

关于拟保角映射的若干性质

許 毅 然

(数学力学系)

§1. 引言及定义

本文的工作, 主要的是利用复变函数的几何理论来研究拟保角映射的拟保角性和函数列的收敛性。为此, 首先对拟保角映射的 Schwarz 引理作一些有益的附注。为了方便计, 我们采取如下关于拟保角映射的定义。

(定义1) 把 $z=x+iy$ 平面上的区域 D 映为 $w=u+iv$ 平面上的区域 Ω 的拓扑映射 $w=f(z)$ 。若它满足下列条件者称为 D 上的 Q -拟保角映射 (常数 $Q \geq 1$)。

1° $u(x,y), v(x,y)$ 在 D 上有连续的一级偏导数。

2° $J(z) = u_x v_y - u_y v_x > 0 \quad z \in D$

$$3^\circ P(z) = \frac{\max_{\theta} |D_{\theta}(w)|}{\min_{\theta} |D_{\theta}(w)|} \leq Q$$

其中 $D_{\theta}(w) = (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) + i(v_x \cos \theta + v_y \sin \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

(定义2) $w=f(z)$ 在 z_0 点 Q -拟解析意指:

存在一个 z_0 的邻域, 使 $w=f(z)$ 在此邻域中是一个 Q -拟保角映射。

在此顺便提二个常用的 Q -拟保角映射的性质。

(1) $w=f(\xi)$ 是区域 D_{ξ} 的 Q -拟保角映射, $\xi=\varphi(z)$ 是区域 D_z 的单叶正则映射且其象落在 D_{ξ} 内, 则 $w=f(\varphi(z))$ 是区域 D_z 的一个 Q -拟保角映射。

(2) Q -拟保角映射的逆映射仍是 Q -拟保角的。

§2. Schwarz 引理

1953年 П. П. Белинский 在 [一] 中得到如下形式的 Schwarz 引理:

引理 1 設 $w=f(z)$ 是把 $|z|<1$ 映为 $|w|<1$ 的 Q -拟保角映射且 $f(0)=0$, 則

$$|f(z)| \leq M_{-1} \left[\frac{1}{Q} M(|z|) \right] \quad 0 < |z| < 1 \quad (1)$$

其中

$$M(\rho) = \frac{1}{4} \frac{K(\rho')}{K(\rho)}.$$

$$K(\rho) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\rho^2 x^2)}} \quad , \quad \rho' = \sqrt{1-\rho^2}.$$

〔附注一〕 注意到它的証明, 可以証明把引理 1 的条件改为 $w=f(z)$ 是把 $|z|<1$ 映为 $|w|<1$ 的拓扑映射, $0=f(0)$ 且 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中除去一条光滑若当曲线的点外点点 Q -拟解析, 則(1)式仍成立。

1957年 A. Mori 在〔二〕中利用不等式 $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} < M(\rho) < \frac{1}{2\pi} \ln \frac{4}{\rho}$ ($0 < \rho < 1$) 来估計(1)式得到

$$|f(z)| \leq M_{-1} \left[\frac{1}{Q} M(|z|) \right] \leq 4 |z|^{\frac{1}{Q}} \quad 0 < |z| < 1 \quad (1')$$

嗣后1960年王传芳在〔三〕藉参数表示法得到比 A. Mori 的结果更进一步的改进, 即

引理2*設 $w=f(z)$ 是把 $|z|<1$ 映为 $|w|<1$ 的 Q -拟保角映射且 $0=f(0)$, 則

$$|f(z)| \leq 4^{1-\frac{1}{Q}} |z|^{\frac{1}{Q}}, \quad 0 < |z| < 1. \quad (2)$$

〔附注二〕 若把上面的 Schwarz 引理中的条件“把 $|z|<1$ 映为 $|w|<1$ ”改为“把 $|z|<1$ 映为 $|w|<1$ 內的区域 Δ ”, 引理的結論仍成立。

“証”: 在此就引理 2 的情况来証明

Δ 是一个边界点多于一点的单連通区域。据 Riemann 定理存在一个单叶正则映射 $w=\varphi(w)$ 把 Δ 映为 $|w|<1$ 且 $0=\varphi(o)$, 不难驗證 $w=F(z)=\varphi[f(z)]$ 是滿足引理 2 条件。于是有

$$|w| = |F(z)| \leq 4^{1-\frac{1}{Q}} |z|^{\frac{1}{Q}}.$$

$w=\varphi_{-1}(w)$ 是把 $|W|<1$ 映为 Δ 的单叶正则映射且 $0=\varphi_{-1}(o)$ 据解析函数論的 Schwarz 引理得 $|w| \leq |\varphi_{-1}(W)| \leq |W|$

* 原著的条件比这里叙述的条件弱一点

$$\therefore |w| \leq 4^{1 - \frac{1}{Q}} |z|^{\frac{1}{Q}}$$

$$\text{即 } |f(z)| \leq 4^{1 - \frac{1}{Q}} |z|^{\frac{1}{Q}} \quad \text{証毕。}$$

关于在引理 1 的情况除用此法外，还可直接在原证明的过程中给予适当的处理亦可得证。

〔附注三〕 我們可以由 (1) 式直接推出 (2) 式而且有不等式

$$M_{-1}\left[\frac{1}{Q} M(\rho)\right] \leq 4^{1 - \frac{1}{Q}} \rho^{\frac{1}{Q}} \quad 0 < \rho < 1 \quad (3)$$

〔証〕 首先証明 $\frac{M(\rho)}{\ln \frac{4}{\rho}}$ 是 (0, 1) 上递减函数

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{M(\rho)}{\ln \frac{4}{\rho}} \right] &= \frac{1}{4 \left(\ln \frac{4}{\rho} \right)^2} \left\{ \frac{K(\rho')}{\rho K(\rho)} + \ln \frac{4}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left[\frac{K(\rho')}{K(\rho)} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4 \left(\ln \frac{4}{\rho} \right)^2} \left\{ \frac{K(\rho')}{\rho K(\rho)} - \frac{\pi}{2} \frac{\ln \frac{4}{\rho}}{K^2(\rho) \rho (1 - \rho^2)} \right\} \end{aligned}$$

据周知的不等式 (見〔三〕)

$$\ln \rho + \frac{2(1 - \rho^2)}{\pi} K(\rho) K(\rho') < \ln 4, \quad 0 < \rho < 1$$

得証
$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{M(\rho)}{\ln \frac{4}{\rho}} \right] < 0 \quad 0 < \rho < 1 .$$

故 $\frac{M(\rho)}{\ln \frac{4}{\rho}}$ 是 ρ 的递减函数。

对 $Q > 1$ 取 $\rho_1 < 4^{1 - \frac{1}{Q}}$, 命 $\rho_0 = 4^{1 - \frac{1}{Q}} \rho_1^{\frac{1}{Q}}$

则 $0 < \rho_1 < \rho_0 < 1$. $Q = \ln \frac{4}{\rho_1} / \ln \frac{4}{\rho_0}$

因有
$$\frac{M(\rho_1)}{\ln \frac{4}{\rho_1}} > \frac{M(\rho_0)}{\ln \frac{4}{\rho_0}}$$

或 $M(\rho_1) > QM(\rho_0)$

$$\text{即 } M_{-1}\left[\frac{1}{Q} M(\rho_1)\right] < \rho_0 = 4^{1-\frac{1}{Q}} \rho_1^{\frac{1}{Q}} \quad \rho_1 < 4^{1-Q}$$

当 $1 > \rho_1 \geq 4^{1-Q}$ 时 $4^{1-\frac{1}{Q}} \rho_1^{\frac{1}{Q}} \geq 1$ 显然有

$$M_{-1}\left[\frac{1}{Q} M(\rho_1)\right] < 1 = 4^{1-\frac{1}{Q}} \rho_1^{\frac{1}{Q}} \quad \text{証毕.}$$

在附注三中我們利用 $\frac{M(\rho)}{\ln \frac{4}{\rho}}$ 的递减性来推出不等式 $M_{-1}\left[\frac{1}{Q} M(\rho)\right] \leq 4^{1-\frac{1}{Q}}$

$\rho^{\frac{1}{Q}}$, 下面我們將利用不等式 $M_{-1}\left[\frac{1}{Q} M(\rho)\right] \geq \rho^{\frac{1}{Q}}$ 来証明 $\frac{M(\rho)}{\ln \frac{1}{\rho}}$ 的递增性, 并

由这两个函数的递减性和递增性推出函数 $M(\rho)$ 的一个估計公式

$$\left| M(\rho_1) - M(\rho_0) \right| \leq M(\rho_0) \left[\frac{1}{\ln \frac{1}{\rho_0}} - \frac{1}{\ln \frac{4}{\rho_0}} \right] \left| \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} \right| \quad (4)$$

事实上, 令 $\rho = \rho_1 < 1$, $\rho_0 = \rho_1^{\frac{1}{Q}}$, $Q = \ln \rho_1 / \ln \rho_0$.

代入不等式 $\rho^{\frac{1}{Q}} \leq M_{-1}\left[\frac{1}{Q} M(\rho)\right]$ 便得

$$\frac{M(\rho_1)}{\ln \frac{1}{\rho_1}} \leq \frac{M(\rho_0)}{\ln \frac{1}{\rho_0}} \quad 0 < \rho_1 < \rho_0 < 1$$

此示 $\frac{M(\rho)}{\ln \frac{1}{\rho}}$ 是递增函数。

由 $\frac{M(\rho)}{\ln \frac{4}{\rho}}$, $\frac{M(\rho)}{\ln \frac{1}{\rho}}$ 的递减性和递增性对 $0 < \rho_1 < \rho_0 < 1$

有 $\frac{M(\rho_0)}{\ln \frac{4}{\rho_0}} \ln \frac{4}{\rho_1} \leq M(\rho_1) \leq \frac{M(\rho_0)}{\ln \frac{1}{\rho_0}} \ln \frac{1}{\rho_1}$

兩邊同減去 $M(\rho_0)$ 得

$$\frac{M(\rho_0)}{\ln \frac{4}{\rho_0}} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} \leq M(\rho_1) - M(\rho_0) \leq \frac{M(\rho_0)}{\ln \frac{1}{\rho_0}} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

若 $0 < \rho_0 < \rho_1 < 1$, 同理可得

$$\frac{M(\rho_0)}{\ln \frac{4}{\rho_0}} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} \geq M(\rho_1) - M(\rho_0) \geq \frac{M(\rho_0)}{\ln \frac{1}{\rho_0}} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

即得(4)。

關於不等式 $M_{-1}\left[\frac{1}{Q} M(\rho)\right] \geq \rho^{\frac{1}{Q}}$ 應用 Q -擬保角映射 $w = |z|^{\frac{1}{Q}} e^{i \arg z}$

于引理便可得到。

§3. 擬保角性

定理一 設 $w = f(z)$ 在 z_0 點 Q -擬解析, γ_1, γ_2 是通過 z_0 點的二條光滑曲線, 它們在 z_0 的交角為 θ ($0 < \theta < \pi$), γ_1, γ_2 在 w 平面的象 Γ_1, Γ_2 在 $w_0 = f(z_0)$ 點的交角為 φ 。

$$\text{則 } M_{-1}\left[QM\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{4}\right)\right] \leq \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \leq M_{-1}\left[\frac{1}{Q} M\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{4}\right)\right] \quad (5)$$

$$\text{或 } 4^{1-Q} \operatorname{tg} Q \frac{\theta}{4} \leq \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \leq 4^{1-\frac{1}{Q}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{4} \quad (6)$$

[証]: $f(z)$ 在 z_0 點 Q -擬解析, 據定義二存在一個 z_0 的鄰域 Ω_0 。使 $w = f(z)$ 是 Ω_0 上的 Q -擬保角映射。

不妨設 γ_1 是 Ω_0 內的一條光滑的閉若當曲線。又 γ_2 完全落在 γ_1 所包圍的區域內, 且 γ_1, γ_2 只有一個交點 z_0 。此時 Γ_1 也應是一條光滑的閉若當曲線, Γ_2 也應完全落在 Γ_1 所包圍的區域中且 Γ_1, Γ_2 只有一個交點 $w_0 = f(z_0)$ 。據 Riemann 定理必存在二個單葉正則映射 $Z = \varphi(z)$, $W = \Phi(w)$ 。它們分別把 γ_1, Γ_1 所包圍的區域映為上半平面, $\varphi(z_0) = 0$, $\Phi(w_0) = 0$, 以及使 $W = \Phi \varphi_{-1}(Z)$ 把 0 和 ∞ 不變, 實軸映為實軸且方向亦不變。據〔四〕第九章 §1 知 γ_2 在 Z 平面的象 Γ_2 和 γ_2 在 W 平面的象 Γ_2 與實軸的交角仍分別為 θ 和 φ 。

$$\text{置 } F(Z) = \begin{cases} \Phi \varphi_{-1}(Z) & \operatorname{Im}(Z) \geq 0 \\ \overline{\Phi \varphi_{-1}(\bar{Z})} & \operatorname{Im}(Z) < 0 \end{cases}$$

$W = F(Z)$ 是把整个平面映为自己的拓扑映射。它把 $0, \infty$ 不变把实轴映为实轴且方向亦不变。又 $F(Z)$ 除去实轴上的点外点是 Q -拟解析的。

任取 γ_2 上一点 $z_1 (Z_1 = \varphi(z_1) \neq 0)$ 及置 $W_1 = F(Z_1)$ 。

对割去负实轴的 $Z_1 W$ 平面分别下变换：

$$\zeta = \frac{1}{i} \cdot \frac{\sqrt{\frac{Z}{|Z_1|}} - 1}{\sqrt{\frac{Z}{|Z_1|}} + 1} \quad \omega = \frac{1}{i} \cdot \frac{\sqrt{\frac{W}{F(|Z_1|)}} - 1}{\sqrt{\frac{W}{F(|Z_1|)}} + 1}$$

它们把割开的平面分别映为单位圆且把正实轴映为单位圆上的虚轴部分。

通过这二个变换及 $W = F(Z)$ 得到的 ζ 与 ω 的关系是一个满足 Schwarz 引理条件的映射。据引理 1

$$|\omega| \leq M_{-1} \left[\frac{1}{Q} M(|\zeta|) \right]$$

或

$$\left| \frac{\sqrt{\frac{W}{F(|Z_1|)}} - 1}{\sqrt{\frac{W}{F(|Z_1|)}} + 1} \right| \leq M_{-1} \left[\frac{1}{Q} M \left(\left| \frac{\sqrt{\frac{Z}{|Z_1|}} - 1}{\sqrt{\frac{Z}{|Z_1|}} + 1} \right| \right) \right]$$

取 $Z = Z_1 = |Z_1| e^{i\theta_1}$ 及令 $W_1 = |W_1| e^{i\varphi_1}$ 代入上式及利用不等式

$$\left| \frac{\sqrt{\frac{|W_1|}{F(|Z_1|)}} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{|W_1|}{F(|Z_1|)}} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} + 1} \right| \geq \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{4}$$

使得

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{4} \leq M_{-1} \left[\frac{1}{Q} M(\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{4}) \right]$$

于是得证

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \leq M_{-1} \left[\frac{1}{Q} M(\operatorname{tg} \frac{\theta}{4}) \right]$$

对调 z, w 的位置同理得 $\operatorname{tg} \frac{\theta}{4} \leq M_{-1} \left[\frac{1}{Q} M(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{4}) \right]$ 于是得到 (5) 式

在证明的过程中若用引理 2 的结果便可得到 (6) 式。

定理二 设 $w = f(z)$ 是把 $|z| < 1$ 映为 $|w| < 1$ 的 Q -拟保角映射且 $0 = f(0)$,

則對 $|z| < 1$ 上任二點 z_1, z_2 有

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq A(Q) |z_2 - z_1|^{\frac{1}{Q}} \quad (7)$$

$$\text{其中 } A(Q) < 4^{Q - \frac{1}{Q}} \frac{2}{Q} \left(1 - \frac{2}{Q^2}\right)^{\frac{1}{Q} - Q} + 4^{2 - Q - \frac{1}{Q}} \frac{2}{Q} \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right)^{\frac{1}{Q} + Q}$$

當 $Q \rightarrow 1$ 時 $A(Q) \rightarrow A(1) = 1$ 。

“證”*: 據〔二〕之定理4可以把 $w = f(z)$ 擴張為一個把 $|z| \leq 1$ 映為 $|w| \leq 1$ 的拓撲映射。

置

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & |z| \leq 1 \\ \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} & |z| > 1 \end{cases}$$

$w = F(z)$ 是把整個平面映為自己的拓撲映射, $0 = F(0)$, 且 $F(z)$ 在除去 $|z| = 1$ 上的點外點點 Q -擬解析, 又對任 $r_0 (0 < r_0 < 1)$, $w = F(z)$ 將 $|z| \leq \frac{1}{r_0}$ 映入 $|w| \leq \rho_0$ 內, 其中 $\rho_0 = 4^{Q-1} \frac{1}{r_0^Q}$ 。關於前幾點是顯然的, 至於最後一點其證明如下: 關於這一點只要證明 $1 < |z| < \frac{1}{r_0}$ 映入 $|w| \leq \rho_0$ 便夠了。事實上, 此時 $1 > \frac{1}{|z|} > r_0$ 據引理2有

$$\left| f\left(\frac{1}{z}\right) \right| \geq 4^{1-Q} \left| \frac{1}{z} \right|^Q \geq 4^{1-Q} r_0^Q \quad \text{即} \quad |F(z)| \leq \rho_0。$$

作

$$Z = \frac{r_0(z - z_1)}{1 - r_0^2 \bar{z}_1 z}, \quad W = \frac{\rho_0(w - w_1)}{\rho_0^2 - \bar{w}_1 w}。$$

前者把 $|z| \leq \frac{1}{r_0}$ 映為 $|Z| \leq 1$, 把 z_1 映為 0; 後者把 $|w| \leq \rho_0$ 映為 $|W| \leq 1$, 把 $w_1 = f(z_1)$ 映為 0。 Z 與 W 的關係 $W = \varphi(Z)$ 是一個把 $|Z| \leq 1$ 映入 $|W| \leq 1$ 內且把 0 不變的拓撲映射, 又 $\varphi(Z)$ 在 $|Z| \leq 1$ 內除去一條光滑曲綫的點外點點 Q -解析的。據引理2有

* 此證明的辦法是仿〔五〕的。

$$\left| \varphi(Z_2) \right| \leq 4^{1-\frac{1}{Q}} |Z_2|^{\frac{1}{Q}} \quad |Z_2| < 1$$

或
$$\left| \frac{\rho_o(w_2 - w_1)}{\rho_o^2 - \bar{w}_1 w_2} \right| \leq 4^{1-\frac{1}{Q}} \left| \frac{r_o(z_2 - z_1)}{1 - r_o^2 \bar{z}_1 z_2} \right|^{\frac{1}{Q}}$$

$$\therefore \frac{\rho_o}{1 + \rho_o^2} \left| f(z_2) - f(z_1) \right| \leq 4^{1-\frac{1}{Q}} \left(\frac{r_o}{1 - r_o^2} \right)^{\frac{1}{Q}} |z_2 - z_1|^{\frac{1}{Q}}$$

$$\left| f(z_2) - f(z_1) \right| \leq A(Q) |z_2 - z_1|^{\frac{1}{Q}}$$

$$A(Q) = \inf_{0 < r_o < 1} \left(\rho_o + \frac{1}{\rho_o} \right) 4^{1-\frac{1}{Q}} \left(\frac{r_o}{1 - r_o^2} \right)^{\frac{1}{Q}}.$$

下面让我们来估计 $A(Q)$

$$\text{令 } \frac{r_o}{1 - r_o^2} = \frac{1}{\lambda} \text{ 则 } \rho_o = 4^{Q-1} \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2} \right)^Q < 4^{Q-1} (\lambda + 1)^Q,$$

$$A(Q) \leq \inf_{0 < \lambda} \left\{ 4^{1-\frac{1}{Q}} (\lambda + 1)^Q + 4^{1-Q} (\lambda + 1)^{-Q} \lambda^{-\frac{1}{Q}} \right\}$$

取 $\lambda = \frac{1}{Q^2 - 1}$ 代入便得

$$A(Q) \leq 4^{Q-\frac{1}{Q}} \frac{2}{Q} \left(1 - \frac{1}{Q^2} \right)^{\frac{1}{Q}-Q} + 4^{2-Q-\frac{1}{Q}} \frac{2}{Q} \left(1 - \frac{1}{Q^2} \right)^{\frac{1}{Q}+Q}$$

不难算上式右边当 $Q \rightarrow 1$ 时趋于 1。证毕。

关于定理二有许多人工作过，Mori 在〔六〕得到佳的结果：

$$\sup_{Q, f, z_1 \neq z_2} \frac{|f(z_2) - f(z_1)|}{|z_2 - z_1|^{\frac{1}{Q}}} = 16.$$

§4. 拟保角映射叙列的收斂

拟保角映射叙列的收斂性有許多与解析函数列的情况相类似, 在此我們利用上节的定理, 可以得到一些关于这方面的定理。

定理三 設 $f_n(z)$ ($n=1, 2, \dots$) 及其一級偏导数在区域 D 連續且在 D 內任閉集上一致收斂, 又設 $f_n(z)$ 在 $(D-E)$ 上点点 Q_n -拟解析, 其中 E 为 Lebesgue 零测集。

$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 1$ 則 $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ 在 G 內解析。

[証]: 由条件知 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 D 內連續及 u, v 在 D 內有連續的一級偏导数。如果能証明 u, v 在 $(D-E)$ 上滿足 Cauchy-Riemann 关系式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (C.R)$$

那么据 Looman—Меньшов 定理 (參見 [八]) 便可得証。

考虑点 $z_0 \in (D-E)$ 今分几种情况来研究:

(一) $J(z_0) = 0$

若 $u_x(z_0) = u_y(z_0) = v_x(z_0) = v_y(z_0) = 0$ 則自然滿足关系 (C.R)。

若 $u_x(z_0), u_y(z_0), v_x(z_0), v_y(z_0)$ 不全为零, 下面將証明此种情况是不存在的。

事实上, 此时必存在一个方向 S_1 使 $\frac{\partial f}{\partial S_1} \neq 0$ 且 $\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial f}{\partial S_1} \cos(S, S_1)$ 。

取确定方向 S_2 使 $(S_2, S_1) = \theta$, ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)。

当 z 自 z_0 出发沿 S_1, S_2 两方向划动时, $f(z)$ 自 $f(z_0)$ 出发相应地沿两个方向划动, 設此两方向的交角为 φ 。

一方面, 由于 $\frac{\partial f}{\partial S_2} = \frac{\partial f}{\partial S_1} \cos \theta \neq 0$, φ 是 $\frac{\partial f}{\partial S_2}$, $\frac{\partial f}{\partial S_1}$ 两复数的幅角之差, 故 $\varphi \neq 0$ 。

另一方面, 若設当 z 自 z_0 出发沿 S_1, S_2 方向划动时, $f_n(z)$ 相应地沿两方向划动, 而这两方向的交角为 φ_n 。由于在 $z = z_0$ 点, $\frac{\partial f_n}{\partial S_1}$, $\frac{\partial f_n}{\partial S_2}$ 分別收斂于 $\frac{\partial f}{\partial S_1}$,

$\frac{\partial f}{\partial S_2}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial S_1} \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial S_2} \neq 0$ 故知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ 。

据条件 $f_n(z)$ 在 z_0 点 Q_n -拟解析, 由定理一得

$$4^{1-Q_n} \operatorname{tg} Q_n \frac{\theta}{4} \leq \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \leq 4^{1-Q_n} \operatorname{tg} \frac{1}{Q_n} \frac{\theta}{4}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得 $\theta = \varphi$, 此与上面的結論相矛盾。

于是得証此种情况不存在。

(二) $J(z_0) \neq 0$ (实际上, $J(z_0) > 0$ 因为 $J_n(z_0) > 0$).

此时, $\frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{z_0} \neq 0$ (s 为任一方向)。

由于 u_x, u_y, v_x, v_y 在 D 連續, 加上上面的条件和仿 (一) 中的証法, 可証明存在 z_0 的邻域 Ω_0 使 $w = f(z)$ 在 Ω_0 中保角和单叶, 因而得証 $f(z)$ 在 Ω_0 中解析, 即得証 u, v 在 Ω_0 满足 (c, R) 关系式。定理証毕。

定理四* 設 $w = f_n(z)$ ($n=1, 2, \dots$) 是把 $|z| < 1$ 映为 $|w| < 1$ 的 Q_n -拟保角映射, $f_n(0) = 0$ 設 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 1$ 若 $f_n(z)$ 在 $|z| < 1$ 收斂于 $f(z)$, 則 $f(z) = e^{i\alpha} z$, (α 为实常数)。

[証]: 先把 $w = f_n(z)$ 扩張为把 $|z| \leq 1$ 映为 $|w| \leq 1$ 的拓扑映射, 据定理二有

$$\frac{1}{A(Q_n)} |z_2 - z_1|^{Q_n} \leq |f_n(z_2) - f_n(z_1)| \leq A(Q_n) |z_2 - z_1|^{\frac{1}{Q_n}} \quad (8)$$

其中 $|z_2| \leq 1, |z_1| \leq 1$ 。

据此知 $\{f_n(z)\}$ 是一个一致有界且等度連續的函数列。据熟知的Arzeli定理从 $\{f_n(z)\}$ 中必可选出一个子列使它在 $|z| \leq 1$ 上一致收斂于 $f(z)$ 。不妨設此子列就是 $\{f_n(z)\}$ 本身。

对 (8) 式令 $n \rightarrow \infty$ 便得

$$|f(z_2) - f(z_1)| = |z_2 - z_1|, \quad |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1 \quad (9)$$

(一) 証明 $f(te^{i\theta}) = te^{i\varphi}$ $0 \leq t \leq 1$ 其中 $\varphi = \arg f(e^{i\theta})$ 。

由已知条件 $f_n(0) = 0$ 知 $f(0) = 0$ 。命 $z_1 = 0, z_2 = e^{i\theta}$, 代入 (9) 式得 $|f(e^{i\theta})| = 1$, 因而 $f(e^{i\theta}) = e^{i\varphi}$, 又 (9) 式表示映射 $w = f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上把距离不变。因而知 $f(te^{i\theta}) = te^{i\varphi}$ $0 \leq t \leq 1$

(二) 証明 $f(e^{i\theta}) = e^{i\theta + i\alpha}$ (α 为实常数)

首先証明 z 在 $|z| = 1$ 上排列的顺序与 $f(z)$ 在 $|w| = 1$ 上排列的顺序一致。

- 定理四实质上就是 [五] § 8 的定理二。首先为 M. A. Лаврентьев 所証。关于这方面夏道行在 [七] 得到好的结果, 但他們的証明方法和这里的完全不同。

事实上, 設 $f(z_1)$ 、 $f(z_2)$ 、 $f(z_3)$ 在 $|w|=1$ 上順时針方向排列。由于 $f_n(z)$ 一致收斂于 $f(z)$, 故当 n 充分大时, $f_n(z_1)$ 、 $f_n(z_2)$ 、 $f_n(z_3)$ 也必是按順时針方向排列的。而 $f_n(z)$ 是一个拟保角映射, 故自变量 z_1 、 z_2 、 z_3 也应是順时針方向排列的。

据(一)可設 $f(e^0) = e^{i\alpha}$ 据 $w = f(z)$ 把距离不变性及把单位圆映为自己便知 $(fe^{i\pi}) = e^{i(\pi + \alpha)}$ 。任給 $e^{i\theta}$ 。据上所証 e^0 , $e^{i\theta}$, $e^{i\pi}$ 的排列順序与 $e^{i\alpha}$, $f(e^{i\theta})$, $e^{i(\pi + \alpha)}$ 的相同, 且

$$|f(e^{i\theta}) - e^{i\alpha}| = |e^{i\theta} - e^0|, \quad |f(e^{i\theta}) - e^{i(\pi + \alpha)}| = |e^{i\theta} - e^{i\pi}|,$$

由此可推得 $f(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + \alpha)}$ 即得証(二)。

由(一)及(二)便得到 $f(z) = e^{i\alpha} z$ 。

定理五. 設单連通区域 D 的边界是一条閉若当曲綫 Γ , $w = f_n(z)$ 是 $\bar{D}$ 上的拓扑映射又是 D 上的 Q_n -拟保角映射 ($n=1, 2, \dots$)。 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 1$ 。若

1° $f_n(z)$ 在 $\bar{D}$ 上收斂于 $f(z)$, 且在 Γ 上一致收斂。

2° Γ 关于 f 的象 C 与 Γ 拓扑同胚。

3° 存在 $z_0 \in D$ 使 $f(z_0)$ 落在 C 所包围的区域 B 內。則 $w = f(z)$ 是 D 上的单叶正则映射。

[証]: 不妨設 D 为 $|z| < 1$ 及 $f_n(0) = 0$, $z_0 = 0$ 。事实上, 先用 $f_n(z) - f_n(z_0)$ 代替 $f_n(z)$ 再下一单叶变换把 D 映为单位圆, 及把 z_0 映为 0 便可。

置 $B_n = f_n(D)$, C_n 为其边界, 它是一条若当曲綫, 据条件可知当 $n \rightarrow \infty$ 时, B_n 收斂于它的关于 0 点的核 B^* 。

据 Riemann 定理存在单叶正则映射 $w = \varphi_n(\xi)$, ($n = 1, 2, \dots$), 把 $\bar{B}_n$ 映为 $|\xi| \leq 1$ 且 $\varphi'_n(0) > 0$, $\varphi_n(0) = 0$ 。

由条件 1°、2° 知对 $\varepsilon > 0$ 存在 N 使 $n > N$ 时, C_n 与 C 一对对应点的距离 $< \varepsilon$ 据书[四]56頁的定理知 $\varphi_n(\xi)$ 在 $|\xi| \leq 1$ 上一致收斂于一个单叶正则函数 $w = \varphi(\xi)$, $w = \varphi(\xi)$ 把 $|\xi| < 1$ 映为 B 且 $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ 。

置 $\xi = F_n(z) = \varphi_n^{-1}[f_n(z)]$, 其中 φ_n^{-1} 表 φ_n 的逆映射。則 $\xi = F_n(z)$ 是把 $|z| < 1$ 映为 $|\xi| < 1$ 的 Q_n -拟保角映射, 且 $f_n(0) = 0$ 据定理二有

$$\left| F_n(z_2) - F_n(z_1) \right| \leq A(Q_n) \left| z_2 - z_1 \right| \frac{1}{Q_n} \quad |z_2| \leq 1, \quad |z_1| \leq 1.$$

由此知 $\{F_n(z)\}$ 是一个一致有界, 且等度連續的函数列。据 Arzelà 定理必存在一个一致收斂的子列。不妨設它就是 $\{F_n(z)\}$, 且設 $F_n(z) \rightarrow F(z)$ 据定理三知

•) 核的定义是按书[四]52頁所述的。

$$F(z) = e^{i\alpha} z.$$

下面证明 $f(z) = \varphi(e^{i\alpha} z)$ 。

在 $|z| < 1$ 内任取一点 z_1 。任给 $\varepsilon > 0$ 。

据书〔四〕56页定理二的证明中知 $\varphi_n(\xi)$ 在 $|\xi| = 1$ 等度连续。据条件易知 B_n 是一致有界的，因而知 $\varphi_n(\xi)$ 在 $|\xi| \leq 1$ 上一致有界再加上 $\varphi_n(\xi)$ 的解析性便可证知 $\varphi_n(\xi)$ 在 $|\xi| \leq 1$ 上等度连续。于是存在 $\eta > 0$ 使当 $|\xi - e^{i\alpha} z_1| < \eta$ ， $|\xi| < 1$ 时

$$|\varphi_n(\xi) - \varphi_n(e^{i\alpha} z_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

已知 $F_n(z)$ 及 $\varphi_n(\xi)$ 分别一致收敛于 $F(z)$ 及 $\varphi(\xi)$ 。于是存在 N 使 $n > N$ 时，

$$|F_n(z) - F(z)| < \eta \text{ 对 } |z| \leq 1 \text{ 中任意的 } z。$$

$$\text{及} \quad |\varphi_n(\xi) - \varphi(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 对 } |\xi| \leq 1 \text{ 中任意的 } \xi$$

成立。

取 $z = z_1$ ， $\xi = F(z_1) = e^{i\alpha} z_1$ 代入上二个不等式

$$\text{得当 } n > N \text{ 时 } |F_n(z_1) - e^{i\alpha} z_1| < \eta \text{ 及 } |\varphi_n(e^{i\alpha} z_1) - \varphi(e^{i\alpha} z_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

成立。

$$\text{于是得到: } n > N \text{ 时 } |\varphi_n(F_n(z_1)) - \varphi(e^{i\alpha} z_1)| < \varepsilon。$$

$$\text{即} \quad n > N \text{ 时 } |f_n(z_1) - \varphi(e^{i\alpha} z_1)| < \varepsilon，$$

$$\text{令 } n \rightarrow \infty \text{ 得} \quad |f(z_1) - \varphi(e^{i\alpha} z_1)| \leq \varepsilon。$$

$$\text{令 } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ 得} \quad f(z_1) = \varphi(e^{i\alpha} z_1)。$$

$$\therefore \quad f(z) = \varphi(e^{i\alpha} z) \quad |z| \leq 1 \quad \text{证毕。}$$

〔附注〕 定理中条件1°改为 $f_n(z)$ 在 $\bar{D}$ 上一致收敛则条件3°可以省去，因为新的条件蕴含条件3°，事实上，取 $w_0 \in B$ ，记 δ 为 w_1 与 c 的距离 ($\delta > 0$)，据新的条件存在 n_0 使 $|f_{n_0}(z) - f(z)| < \frac{\delta}{3}$ ， $z \in D$ 。由此知 $w_1 \in B_{n_0}$ ，因而存在 $z_0 \in D$ 使

$$f_{n_0}(z_0) = w_0，\text{于是有 } |f(z_0) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\delta}{3} \text{ 此示 } f(z_0) \in B。$$

致谢：本文蒙刘俊贤教授的指教和蔡克聚、林和曾同志的帮助，在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] П.П.Белинский: оБ искажении при квазиконформных отображениях Д.А.Н.С.С.С.Р 1953 том 19 No.15
- [2] A. Mori: On quasi-conformality and pseudo-analyticity Trans. A.M.S. 84(1957).
- [3] 王传芳: Q-映照中森(A. Mori)的定理的准确化. 科学纪录 新辑第四卷第5期(1960)。
- [4] Г.М.Голузин: 复变函数的几何理论。
- [5] Л.И.ВолковЫский: Квазиконформные отображения.
- [6] A. Mori: On an absolute Constant in the theory of quasi-Conformal mapping. J. Math. Soc. Japan. 8.156—166(1956)
- [7] 夏道行: 拟似共形映照的参数表示 科学记录 新辑第三卷第9期(1959)。
- [8] 功力金二郎: 复变函数论(中译本)。

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Сюй И-жань

Резюме

В настоящей статье мы, главным образом, изучаем квазиконформность квазиконформных отображений и сходимость последовательности функций с помощью геометрической теории функций комплексного переменного. кроме того, мы даём еще некоторые полезные примечания о лемме шварца.