existence and uniqueness of periodic solutions of a certain class of nonlinear non-autonomous differential equations to that of the initial-value problem of the related first-order equation. An analogous method is used to attack a similar problem of nonlinear difference-differential systems.