

乘积空间稳定性与微分方程组临界情形(I)

朱 思 銘

Leifschetz “微分方程的几何理论”^[1]一书中曾应用 К. П. Персидский 的“拟稳定”定义引用 Е. И. Дыхман 的结果给出了驻定方程组第一临界情形的 Ляпунов 定理一个新证明。但其渐近稳定性的证法是错误的,也缺少了条件稳定性的结果。在该书的 Виноград 和 Грабарь 的俄译本^[2]中已经改正了错误。但仅证明了稳定性,不能推证渐近稳定和条件稳定。即是说,他们的证明并不是 Ляпунов 该定理的完备的证明。同时必须指出:该书仅讨论了第一临界情形的“一般情形”,而有意或无意地避开了“特殊情形”的讨论。

本文给出 Ляпунов 第一临界情形包括“特殊情形”的完善的新证明。并在推证过程中得到具多重零根时判断其稳定性的一个方法。但这时,必须对 К. П. Персидский 的“拟稳定”定义作某些改变。

1. 考虑微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Y(y; z; t) & p \text{ 阶} & (a) \\ \frac{dz}{dt} = Z(y; z; t) & q \text{ 阶} & (b) \end{cases} \quad (1)$$

假设在定义域 $\Omega(A, \tau)$ 中方程右端连续且适合 Lipschetz 条件,又有

$$Y(0; 0; t) = Z(0; 0; t) = 0 \quad \text{当 } t \geq \tau \text{ 时}$$

定义 拟稳定——对任何足够小的正数 $\varepsilon \leq A$ 及初始时间 $t_0 \geq \tau$. 存在正数

$$\eta = \eta(\varepsilon, t_0) \text{ 及 } \xi = \xi(\varepsilon, t_0): \eta \leq \varepsilon \leq \xi \leq A.$$

使对 q 维连续向量 $\zeta(t): \|\zeta(t_0)\| < \eta$, p 阶方程 $\frac{dy}{dt} = Y(y; \zeta(t); t)$ 的适合 $\|y(t_0)\| < \eta$ 的解 $y(t)$, 当 $\|\zeta(t)\| \leq \xi, t \geq t_0$ 时有 $\|y(t)\| < \varepsilon$. 这时称原点对 y 为拟稳定,简称 O_y 拟稳定。

拟条件稳定——仅对 p 元实函数 $f(y)$ ⁽¹⁾ 当 $f(y(t_0)) \geq 0$ 时, O_y 才拟稳定。则称 O_y 对 $f(y)$ 拟条件稳定,简称 O_y 拟条件稳定。

* 作者感谢导师胡金昌、许滋庆教授的审阅指导。

(1) 对于条件稳定性,不少书上说成“有某些解”或“有某函数 $f(x)$ ”是不确切的。为了适合足够小的初始值域 $\|x_0\| < \eta$ 的限制,而不致使 $f(x_0) \geq 0$ 在域 $\|x_0\| < \eta$ 上落空,必须对 $f(x)$ 附加条件“在原点的任意小邻域均存在适合 $f(x) \geq 0$ 的点 x ”或大大加强了的条件“ $f(x)$ 连续且 $f(0) = 0$ ”。本文提及的条件稳定函数 $f(y)$ 、 $g(z)$ 均假定已满足附加条件。

拟漸近穩定—— O_y 拟穩定，更當對任何 $t \geq t_0$, $\|\zeta(t)\| \leq \xi$ 成立時有 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. 則稱 O_y 拟漸近穩定。

拟條件漸近穩定——若僅當 $f(y(t_0)) \geq 0$ 時， O_y 才拟漸近穩定。則稱 O_y 對 $f(y)$ 拟條件漸近穩定，簡稱 O_y 拟條件漸近穩定。

拟不穩定——若有某正數 $\varepsilon \leq A$ ，對任何 η, ξ : $0 < \eta \leq \varepsilon \leq \xi \leq A$ 及任何 q 維連續向量 $\zeta(t)$: $\|\zeta(t_0)\| < \eta$ 且當 $t \geq t_0$ 時 $\|\zeta(t)\| \leq \xi$. 方程 $\frac{dy}{dt} = Y(y; \zeta(t); t)$ 的滿足 $\|y(t_0)\| < \eta$ 的任何解 $y(t)$ ，均有某 $t_1 > t_0$ 使 $\|y(t_1)\| = \varepsilon$. 則簡稱 O_y 拟不穩定。

定理 1. 對方程組(1)，令 O 表坐標原點 $y=0, x=0$; O_y 與 O_z 分別表方程組(1a)與(1b)的坐標原點 $y=0$ ，與 $z=0$ 。

1° 若 O_y, O_z 拟穩定，則 O 穩定。

2° 若 O_y, O_z 拟條件穩定，則 O 條件穩定。

3° 若 O_y, O_z 拟漸近穩定，則 O 漸近穩定。

4° 若 O_y, O_z 拟條件漸近穩定，則 O 條件漸近穩定。

5° 若 O_y, O_z 有一拟不穩定，則 O 不穩定。

証. 1° 設給定 $t_0 \geq \tau$ 及任何足夠小的正數 $\varepsilon \leq A$. 按假定，對 O_y ，有

$$0 < \eta_1 \leq \varepsilon \leq \xi_1 \leq A;$$

對 O_z ，有 $0 < \eta_2 \leq \varepsilon \leq \xi_2 \leq A$. 取 $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ ，可証：對方程組(1)的解 $y(t), z(t)$ ，當 $\|y(t_0)\| < \eta, \|z(t_0)\| < \eta$ 時，必有 $\|y(t)\| < \varepsilon, \|z(t)\| < \varepsilon$ (對任何 $t \geq t_0$)。即 O 穩定。否則，必存在 $\|y(t)\| = \varepsilon$ 或 $\|z(t)\| = \varepsilon$. 對存在 $\|y(t)\| = \varepsilon$ 的情形，即有 $t_1 > t_0$ ，使 $t_0 \leq t < t_1$ 時 $\|y(t)\| < \varepsilon$ ，而 $\|y(t_1)\| = \varepsilon$. 這時，由 O_y 拟穩定，知有 $t_2: t_0 \leq t_2 < t_1$ ，使當 $t_0 \leq t < t_2$ 時， $\|z(t)\| < \xi_1$ ，而 $\|z(t_2)\| = \xi_1$. 但因 O_z 拟穩定，知 $t_0 \leq t < t_1$ 時仍有 $\|z(t)\| < \varepsilon$ ，矛盾。對存在 $\|z(t)\| = \varepsilon$ 的情形亦同樣處理。故方程組(1)為 O 穩定。

2° 若 O_y, O_z 分別對 $f(y), g(z)$ 拟條件穩定，則顯然， O 對 $h(y; z) = \sqrt{f(y)} + \sqrt{g(z)}$ 為條件穩定。

3°、4° 由 1°、2° 容易推証。

5° 設 O_y 拟不穩定，若 O 穩定或甚至 O 條件穩定，即有 ε, η, t_0 及方程組(1)的某解 $y(t), z(t)$: $\|y(t_0)\| < \eta, \|z(t_0)\| < \eta$ 且當 $t \geq t_0$ 時有 $\|y(t)\| < \varepsilon, \|z(t)\| < \varepsilon$. 此顯然與 O_y 拟不穩定，即有 $t_1 > t_0$ 使 $\|y(t_1)\| = \varepsilon$ 矛盾。

2. 駐定方程組所對應的首次近似綫性方程組中，若其特征根有 p 個為零（對應的初級因子次數均為 1），而其餘均具負實部，則可經正則變換化為標準形式：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Y(y; z) & p \text{ 階} & (a) \\ \frac{dz}{dt} = Qz + Z(y; z) & q \text{ 階} & (b) \end{cases} \quad (2)$$

其中 Q 為常陣，其特征根實部為負； Y, Z 在域 $\Omega(A)$ 連續且適合 Lipschétz 條件，又 $Y(0; 0) = Z(0; 0) = 0$ ；且當 $\|y\| + \|z\| \rightarrow 0$ 時 $\|Z(y; z)\| = o(\|y\| + \|z\|)$.

对这具多重零根的第一临界情形, 现考虑通过 p 阶方程组(2a)的稳定性态判断全方程组(2)的稳定性方法。

定理 2. 对方程组(2a), 若 Oy 为拟稳定、拟条件稳定、拟渐近稳定、拟条件渐近稳定或拟不稳定, 则对全方程组(2), O 分别为稳定、条件稳定、渐近稳定、条件渐近稳定或不稳定。

証. 稳定性: 为方便计, 取 $t_0=0$ 。显然, 有正数 B, γ 使 $\|e^{Qt}\| < Be^{-\gamma t}$ (任何 $t \geq 0$); 且有 $\rho > 0$, 使 $\|y\| < \rho, \|z\| < \rho$ 时 $\|Z(y; z)\| < \frac{\gamma}{3nB}(\|y\| + \|z\|)$ (其中 $n=p+q$)。现证, 对方程组(2b), Oz 为拟稳定。对任何足够小的正数 $\varepsilon < \rho$, 可令 $\eta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3nB}, \varepsilon\right)$ $\xi = \varepsilon$ 。于是对 $\|y(0)\| < \eta, \|z(0)\| < \eta$ 当 $\|y(t)\| \leq \xi, \|z(t)\| < \rho$ 时, 方程组(2b)有解,

$$z(t) = e^{Qt}z(0) + \int_0^t e^{Q(t-u)}Z(y(u); z(u))du$$

$$\|z(t)\| < nBe^{-\gamma t}\|z(0)\| + \int_0^t \frac{\gamma}{3} e^{-\gamma(t-u)}(\|y(u)\| + \|z(u)\|)du$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\gamma}{3} \int_0^t e^{-\gamma(t-u)}\|z(u)\|du$$

用 $e^{\gamma t}$ 乘上式并应用广义 Gronwall 引理^[2], 可化简得

$$\|z(t)\|e^{\gamma t} < \frac{\varepsilon}{3} e^{\gamma t} + \frac{\gamma}{3} \int_0^t e^{\frac{\gamma}{3}(t-u)} \cdot \frac{\varepsilon}{3} e^{\gamma u} du = \frac{\varepsilon}{3} e^{\gamma t} + \frac{\varepsilon}{6} e^{\gamma t} - \frac{\varepsilon}{6} e^{\frac{\gamma}{3}t}$$

$$\|z(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon < \rho$$

于是, Oz 拟稳定, 据定理 1, 知对方程组(2), O 稳定。

渐近稳定性: 设 Oy 拟渐近稳定。据前已知, Oz 为拟稳定且 O 为稳定, 即有正数 η , 使当 $\|y(0)\| < \eta, \|z(0)\| < \eta$ 时方程(2)的解有 $\|y(t)\| < \varepsilon, \|z(t)\| < \varepsilon$ (任何 $t > 0$) 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ 。现证明亦有 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ 。取记号与前同。对任意小的 $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$, 有 $\tilde{T} > T \geq 0$ 。

当 $t \geq T$ 时 $\|y(t)\| < \tilde{\varepsilon}$; 而当 $t \geq \tilde{T}$ 时 $-\frac{\varepsilon}{3} e^{-\frac{\gamma}{3}t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-\frac{\gamma}{3}(t-T)} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ 。于是

$$\|z(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} e^{-\gamma t} + \frac{\gamma}{3} \int_0^t e^{-\gamma(t-u)}(\|y(u)\| + \|z(u)\|)du$$

$$(\|z(t)\| + \|y(t)\|)e^{\gamma t} < \frac{\varepsilon}{3} + \|y(t)\|e^{\gamma t} + \frac{\gamma}{3} \int_0^t (\|z(u)\| + \|y(u)\|)e^{\gamma u} du$$

应用广义 Gronwall 引理^[2]得:

$$(\|z(t)\| + \|y(t)\|)e^{\gamma t} < \frac{\varepsilon}{3} + \|y(t)\|e^{\gamma t} + \frac{\gamma}{3} \int_0^t e^{\frac{\gamma}{3}(t-u)} \left(-\frac{\varepsilon}{3} + \|y(u)\|e^{\gamma u}\right) du$$

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &< \frac{\varepsilon}{3} e^{-\gamma t} + \frac{\gamma}{3} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\frac{\gamma}{3}(t-u)} \left(\frac{\varepsilon}{3} + \|y(u)\| e^{\gamma u} \right) du \\
&= \frac{\varepsilon}{3} e^{-\gamma t} + \frac{\gamma \varepsilon}{9} e^{-\frac{2}{3}\gamma t} \int_0^t e^{-\frac{1}{3}\gamma u} du + \frac{\gamma}{3} e^{-\frac{2}{3}\gamma t} \int_0^t \|y(u)\| e^{\frac{1}{3}\gamma u} du \\
&= \frac{\varepsilon}{3} e^{-\frac{2}{3}\gamma t} + \frac{\gamma}{3} e^{-\frac{2}{3}\gamma t} \left[\int_0^T \|y(u)\| e^{\frac{1}{3}\gamma u} du + \int_T^t \|y(u)\| e^{\frac{1}{3}\gamma u} du \right]
\end{aligned}$$

利用 $t \geq 0$ 時 $\|y(t)\| < \varepsilon$ 、 $t \geq T$ 時 $\|y(t)\| < \tilde{\varepsilon}$ ，知當 $t \geq \tilde{T}$ 時可化簡為：

$$\|z(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} e^{-\frac{2}{3}\gamma t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-\frac{2}{3}\gamma(t-T)} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} < \tilde{\varepsilon}$$

即 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ 。証得對方程組(2)， O 為漸近穩定。

條件穩定性、條件漸近穩定性及不穩定性均易由前推得。

3. 現在利用前面的結果，給出駐定方程組第一臨界情形的 Ляпунов 定理一個新証明。

當方程右端正則且綫性項的特征根實部非正且僅有一零根時，在“一般情形”，方程組(2)可化為^{[1][2]}

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \Phi(y) + Y(y; z) & \text{1 階} & (a) \\ \frac{dz}{dt} = Qz + Z(y; z) & \text{q 階} & (b) \end{cases} \quad (3)$$

其中 Q 為常陣，其特征根具負實部； Φ, Y, Z 在域 $\Omega(A)$ 正則； $\Phi(y) = gy^N + [y]_{N+1}$ ； $Y(y; z) = [y; z]_2 = [z]_1 = [y]_{N+1}$ ； $Z(0; z) = [z]_2$ ， $Z(y; 0) = [y]_T$ ($N \geq 2$ ， $T \geq N$ ， $g \neq 0$)。

顯然，當方程 $\frac{dy}{dt} = \Phi(y)$ 在 Oy 為穩定、條件穩定、漸近穩定、條件漸近穩定或不穩定時，對方程(3a)有相應 Oy 擬穩定性態（取 $\xi = A$ 即可）。而 $\frac{dy}{dt} = \Phi(y)$ 又與方程 $\frac{dy}{dt} = gy^N$ 在原點 Oy 的足夠小鄰域具有相同的穩定性態。於是証得“一般情形”中的 Ляпунов 定理：

定理 3. 對右端正則駐定方程組的第一臨界情形，其首次近似綫性方程組的特征根有一為零，其餘具負實部時，在“一般情形”，可經正則變換化為(3)式。此時

$$\Phi(y) = gy^N + [y]_{N+1}$$

則

N 為偶數時，方程組的零解為條件漸近穩定；

N 為奇數時，方程組的零解當 $g < 0$ 時為漸近穩定，當 $g > 0$ 時為不穩定。

4. 這裡，給出 p 個零根的第一臨界情形在“特殊情形”時穩定性的一個直接証明，此証法較已知的 Ляпунов 証法^[3]及 Малкин 証法^[4]更為簡捷，且並不依賴前面的概

念和定理。

“特殊情形”的方程組为

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Y(y; z) & p \text{ 阶} & \quad (a) \\ \frac{dz}{dt} &= Qz + Z(y; z) & q \text{ 阶} & \quad (b) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $Y(y; z) = [y; z]_2$ $Z(y; z) = [y; z]_2$ 且 $Y(y; 0) = Z(y; 0) = 0$ 而 Q 为具负实部特征根的常陣, 即存在正数 B, γ , 当 $t \geq 0$ 时 $\|e^{Qt}\| < Be^{-\gamma t}$.

方程組(4)等价于积分方程組

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^t Y(y(u); z(u)) du & (a) \\ z(t) &= e^{Q(t-t_0)} z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{Q(t-u)} Z(y(u); z(u)) du & (b) \end{aligned} \quad (5)$$

由 Y, Z 的性質, 知对任何正数, 例如 $\frac{\gamma}{2nB}$, 有足够小的正数 $\rho < 1$, 当 $\|y(t)\| < \rho$, $\|z(t)\| < \rho$ 时有

$$\begin{aligned} \|Y(y(t); z(t))\| &< \frac{\gamma}{2nB} \|z(t)\| & (a) \\ \|Z(y(t); z(t))\| &< \frac{\gamma}{2nB} \|z(t)\| & (b) \end{aligned} \quad (6)$$

現估計(5), 由(6)及 Bellman 引理, 易得

$$\|z(t)\| < nBe^{-\gamma(t-t_0)} \|z(t_0)\| + \int_{t_0}^t \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma(t-u)} \|z(u)\| du < nB \|z(t_0)\| e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &< \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^t \frac{\gamma}{2nB} \|z(u)\| du < \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^t \frac{\gamma}{2} \|z(t_0)\| e^{-\frac{\gamma}{2}(u-t_0)} du \\ &< \|y(t_0)\| + \|z(t_0)\| \end{aligned} \quad (7a)$$

于是, 对任意足够小的正数 $\varepsilon < \rho$, 只要取 $\eta < \min\left(\frac{\varepsilon}{nB}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, 則(7)有

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &< \varepsilon < \rho & t \geq t_0 \\ \|z(t)\| &< \varepsilon < \rho & t \geq t_0 \end{aligned}$$

即(4)的零解为稳定, 且由(5a)、(6a)及(7b)知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = c \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

(c 为 p 維常向量, 0 为 q 維零向量)

显然, $(c; 0)$ 为方程組(4)的特解。于是証得

定理 4. 对具 p 个零根的第一临界情形的特殊情形, 即具形式(4)的方程組, 其零解是稳定的, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时其解趋于方程的某特解

当 $p=1$ 时, 即得“特殊情形”中的 Ляпунов 定理。

参 攷 文 献

- [1] Lefschetz S. Differential Equations: Geometric Theory. London. 1957.
- [2] Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. И—Л 1961.
- [3] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат. 1950.
- [4] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва, 1952.