ρ-介子Regge极迹与π介子电磁形式因子

李 華 鍾

(物 理 系)

§ 1

π介子电磁形式因子，在光生介子和核子电磁結构等一系列低能π-N系統同电磁场相互作用过程中，起着重要的作用。Frazer和Fulco[1]首先引入并推导出π介子电磁形式因子。由于还沒有滿意的π-π散射理論，还由于导出的形式因子公式很复杂，不便应用，目前一般都引用唯象或簡化了的π介子电磁形式因子[2]。近年来，出現了应用Regge极点方法来导出形式因子的工作[3]。假設ρ介子Regge极点是主要貢献，得到了形式因子公式同ρ介子Regge极跡簡单地联系起来。因为目前还未有极迹的充分知識，所以人們倒过来从实驗的形式因子来定出Regge极迹的粗略形象。但是在这些工作[3]中有显然的缺点，它們为了得到簡单可用的式子，必須对形式因子公式中所含的完全未知性質的函数作出任意的假定——取为常数。此外，現在知道，它們所用旧的Regge項不完全反映Regge极点的全部貢献。本文用Khuri[4]新近所修正的Regge表示形式，这个新的单項近似，在低能下是一个較好的近似[5][7]，我們得到了π介子电磁形式因子用ρ-Regge极迹参数表出的式子。其次，我們能作較合理的近似，能指出所作近似的适用条件，文献[3]*的形式因子公式在本文中自动得到。

§ 2

考慮同位旋T的π-π散射振幅$A^T(s,z)$，其Regge表示为：

$$A^T(t,z)=A^{T(e)}(t,z)+A^{T(10)}(t,z) \tag{1}$$

$$A^{T(e)},{}^{(o)}(t,z)=\frac{1}{2}\Sigma(2\alpha_n+1)\beta_n(t)\pi\left[P_{\alpha_n}(z)\pm P_{\alpha_n}(-z)\right]\Big/ \sin\alpha_n(t)+$$

* 这些文献中[3a]討論的是核子电磁形式因子。但它們的式子也可以完全用到π介子去。

$$+\frac{i}{4}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}d\alpha\,\frac{(2\alpha+1)\pi}{\sin\pi\alpha}A^{T(e),(o)}(\alpha,s)\Big[P_\alpha(-z)\pm P_\alpha(z)\Big] \tag{2}$$

$$\begin{aligned} z &= \cos\theta \\ t &= 4(q^2+\mu^2) \\ s &= -2q^2(1-\cos\theta) \\ u &= -2q^2(1+\cos\theta) \end{aligned} \tag{3}$$

(e),(o)分别表示J－宇称为偶或奇的振幅。q,$\cos\theta$为質心坐标中的动量和散射角。今后討論$T=1$的π-π散射振幅。

定义

$$\begin{aligned} ch\xi_s &= 1+\frac{s}{2q^2} \\ ch\xi_u &= 1+\frac{u}{2q^2} \end{aligned} \tag{4}$$

又

$$\begin{aligned} \xi_{s=4\mu^2} &= \xi_1 = ch^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{q^2}\right) \\ \xi_{u=4\mu^2} &= \xi_2 = ch^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{q^2}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

实际上$\xi_1=\xi_2$，但为了下面便于說明起见，我們仍保留着不同的記号。ρ介子的J-宇称为奇，我們只需$A^{1(0)}(t,z)$（以下略去标記$^{(0)}$）。根据文献[4]的方法，(2)中只取 $\alpha_n=\alpha_\rho$ 的一項

$${}_\rho A^1(t,z)=R_1(\tfrac{1}{2},z;\ \alpha_\rho)+R_2(t,z;\alpha_\rho) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} R_1(t,z,\alpha_\rho) &= \tfrac{1}{2}\beta_\rho(t)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\xi_1}\frac{e^{\alpha_\rho+\frac{1}{2}}Shx\,dx}{(chx-z)^{3/2}}-\frac{2\pi(\alpha_\rho+\frac{1}{2})P_{\alpha_\rho}(-z)}{\sin\pi\alpha_\rho}\right) \\ R_2(t,z;\alpha_\rho) &= \tfrac{1}{2}\beta_\rho(t)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\xi_2}\frac{e^{\alpha_\rho+\frac{1}{2}}Shx\,dx}{(chx+z)^{3/2}}-\frac{2\pi(\alpha_\rho+\frac{1}{2})P_{\alpha_\rho}(z)}{\sin\pi\alpha_\rho}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

取对物理值l分波投射

$$\begin{aligned} {}_\rho A_l^1(t) &= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_l(z)A^1(t,z)lz \\ &= -\tfrac{1}{2}\beta_\rho(t)\frac{e^{-(l-\alpha_\rho)\xi_1}}{\alpha_\rho(t)-l}-\tfrac{1}{2}\beta_\rho(t)\frac{e^{-(l-\alpha_\rho)\xi_2}}{\alpha_\rho(t)-l} \end{aligned} \tag{8}$$

值得注意之点是，这个单一个 Regge 极点项的分波振幅同完全的物理分波振幅 $A^1_l(t,z)$ 有相同的 t 平面解析性。众所周知，物理 l 值的分波振幅在 t 平面有右方割从 $4\mu^2$ 到 $+\infty$，左方割从 o 到 $-\infty$。交叉道对左方割的貢献重合。現在，(8)是分波振幅中只保留 ρ 介子极迹貢献的一項，它的右方割来自 $\alpha_\rho(t)$ 和 $\beta_\rho(t)$。已經有一些工作指出[8]：玻色子 $\alpha_\rho(t)$，$\beta_\rho(t)$ 只有右方割从 $4\mu^2$ 到 $+\infty$。另一方面 ξ_1，ξ_2 分別相应于来自交叉道 s,u 的奇异性（参看(4)、(5)式），

$$\xi = \xi_1=\xi_2 = ln\left\{1+\frac{2\mu^2}{q^2}+\left[\left(1+\frac{2\mu^2}{q^2}\right)^2-1\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{9}$$

它們貢献左方割从 $t=0$ 到 $-\infty$。因此我們看出(8)与完全的分波振幅有相同的解析性。这解析性使我們在下面可以用 N/D 分解。

說明了解析性之后，我們在(8)中用 $\xi=\xi_1=\xi_2$ 重新写成

$$_\rho A^1_l(t)=-\beta_\rho(t)\frac{e^{(\alpha_\rho(t)-l)\xi}}{\alpha_\rho(t)-l} \tag{10}$$

$T=1$，$J=1$ 的 π-π 振幅，并只取 ρ 介子极迹的貢献，得一很簡单的式子：

$$_\rho A^1_1(t)=-\beta_\rho(t)\frac{e^{(\alpha_\rho(t)-1)\xi(t)}}{\alpha_\rho(t)-1}\ . \tag{11}$$

§ 3

π 介子电磁形式因子满足色散关系[9]

$$F_\pi(t)=\frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty}dt'\frac{ImF_\pi(t')}{t'-t} \tag{12}$$

（除开可能有的删去項），若将 π-π 散射振幅作 N/D 分解，略去非彈性道的貢献，则

$$F_\pi(t)=\frac{D^1_1(o)}{D^1_1(t)} \tag{13}$$

$F\pi(t)$ 以电荷 e 为单位，并规一化为 $F\pi(o)=1$ 。

对(11)式作一些近似。因[8]

$$\beta(t)\sim q^{2\alpha_o}\qquad\qquad q^2\to o \tag{14}$$

又由

$$e^{\alpha\xi} \sim q^{-2\alpha_0} \qquad q^2 \to o \tag{15}$$

α_0 是 $t = 4\mu^2$ 时 α_ρ 之値。

$$\therefore \qquad \beta(t)\, e^{\alpha(t)\xi(t)} \simeq C, \qquad q^2 \sim o \tag{16}$$

C 为常数。(16)式外推至 $t > 4\mu^2$ 并代入(11)，这类近似在工作[5]-[7]中表明是不坏的近似。

$$_\rho A_1^1(t) \approx \frac{C\, e^{\xi(t)}}{1-\alpha_\rho(t)} \tag{17}$$

(17)式分子 $e^{\xi(t)}$ 只有左方割，从 $t=o$ 到 $-\infty$；分母只有右方割从 $t=4\mu^2$ 到 $+\infty$，这正好作 N/D 分解，

$$\left.\begin{aligned} N_1^1(t) &= C\; e^{\xi(t)} \\ D_1^1(t) &= 1-\alpha_\rho(t) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

故得

$$F_\pi(t) = \frac{1-\alpha_\rho(o)}{1-\alpha_\rho(t)} \tag{19}$$

此式 $F_\pi(t)$ 的解析性完全滿足(12)式。

(19)式正是文献[3]所得的式子，現在我們显然知道(19)式在 $t \approx 4\mu^2$ 附近是很好的近似。从工作[5]—[7]的經驗来看，这种近似在 $t > 4\mu^2$ 則仍是可用的。我們的推导是自然的。此式在文献[3]中未能說明近似的条件和理由。

我們进一步指出，由(11)式不必再作任何近似可以作 N/D 分解，得到 $F_\pi(t)$ 一个簡单而准确的式子，因 $\alpha_\rho(t)$ 只有右方割，（以下省去足标 ρ ）

$$\alpha(t) = Re\alpha(t) + i\Theta(t-4\mu^2) Im\alpha(t) \tag{20}$$

$$A_1^1(t) = \frac{\beta(t)\, e^{Re\alpha(t)\xi(t) + \Theta(t-4\mu^2) i Im\alpha(t)\xi(t) - \xi(t)}}{1-\alpha(t)} \tag{21}$$

其中 $\Theta(x) = 1, x > 0$；$\Theta(x) = 0, x < 0$.

于是可設

$$N_1^1(t) = e^{(Re\alpha(t)-1)\xi(t)} \tag{22}$$

$$D_1^1(t) = \left[\frac{\beta(t)\, e^{i\Theta(t-4\mu^2)[Im\alpha(t)]\xi(t)}}{1-\alpha(t)}\right]^{-1} \tag{23}$$

易見 $N_1^1(t)$ 只有左方割，$D_1^1(t)$ 只有右方割。

$$F_\pi(t)=\frac{\beta(t)(1-\alpha(o))}{\beta(o)(1-\alpha(t))}\ e^{i\theta(t-4\mu^2)[Im\alpha(t)]\xi(t)} \tag{24}$$

易見此式有正确的解析性。

这式子在 Khuri 表示的单极迹項近似的条件下，除开忽略了 π-π 非彈性振幅对 $F_\pi(t)$ 的貢献外，是准确的。

要应用这些式子并同实驗比較，需要联系其他的过程，如核子电磁結构。但这需要对 $N+\widetilde{N}\to\pi+\pi$ 振幅作 Regge 处理。这将是另一課題。在这里我們只指出，对 $\alpha(t)$，$\beta(t)$ 作簡单的假設，例如綫性地依賴于 t 等等，不难得到那些能解释实驗数据的唯象的形式因子。由于目前任何对 $\alpha(t)$，$\beta(t)$ 的假設都有相当大的任意性，本文将不作进一步的討論。

摘　要

用 Regge－Kkuri 表示討論了 T＝1，J＝1 $\pi-\pi$ 散射分波振幅，导出了 π 介子电磁形式因子。

参 考 文 献

〔1〕 Frazer, W. R., Fulco, J.R. Phys. Rev. 117, (1960), 1609.

〔2〕 Bowcock, J., Cottingham, W.N., Lurié, E. Nuovo Cimento 16, (1960), 914.
Vick, L.L.T., Nuovo Cimento 31 (1964), 643.

〔3〕 a. Mcmillan, M., Predazzi, E. Nuovo Cimento 25(1962), 838.
b. Domokos, G., wolf, J. Phys. Letters 1 (1962), 349.
以上两文，曾納入下一总結：Fubini, S. Proc. 1962 Int. Conf. on High Enugy Phyics CERN p.767.

〔4〕 Khuri, N.N. Phys. Rev. 130 (1963), 429.

〔5〕 Khuri, N.N., Udgaonkar, B.M. Phys. Rev. Lettus 10 (1963) 172.

〔6〕 Der-Sarkissian, M. Nuovo Cimento 31 (1964), 562.

〔7〕 罗蓓玲，李华鍾 “Regge 极点与 π—N散射 $T=\frac{3}{2}$，$J=\frac{3}{2}$ P 波相移” 中山大学学报 1964，第 4 期.

〔8〕 Barut, A.O., Zwanziger, D, E. Phys. Rev. 127 (1962), 974.

〔9〕 Chew, G.F. S—Matrix Theory of Strong Interaction, p. 76.

ρ—Regge Trajectory and Pion Electromagnetie Form Factor

Lee Hwa—Chung

(Physics Department, Chung—Shan University)

Abstract

T=1, J=1 Partial wave awplitude of π-π Scattering is discussed on the base of Regge—Khuri representation. A new formula for pion electromagnetie form factor in terms of the position and residue parametirs of ρ—Regge trajectory is derived.