

关于嵌入定理的一点注記

馬 汝 念

(数学力学系)

用泛函分析方法处理偏微分方程的各种定解問題时, С.Л.Соболев 的嵌入定理^{[1][2]}起着重要作用。

設 Ω 是具有充分正規边界的 n 維有界区域, $\varphi(x)$ 是給定在 Ω 上的函数, 如果对于任意的无穷次可微而且在边界附近等于零的函数 $\zeta(x)$ ($x \in \Omega$), 恒有

$$\int_{\Omega} \zeta(x) \varphi(x) d\Omega = (-1)^l \int_{\Omega} \frac{\partial^l \zeta(x)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \varphi(x) d\Omega$$

成立, 則按С.Л.Соболев意义, 函数 $\varphi(x) \in L(\Omega)$ 在 Ω 中具有 l 阶广义微商, 記之为

$$\frac{\partial^l \varphi(x)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} = \psi(x), \quad \text{此地 } l \text{ 为正整数。}$$

凡是具有 $p \geq 1$ 次可积的而阶数 $\leq l$ 的广义微商的全体函数称之为С.Л.Соболев空間, 記之为 $W_p^{(l)}$, 它的范数定义为

$$\|\varphi\|_{W_p^{(l)}(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha| \leq l} \left(\frac{\partial^{\alpha} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} d\Omega \right\}^{\frac{1}{p}}$$

С.Л.Соболев 的嵌入定理是指

1. 設 $\varphi(x) \in W_p^{(l)}(\Omega)$ 且 $n < lp$, 則 $\varphi(x) \in C(\bar{\Omega})$
2. 設 $\varphi(x) \in W_p^{(l)}(\Omega)$ 且 $n \geq lp$, 則 $\varphi(x) \in L_{q^*}$ (在任何 S 維超平面)

$$\text{其中 } S > n - lp, \quad q^* < q = \frac{sp}{n - lp}$$

其后В.П.Ильин^[3]及В.И.Кондрашов^[4]等人的工作更加完善嵌入定理。

在1951年, С.М.Никольский^[5] 再把嵌入定理推广到具有某种意义下分数阶微商的函数类上去。更确切地说, 设 $r = \bar{r} + \alpha$, 其中 $\bar{r} \geq 0$ 是整数, 而 $0 < \alpha \leq 1$ 。如果函数 $f(x)$ 与它的直到 $\bar{r}$ 阶对 x_k 的偏微商均属于 $L_p(E_n)$, (E_n 为 n 维空间), 而当 $0 < \alpha < 1$ 时, $\bar{r}$ 阶对 x_k 的偏微商适合条件:

$$\left\| f_{x_k}^{(\bar{r})}(x + he_k) - f_{x_k}^{(\bar{r})}(x) \right\|_{L_p(E_n)} \leq M |h|^\alpha$$

当 $\alpha = 1$ 时

$$\left\| f_{x_k}^{(\bar{r})}(x + he_k) - 2f_{x_k}^{(\bar{r})}(x) + f_{x_k}^{(\bar{r})}(x - he_k) \right\|_{L_p(E_n)} \leq M |h|,$$

则称 $f(x)$ 具有 $\bar{r} + \alpha$ 阶对 x_k 的偏微商。具有这种性质的全体函数记之为 $H_{px_k}^r(E_n)$ 。其中 e_k 表示为 x_k 轴上的单位向量。

如果函数 $f(x)$ 属于所有的 $H_{px_k}^{r_k}(E_n)$ 空间, ($k = 1, 2, \dots, n$) 则函数 $f(x)$ 属于空间 $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(E_n)$ 。С.М.Никольский 证明了以下嵌入定理

$$\chi \left(H_p^{(r_1, r_2, \dots, r_n)}(E_n) \right) \subset H_{p'}^{(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)}(E_m) \quad (1 \leq p \leq p' < \infty)$$

$$\text{其中} \quad \rho_i = Kr_i, \quad K = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right) \sum_{i=1}^m \frac{1}{r_i} - \frac{1}{p} \sum_{m+1}^n \frac{1}{r_i} > 0,$$

E_m 为 m 维超平面。

本文引进另一种意义的分数阶偏微商, 并证明相应的嵌入定理。

设 $f(x) \in W_p^{(l)}(E_n)$, l 为正整数

$$\text{若} \quad \int_{E_n} \left| \frac{\partial^l f(x+h)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} - \frac{\partial^l f(x-h)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \right|^{2_{d.c.}} \leq A^2 |h|^{2\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$$

则称 $f(x)$ 具有平方可积的 $l + \alpha$ 阶微商。其中 $x+h$ 表示为 $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)$, $\sum_{i=1}^n l_i = l$, A 为不依赖 h 的常数。

具有上述性质的全体函数记作 $W_2^{(l+\alpha)}(E_n)$ 。

引理: 设 $f(x) \in L_2(E_n)$ 且

$$\int_{E_n} \left| f(x+h) - f(x-h) \right|^2 dx \leq A^2 |h|^{2\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $F(y) = \int_{E_n} f(x) e^{-i \sum_{j=1}^n x_j y_j} dx$ 恒有

$$\int_R^\infty \int_\sigma \left| F \right|^\beta r^{n-1} dr d\omega \leq K A^\beta R^{n-\alpha\beta-\frac{n\beta}{2}}, \quad \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n}} < \beta < 2$$

其中 $r = |y| = \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}$, $d\omega$ 表示 n 维球面面积元素。

[证明]: 为了简便记 $\sum_{j=1}^n h_j y_j = (h, y)$

因为 $\int_{E_n} f(x+h) e^{-i(h,y)} dx = e^{i(h,y)} F(y)$

于是 $\int_{E_n} [f(x+h) - f(x-h)] e^{-i(h,y)} dx = 2i \sin(h, y) F(y)$

由 Parseval 等式及假设得

$$\begin{aligned} \frac{4}{(2\pi)^n} \int_{E_n} |\sin(h, y)|^2 |F(y)|^2 dy &= \int_{E_n} |f(x+h) - f(x-h)|^2 dx \leq \\ &\leq A^2 |h|^{2\alpha}, \end{aligned} \quad (1)$$

考虑 $\frac{1}{2} < |h| |y| < 1$ 时显然有

$$\left| \frac{\sin(h, y)}{(h, y)} \right| > C > 0 \quad (2)$$

适当选择坐标, 使坐标轴通过 $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, 那么由 (2) 得

$$\begin{aligned} 4 \frac{c^2}{(2\pi)^n} \int_{\frac{1}{2|h|}}^{\frac{1}{|h|}} \int_\sigma |h|^2 |y_k|^2 |F|^2 r^{n-1} dr d\omega &\leq \\ &\leq 4 \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\frac{1}{2|h|}}^{\frac{1}{|h|}} \int_\sigma |\sin(h, y)|^2 |F|^2 r^{n-1} dr d\omega \end{aligned}$$

再根据(1)有

$$\int_{\sigma} \frac{1}{|h|} \int_{\sigma} |F|^2 r^{n-1} dr d\omega \leq K A^2 |2h|^{2\alpha} \quad (3)$$

其中 $K = \frac{n(2\pi)^n}{2^{2\alpha} C^2}$, 令 $\frac{1}{2|h|} = R$, 那么(3)可写为

$$\int_R^{2R} \int_{\sigma} |F|^2 r^{n-1} dr d\omega \leq K A^2 R^{-2\alpha}$$

我們把以原点为心, 以 R 为半径的球外无穷区域, 作以下以原点为心的同心球 R_n , 它們的半径分别为 $2^n R$, $n=1, 2, \dots$ 于是积分

$$\begin{aligned} \int_R^{\infty} \int_{\sigma} |F|^2 r^{n-1} dr d\omega &= \int_R^{2R} \int_{\sigma} |F|^2 r^{n-1} dr d\omega + \int_{2R}^{4R} \int_{\sigma} |F|^2 r^{n-1} dr d\omega + \\ &+ \int_{4R}^{8R} \int_{\sigma} |F|^2 r^{n-1} dr d\omega + \dots + \int_{2^{n-1}R}^{2^n R} \int_{\sigma} |F|^2 r^{n-1} dr d\omega + \dots \\ &\leq K A^2 R^{-2\alpha} (1 + 2^{-2\alpha} + 4^{-2\alpha} + \dots + (2^n)^{-2\alpha} + \dots) \end{aligned}$$

最后的圆括号内的級数是收斂的。

$$\therefore \int_R^{\infty} \int_{\sigma} |F|^2 r^{n-1} dr d\omega \leq K_1 A^2 R^{-2\alpha}$$

当 $\beta < 2$ 时, 由 Schwartz 不等式得

$$\begin{aligned} \int_R^{2R} \int_{\sigma} |F|^{\beta} r^{n-1} dr d\omega &\leq \left(\int_R^{2R} \int_{\sigma} |F|^2 r^{n-1} dr d\omega \right)^{\beta/2} \left(\int_R^{2R} \int_{\sigma} r^{n-1} dr d\omega \right)^{1-\frac{\beta}{2}} \\ &\leq (K A^2 R^{-2\alpha})^{\beta/2} \left(\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{(2R)^n - R^n}{n} \right)^{1-\frac{\beta}{2}} = K_2 A^{\beta} R^{n-\alpha\beta-\frac{n\beta}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad \int_R^{\infty} \int_{\sigma} |F|^{\beta} r^{n-1} dr d\omega \leq K_2 A^{\beta} R^{n-\alpha\beta-\frac{n\beta}{2}} \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} 2^{(n-\alpha\beta-\frac{n\beta}{2})s} \right)$$

显然, 当 $n-\alpha\beta-\frac{n\beta}{2} < 0$ 即 $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{n}} < \beta < 2$ 时, 最后的級数是收斂的。

因此

$$\int_R^{+\infty} \int_{\sigma} |F|^{\beta} r^{n-1} dr d\omega \leq K_3 A^{\beta} R^{n-\alpha\beta - \frac{n\beta}{2}}$$

除此, 由于 $F(y) \in L_2(E_n)$, 所以在以 R 为半径的球内, $F(y) \in L_{\beta}$

$$\therefore F(y) \in L_{\beta}(E_n)$$

现证如下的嵌入定理:

若 $f(x) \in W_2^{(l+\alpha)}(E_n)$ 且 $2 < q^* < \frac{2n}{n-2(l+\alpha)}$ 时, 则 $f(x) \in L_{q^*}(E_n)$

[证明]: 令 $\frac{\partial^l f(x)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} = \varphi(x)$ 及 $\varphi(x)$ 的 Fourier 变换记为 $\Phi(y)$

$$\text{那么} \quad \Phi(y) = i^l (y_1)^{l_1} (y_2)^{l_2} \dots (y_n)^{l_n} F(y), \quad l = \sum_{i=1}^n l_i,$$

由假定知 $\varphi(x) \in L_2(E_n)$, 且满足

$$\int_{E_n} |\varphi(x+h) - \varphi(x-h)|^2 dx \leq A^2 |h|^{2\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$$

根据引理知

$$\int_R^{\infty} \int_{\sigma} |\Phi|^{\beta} r^{n-1} dr d\omega \leq K_3 A^{\beta} R^{n-\alpha\beta - \frac{n\beta}{2}} \quad \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n}} < \beta < 2$$

$$\begin{aligned} \text{其次} \quad r^l &= (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{l/2} = \left[\sum_{\sum l_i = l} \frac{l!}{l_1! l_2! \dots l_n!} y_1^{2l_1} y_2^{2l_2} \dots y_n^{2l_n} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sum_{\sum l_i = l} \sqrt{\frac{l!}{l_1! l_2! \dots l_n!}} |y_1|^{l_1} |y_2|^{l_2} \dots |y_n|^{l_n} \end{aligned}$$

考虑单位球外的无穷区域上的积分

$$\begin{aligned} &\left(\int_1^{\infty} \int_{\sigma} |F r^l|^{\beta} r^{n-1} dr d\omega \right)^{1/\beta} \leq \left(\int_1^{\infty} \int_{\sigma} \left\{ \sum_{\sum l_i = l} \sqrt{\frac{l!}{l_1! \dots l_n!}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. |y_1|^{l_1} \dots |y_n|^{l_n} |F| \right\}^{\beta} r^{n-1} dr d\omega \right)^{1/\beta} \leq \\ &\leq \sum_{\sum l_i = l} \sqrt{\frac{l!}{l_1! \dots l_n!}} \left(\int_1^{\infty} \int_{\sigma} \left\{ |F| |y_1|^{l_1} \dots |y_n|^{l_n} \right\}^{\beta} r^{n-1} dr d\omega \right)^{1/\beta} = \\ &= \sum_{\sum l_i = l} \sqrt{\frac{l!}{l_1! \dots l_n!}} \left(\int_1^{\infty} \int_{\sigma} |\Phi|^{\beta} r^{n-1} dr d\omega \right)^{1/\beta} \leq K_4 A \end{aligned}$$

当 $q < \beta$ 时

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \int_\sigma |F|^q r^{n-1} dr d\omega &= \int_1^\infty \int_\sigma (|F| r^l)^q r^{n-lq-1} dr d\omega \leq \\ &\leq \left(\int_1^\infty \int_\sigma |F|^{\beta, l\beta} r^{n-1} dr d\omega \right)^{q/\beta} \left(\int_1^\infty \int_\sigma (r^{-lq})^{\frac{1}{1-q/\beta}} r^{n-1} dr d\omega \right)^{1-q/\beta} \\ &\leq K_4^{q/\beta} A^{q/\beta} \left(\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_1^\infty r^{n-1-\frac{lq\beta}{\beta-q}} dr \right)^{1-q/\beta} \end{aligned}$$

显然只須 $n-1-\frac{lq\beta}{\beta-q} < -1$ 时即当 $\frac{1}{2} < \frac{1}{q} < \frac{l}{n} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n}$ 时, 广义积分

$$\int_1^\infty r^{n-1-\frac{lq\beta}{\beta-q}} dr < +\infty.$$

同时在单位球内, 由于 $q < \beta < 2$, $F(y) \in L_q$

$$\therefore F(y) \in L_q(E_n)$$

再由 Tichmarch 定理推得 当 $\frac{1}{2} - \frac{l}{n} - \frac{\alpha}{n} < 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{q^*} < \frac{1}{2}$ 时, 恒有

$$\left(\int_{E_n} |f(x)|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{\frac{n}{q} - \frac{n}{q^*}} \|F(y)\|_{L_q}$$

即当 $2 < q^* < \frac{2n}{n-2(l+\alpha)}$ 时

$$f(x) \in L_{q^*}(E_n)$$

本文系在中国科学院数学研究所丁夏畦副研究员指导下完成的, 仅此致谢。

参 考 文 献

- [1] С. Л. Соболев Об одной теореме Функционального анализа матем. сб. т. 4. No. 3 471-496(1938)
- [2] С. Л. Соболев 泛函分析在数学物理中的应用(中译本)科学出版社。

- [3] В. П. Ильин О теореме вложения для предельного показателя ДАН 96(1954)
- [4] В. И. Коидрашов Поведение функций из L_p на Многообразиях различных размерностей ДАН 72 (1950)
- [5] С. М. Никольский О теореме вложения продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных УМН том вып 5 (101) (1961) 63-114.

A remark on the imbedding theorem

Mah Rou Nien

Abstract

Let $f(x)$ be a function in $W_2^{(l)}(E_n)$, where l is a natural number. If

$$\int_{E_n} \left| \frac{\partial^l f(x+h)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} - \frac{\partial^l f(x-h)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \right|^2 dx \leq A^2 |h|^{2\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$$

where $x+h(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)$, $\sum_{i=1}^n l_i = l$, and A is a constant not

depending on $h_1, h_2, \dots, h_n$, then we shall say that $f(x)$ possesses partial derivatives of the $l+\alpha$ -th Order with summable squares. The totality of

such functions will be denoted by $W_2^{(l+\alpha)}(E_n)$

We have the following

Imbedding Theorem: If $f(x) \in W_2^{(l+\alpha)}(E_n)$, $2 < q^* < \frac{2n}{n-2(l+\alpha)}$

then $f(x) \in L_{q^*}(E_n)$.