綫性泛函Riesz表現定理之一种形式及拟轉移函数的半群算子、无穷小算子

司 徒 荣

（数学力学系）

非負綫性泛函的积分表示曾被多人所研究过，但研究定义于任一不空集合上之任一族有界实函数 L 上之非負綫性泛函之积分表示問題，目前似仅见于[7]及[1]。本文所得的定理2.2.，包含了[1]定理2之前半部分（这里不用假設 $1\epsilon L$）①，但又不同于[7]之表现定理；并且，看来在应用上会比[7]的方便，原因是这里得到了[7]所沒有的表現測度具某种正則性及唯一性。

应用这里所得的表现定理，在§4中討論了有趣味的：正則 L—型拟轉移函数与半群算子之一一对应，及何时由无穷小算子唯一地对应一个正則 L—型拟轉移函数之問題。由于这些定理均是在可測空間（不需任何拓扑結构）上得到的，因而可能有較为广泛的应用②。

順便地，本文得到了一个測度的正則性定理（它不同于[1]之定理1，測度取値可以是 $+\infty$），及二个П.С.Александров 定理之較为一般形式，看来，它們也可能有較为广泛的应用。

另外，不同于[5][4]之 L—系，本文还引进了 L—族的概念；看来，这种概念在不少场合中应用起来都会比 L—系更为方便。

§1 几个引理

用通常測度論的方法可以証明下面的

1964年12月11日收到

① 順便在这里指出，应用这里的办法，其实可以将[1]之定理2之后半部分（因而全部）作相应的推广。因为后面不是立即用到，玆为节省篇幅見，从略。

② 例如用在 D_0 空間上，便得到了有用之具体結果（見定理4.1之推論等）

引理1.① 設 X 为一个不空集合，S 为其上之一个 σ—环，用 $\widetilde{\widetilde{S}}$ 表下面之集合 A 之全体：$A\subset X$，且凡 $B\in S$，有 $A\cap B\in S$。

对 S 上之任一测度 μ②，令

$$\widetilde{\widetilde{\mu}}(A)=\sup_{B\in S}\mu(A\cap B),\qquad \text{凡} A\in\widetilde{\widetilde{S}}。$$

我們有

1） $S\subset\widetilde{\widetilde{S}}$，且 $\widetilde{\widetilde{S}}$ 是一个 X 上之 σ－代数

2） $\widetilde{\widetilde{\mu}}$ 是 $\widetilde{\widetilde{S}}$ 上之一个測度，且 $\widetilde{\widetilde{\mu}}(A)=\mu(A)$，凡 $A\in S$

3） 若 X 上之广义实值函数 f 关于 S 为可测（即 $\{f>c\}\cap\{f\neq0\}\in S$，凡实数 c），則 f 必关于 $\widetilde{\widetilde{S}}$ 为可测（即 $\{f>c\}\in\widetilde{\widetilde{S}}$，凡实数 c）

4） 若 f 关于 S 为可测，則 $\int fd\widetilde{\widetilde{\mu}}=\int fd\mu$③（右边是关于 σ—环 S 对測度 μ 之积分，左边是关于 σ—代数 $\widetilde{\widetilde{S}}$ 对測度 $\widetilde{\widetilde{\mu}}$ 之积分）

5） 設集合班 $\underline{\mathrm{H}}\subset S$，若 $\mu(B)=\sup\{\mu(C):B\supset C\in\underline{\mathrm{H}}\}$，凡 $B\in S$，則 $\widetilde{\widetilde{\mu}}(A)=\sup\{\mu(C):A\supset C\in\underline{\mathrm{H}}\}$，凡 $A\in\widetilde{\widetilde{S}}$。

用类似于[2]之方法，可以証明下面二引理。

設 X 为任一拓扑空間，f 为 X 上之实值函数，称 f 具有紧支柱，若存在紧集 F，使 $f(x)=0$，当 $x\bar{\in}F$；記 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，若任給 $\varepsilon>0$，存在紧集 F，使 $|f(x)|<\varepsilon$，当 $x\bar{\in}F$。

記 $\hat{C}=\{f:f$ 在 X 上連續，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\}$

$\check{C}=\{f:f\in\hat{C}$，$f$ 具有紧支柱$\}$

引理 2 1） $\check{C}$ 在 $\hat{C}$ 中稠（一致收斂意义下）；且凡 $0\leqslant f\in\hat{C}$，可有 $f_n\in\check{C}$，使 $0\leqslant f_n\uparrow f$，$\|f_n-f\|\longrightarrow0$；④

2） $\hat{C}$ 在一致收斂意义下閉。

引理3 設 $\wedge(f)$ 为定义在 $\hat{C}$ 上的非負綫性泛函，則 $\wedge(f)$ 必在 $\hat{C}$ 上 σ—光滑。⑤

---

① 例如引理1中之1）与2）之証明，其方法便可参閱[10]之第十七章§1。

② 在这里，"測度"恒指：非負，可列可加，且在空集上取0为值之集函数（可以取 $+\infty$ 为值）。

③ 等式成立是指：一边有意义时，另边也有意义且相等。

④ $\|f\|$ 定义为 $\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$。

⑤ $\wedge(f)$ 称为在 $\hat{C}$ 上是 σ—光滑的，若 $f_n\in\hat{C}$，$f_n\downarrow0$，均有 $\wedge(f_n)\to0$。其实，在引理3中，我們可証得 $\wedge(f)$ 是 τ—光滑的。

利用上述的引理，我們可以有

引理4　若 X 为局部紧、Hausdorff 空間，$\wedge$ 为 $\hat{C}$ 上之非負綫性泛函，令 S_0 为全体紧 Z 集所产生之 σ—环①，$S_0 \subset \widetilde{\widetilde{S}}_0$ 为如此之 σ—代数：

$$A \in \widetilde{\widetilde{S}}_0 \Longleftrightarrow A \subset X \text{ 且凡 } B \in S_0\text{，有 } A \cap B \in S_0$$

则　在 $\widetilde{\widetilde{S}}_0$ 上必存在唯一的測度 μ，使

1)　$\wedge(f) = \int f d\mu$，凡 $f \in \hat{C}$

2)　$\mu(A) = Sup\{\mu(C) : A \supset C \text{ 为紧 } Z \text{ 集}\}$，凡 $A \in \widetilde{\widetilde{S}}_0$

3)　$\mu(C) < +\infty$，凡 C 为紧 Z 集。

〔証〕　利用[3]第十章§56.定理4及§52.定理7及这里的引理1至3不难知道，滿足1)2)3)之測度 μ 必存在。要証这样之測度 μ 是唯一的，仅需注意到空間是局部紧、全正則的，及 μ 具有性質2)3)1)，便不难得証。

§2　非負綫性泛函的积分表示及測度的正則性

在这节及以后，恒作如下假設及記号：

設 X 为任一不空集合，L 为 X 上任一族有界实函数，記

$Z^{**} = \{f^{-1}(F) : f \in L,\ F \text{ 为直綫上之閉集}\}$

$Z^{*} = \{\cup \underline{M} : \underline{M} \text{ 为 } Z^{**} \text{ 之有限子族}\}$

$\hat{Z}^{*} = \{\cap \underline{N} : \underline{N} \text{ 为 } Z^{*} \text{ 之有限或可数子族}\}$

$\hat{Z} = \{A : A \in \hat{Z}^{*}$，存在 $\varepsilon > 0$ 及不空有限子集 $L'' \subset L$，使

$$A \subset \bigcup_{f \in L''} \{|f| \geqslant \varepsilon\}\}$$

$U^{**} = \{f^{-1}(G) : f \in L,\ G \text{ 为直綫上之开集}\}$

$U^{*} = \{\cap \underline{M} : \underline{M} \text{ 为 } U^{**} \text{ 之有限子族}\}$

$\hat{U}^{*} = \{\cup \underline{N} : \underline{N} \text{ 为 } U^{*} \text{ 之有限或可数子族}\}$

$\hat{U} = \{A : A \in \hat{U}^{*}$，存在 $\varepsilon > 0$ 及不空有限子集 $L'' \subset L$，使

$$A \subset \bigcup_{f \in L''} \{|f| \geqslant \varepsilon\}\}②$$

对每 $f \in L$，取一包含 $f(X)$ 之閉区間 I_f，令 $R = \bigtimes_{f \in L} I_f$，并令 T 为这样一个由

---

① $A, B \subset X$ 分别称为 Z 集及 U 集，若分别存在有界連續函数 f, g，使 $A = \{f = 0\}$，$B = \{g \neq 0\}$。

② 在 $1 \in L$ 时，易知 $\hat{U} = \hat{U}^*$，$\hat{Z} = \hat{Z}^*$（且此时 $\hat{U}$ 便是[1]中之 $\hat{w}$）；并且，$\hat{Z} = \{A : A \text{ 之余集} \in \hat{U}\}$。

X至R内之映象：$x\in X$，$f\in L\Longrightarrow T(x)$与$f$相对应之坐标为$f(x)$。則我們可以有

引理1　$\underset{f\in L}{\times} I_f\setminus\{0\}$上全体紧$Z$集經$T$之反象便是$\hat{Z}$，全体具紧閉包之$U$集經$T$之反象便是$\hat{U}$。

〔証〕注意到$\underset{f\in L}{\times} I_f$为紧、Hausdorff空間，从而为正規空間，故不难驗証$\underset{f\in L}{\times} I_f\setminus\{0\}$上之任意紧$Z$集$F$必为$\underset{f\in L}{\times} I_f$上不含$\{0\}$点之紧$Z$集，从而由$\underset{f\in L}{\times} I_f$之Hausdorff性及开矩形成开基知，必存在包含$\{0\}$之开矩形

$$\underset{f\in L''}{\times} G_f\times(\underset{f\in L\setminus L''}{\times} I_f)$$

(其中$L\supset L''$为有限集，G_f为I_f中之开集)与F不相交。取$\varepsilon>0$，使　$(-\varepsilon,\varepsilon)_f\subset G_f$，凡$f\in L''$（其中$(-\varepsilon,\varepsilon)_f$表$I_f$中之开区間$(-\varepsilon,\varepsilon)$），便有

$$\underset{f\in L''}{\times}(-\varepsilon,\varepsilon)_f\times(\underset{f\in L\setminus L''}{\times} I_f)\cap F=\Phi,$$

故　$F\supset\underset{f\in L''}{\cup}\{((-\infty,-\varepsilon]_f\cup[\varepsilon,+\infty)_f)\times(\underset{g\in L\setminus\{f\}}{\times} I_g)\}$。最后，由于$T^{-1}(F)$必$\in\hat{Z}^*$（[1]§2引理3），便可得$T^{-1}(F)\in\hat{Z}$，凡$F$为$\underset{f\in L}{\times}I_f\setminus\{0\}$上之紧$Z$集。

反之，对任意$A\in\hat{Z}$，利用[1]§2引理3及$\hat{Z}$之定义，不难証明必存在$\underset{f\in L}{\times}I_f\setminus\{0\}$上之紧$Z$集$F$，使$A=T^{-1}(F)$眞。故得証此引理第一个結論眞，同理証其它。

現記　由$\hat{Z}$所产生之σ—环为$\hat{\zeta}^*$；　$\hat{\zeta}^*\subset\underline{\mathrm{B}}$为如此之σ—代数：

$A\in\underline{\mathrm{B}}\rightleftarrows A\subset X$，且凡$B\in\hat{\zeta}^*$，有$A\cap B\in\hat{\zeta}^*$①。

我們可以有下面的測度正則性定理。

定理2.1.②　若μ为$\hat{\zeta}^*$上之測度，且滿足

$$\mu(B)<+\infty,\ \text{凡}B\in\hat{Z}$$

則　μ可以扩張到$\underline{\mathrm{B}}$上（利用§1引理1办法），使

$$\mu(A)=sup\{\mu(B):A\supset B\in\hat{Z}\},\ \text{凡}A\in\underline{\mathrm{B}}.$$

〔証〕記S_0为$\underset{f\in L}{\times}I_f\setminus\{0\}$上由全体紧$Z$集所产生之σ—环，由引理1知$\hat{\zeta}^*=T^{-1}(S_0)$。令$\mu T^{-1}(A_1)=\mu(A)$，若$A_1\in S_0$，且$A=T^{-1}(A_1)$；則$\mu T^{-1}$便是$S_0$上之一一个測度。因为$\underset{f\in L}{\times}I_f\setminus\{0\}$为局部紧、Hausdoff空間，故按[3]第十章§52定理7，得

---

① 参看§1引理1

② 定理2.1.显然与[1]之定理1不同，这里之測度取値可以是$+\infty$，但一般来說$\hat{Z}\subset\hat{Z}^*$，故$\hat{\zeta}^*\subset\hat{\zeta}$（$\hat{\zeta}$之定义見[1]）

$$\mu T^{-1}(A_1)=sup\{\mu T^{-1}(B_1):A_1\supset B_1\text{为紧}Z\text{集}\}，\text{凡}A_1\in S_0$$

即 $$\mu(A)=sup\{\mu(B):A\supset B\in\hat{Z}\}、\text{凡}A\in\hat{\zeta}^*$$

再由引理1（§1），便得証此定理眞。

下面討論L上非負綫性泛函之积分表示問題。

定理2.2. 若函数族L是一个代数，且$\overline{L}=L$，設$\wedge$为L上之非負、σ—光滑綫性泛函，則在$\underline{B}$上必存在唯一的測度μ，滿足：

1）$\wedge(f)=\int fd\mu$，凡$f\in L$

2）$\mu(A)=sup\{\mu(B):A\supset B\in\hat{Z}\}$，凡$A\in\underline{B}$

3）$\mu(A)<+\infty$，凡$A\in\hat{Z}$ ① 。

〔注〕 此定理显然包含了[1]定理2之a)。事实上，$1\in L$时，[1]的定理2之a)不妨直接假設L也滿足$\overline{L}=L$(这由[1]§3引理2知是可以的)，这时，它便明显地被含在此处定理中。又，[7]附录中也有一表現定理，但它假設不同，且它沒能象这里那样得到表現測度具有某种正則性及唯一性。

〔証〕 符号R及由X至R內之映象T意义同上。对R上任意函数F，令$F^*(x)==F(T(x)),x\in X$。記P_0为R上全体不含非零常数項之多項式，$\hat{C}$为R上全体滿足$F(0)=0$之連續实函数。显然P_0是一个代数，滿足函数分离性及$p(0)=0$，凡$p\in P_0$。故由Stone－Weierstrass定理（[6]$4E.pp9$)得$\overline{P}_0=\hat{C}$；故$L=\overline{L}==\overline{P_0^*}\supset\hat{C}^*$。② 故可令$\wedge^*(F)=\wedge(F^*)$，凡$F\in\hat{C}$；易知$\wedge^*$是$\hat{C}$上非負綫性泛函。由于$R\setminus\{0\}$是局部紧、Hausdorff空間，$\hat{C}$可看成其上滿足$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0$之連續函数$F$之全体，故据§1引理4知，在$\tilde{S}_0$上存在唯一的測度$\nu$，滿足：

(1) $\wedge^*(F)=\int Fd\nu$，凡$F\in\hat{C}$

(2) $\nu(B)=sup\{\nu(C):B\supset C\text{为紧}Z\text{集}\}$，凡$B\in\tilde{S}_0$

(3) $\nu(C)<+\infty$，凡C为紧Z集。

現往証在$R\setminus\{0\}$上集合$R\setminus\{0\}\setminus T(X)$之$\nu$—內測度为零。为此，仅需証：凡$R\setminus\{0\}$上之紧$Z$集$C$、滿足$T(X)\cap C=\phi$、則$\nu(C)=0$。事实上，由$R\setminus\{0\}$之局部紧性及全正則性，必有$F_n\in\hat{C},0\leqslant F_n\downarrow\chi_c$，从而$F_n{}^*\downarrow\chi_c{}^*=0$。因为$\wedge$在$L$上$\sigma$

---

① 这里，L是一个代数，指滿足：$f,g\in L\Longrightarrow fg\in L,\alpha f+\beta g\in L$，对任实数$\alpha,\beta$眞。$\overline{L}$表L在全体有界实函数中之一致閉包。$\wedge$在L上$\sigma$一光滑，指滿足：凡$f_n\in L,f_n\downarrow 0$，則$\wedge(f_n)\to 0$。

② $\overline{P}_0$表P_0在全体有界实函数(定义在R上)中之一致閉包，余类似。P_0^*表函数族$\{P^*:P\in P_0\}$等。

一光滑，故$\wedge(F_n^*)\downarrow 0$。即$0=\lim\limits_{n\to+\infty}\wedge(F_n^*)=\lim\limits_{n\to+\infty}\wedge^*(F_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\int F_n d\nu$

$=\int \chi_c d\nu=\nu(C)$。

现对任意$A\in\hat{\zeta}^*$，令$\mu(A)=\nu(B)$，其中$B\in S_0$，$T^{-1}(B)=A$；則由上可知μ之定义不含混，且

滿足　2）$\mu(A)=sup\{\mu(B): A\supset B\in\hat{Z}\}$，凡$A\in\underline{B}$

3）$\mu(B)<+\infty$，凡$B\in\hat{Z}$。

且凡$p\in P_0$，$\wedge^*(F)=\wedge(F^*)=\int Fd\nu=\int F^*d\mu$眞。特别地，对$f\in L$，取$F$为点$y\in R$在$f$坐标上之投影函数，便得$\wedge(f)=\wedge(F^*)=\int F^*d\mu=\int fd\mu$眞。即1）$\wedge(f)$

$=\int fd\mu$，凡$f\in L$眞。

最后，利用上述S_0上之表現測度ν之唯一性①，不难知測度μ限制在$\hat{\zeta}^*$上是唯一的，再根据正則性条件2），便可知定义在$\underline{B}$上滿足1）2）3）之測度μ也是唯一的。

§3　綫性泛函积分表示应用之一：П. С. Александров 定理②

此处一切記号同§2。

定理 3.1.　若函数族L是一个代数，且$\overline{L}=L$，又設μ_α为$\underline{B}$上之一个測度定向列，使

1°　$\int fd\mu_\alpha$凡$f\in L$均有意义，且$\lim\limits_{\alpha}\int fd\mu_\alpha$存在有限，凡$f\in L$

2°　$\int fd\mu_\alpha$在L上对α是一致σ—光滑的（即：任取$f_n\in L$，$f_n\downarrow 0$，有$\lim\limits_{n\to+\infty}\int f_n d\mu_\alpha=0$，对$\alpha$一致）；

則在$\underline{B}$上必存在唯一的測度μ，使

1）　$\lim\limits_{\alpha}\int fd\mu_\alpha=\int fd\mu$，凡$f\in L$

① 由定义知（見§1引理1），$S_0\subset\tilde{S}_0$。

② 〔8〕中曾有反例指出：在拓扑空間中，关于全体有界連續函数的П.С.Александров定理，对于有限測度之定向列是未必眞的，这里，給出了一种使对測度定向列定理也眞的較为广泛之充分条件。本节思想曾受郑曾同教授之启发。

2) $\mu(A)=sup\ \{\mu(B): A\supset B\in\hat{Z}\}$ 凡，$A\in\underline{B}$

3) $\mu(B)<+\infty$，凡 $B\in\hat{Z}$

〔証〕 令$\wedge(f)=\lim\limits_{\alpha}\int fd\mu_{\alpha}$，不难驗証$\wedge$是$L$上之非負綫性、$\sigma$—光滑泛函，然后利用§2.定理2.2.，便得証。

利用定理3.1，易得

定理3.2. 将定理3.1.中之条件1°，2°换成下面的

(1) 存在$M>0$，及α_1，使$\alpha>\alpha_1\Longrightarrow\mu_{\alpha}(X)\leqslant M$；

(2) 任給$\varepsilon>0$ 存在$B\in\hat{Z}$，使 $\mu_{\alpha}(X-B)<\varepsilon$，凡$\alpha$；

(3) $\lim\limits_{\alpha}\int fd\mu_{\alpha}$ 存在有限，凡$f\in L$，

则定理3.1.之結論仍眞。

§4　拟轉移函数与半群算子、无穷小算子

一切記号同§2，并設 $x_0\in X\Longrightarrow\{x_0\}\in\underline{B}$。

定义1　称$P(s,x,t,\Gamma)$ $0\leqslant s\leqslant t$，$x\in X$，$\Gamma\in\underline{B}$为一个正則L—型拟轉移函数，若滿足

$P.1°$　$p(s,x,t,\Gamma)$ 是 $\Gamma\in\underline{B}$ 上之測度

$P.2°$　$p(s,x,t,\Gamma)<+\infty$ 凡 $\Gamma\in\hat{Z}$

$P.3°$　$p(s,x,t,\Gamma)$ 是$x\in X$之$\underline{B}$—可測函数

$P.4°$　$\int_X f(y)p(s,x,t,dy)\in L$，凡$f\in L$，$0\leqslant s\leqslant t$，$x\in X$

$P.5°$　$p(s,x,s,X\setminus x)=0$，凡$x\in X$，$s\geqslant 0$

$P.6°$　$p(s,x,u,\Gamma)=\int_X p(s,x,t,dy)p(t,y,u,\Gamma)$，凡$0\leqslant s\leqslant t\leqslant u$，$x\in X$，$\Gamma\in\underline{B}$

$P.7°$　$p(s,x,t,\Gamma)=Sup\{p(s,x,t,B):\Gamma\supset B\in\hat{Z}\}$，凡$\Gamma\in\underline{B}$，$0\leqslant s\leqslant t$，$x\in X$ ①

定义2.　称X上之实値函数族$\underline{H}$为L—族，若

1°　$0\leqslant f,g\in\underline{H}$，$0\leqslant\alpha,\beta<+\infty\Longrightarrow\alpha f+\beta g\in\underline{H}$

2°　$0\leqslant f_n\in\underline{H}$，$f_n\uparrow f$，$f$为实値$\Longrightarrow f\in\underline{H}$

3°　$0\leqslant f_n\in\underline{H}$，$|f_n|\leqslant g\in L$，$f_n\to f\geqslant 0\Longrightarrow f\in\underline{H}$（此处$L$为預先給定的任一族有界实函数）

---

① P.7°不滿足时，称作L—型拟轉移函数，若再有 P.4° 不滿足，但另外滿足 P′.4° $\int_X f(y)p(s,x,t,dy)$有限，凡$f\in L$.则称之为拟轉移函数。

定义3. 設L为X上任一族有界实函数，称可测空間$(X,\underline{B})$为L一型空間，①若
L一族 $\underline{H}\supset L\Longrightarrow\underline{H}\supset$ 全体非負$\underline{B}$一可测实函数。

定理4.1 設L为X上任一族有界实函数，若L是一个代数，且$\overline{L}=L$；又設$(X,\underline{B})$是一个L一型空間，則将L射入L之綫性算子族$T_{s,t}(0\leqslant s\leqslant t)$是某唯一的正則$L$一型拟轉移函数$p(s,x,t,\Gamma)$所对应的半群算子之充要条件是：② $T_{s,t}$满足

$T.1°$　$T_{s,u}f=T_{s,t}T_{t,u}f$，凡$f\in L$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant u$

$T.2°$　$T_{s,t}f\geqslant 0$，凡$0\leqslant f\in L$，$0\leqslant s\leqslant t$

$T.3°$　$T_{s,s}f(x)=\alpha(s,x)f(x)$，凡$f\in L$，$x\in X$（其中$\alpha(s,x)$为二元实函数$0\leqslant s$；$x\in X$）

$T.4°$　$f_n\in L$，$f_n\downarrow 0$，則$T_{s,t}f_n\to 0$，凡$0\leqslant s\leqslant t$

〔証〕 必要性由定义出发得証。此时，甚至不需設$\overline{L}=L$及$(X,\underline{B})$为L一型空間，也不需設$p(s,x,t,\Gamma)$为正則的及L一型的，只要$p(s,x,t,\Gamma)$是拟轉移函数（参閱pp153脚注）便真。充分性之証明利用§2定理2.2.及L一型空間之設不难得証。兹从略。

〔注〕 L一型空間是很广泛的。

例如：取拓扑可测空間$(E,\underline{C},\underline{B})$为$D_0$空間③，$L=C=${全体有界連續可测实函数}、則$(E,\underline{B})$便是一个$L$一型空間。（記作：$(E,\underline{C},\underline{B})$是$D_0$空間）

为此，仅需証：$\underline{H}\supset L$，$\underline{H}$为L族$\Longrightarrow\underline{H}\supset$全体非負$\underline{B}$一可测实函数。

事实上，記使$\chi_\Gamma\in\underline{H}$之全体$\Gamma$为$M$，易知$M$为一个单調班。令$N=${全体可测$U$集、可测$Z$集及可测$U$集与可测$Z$集之交集}，易知$N$是一个半环④，且$E\in N$。由$D_0$空間之設，易証凡$A\in N$，必有$0\leqslant f_K\in L$，$f_K\leqslant 1$，$f_K\to\chi_A$。故$\chi_A\in\underline{H}$，亦即，单調班$M\supset N$。注意到$N$中集合不相交之并之全体成一个代数，故$M\supset$由$N$所产生之代数，从而$M\supset$由$N$所产生之$\sigma$一代数$=\underline{B}$。最后，由$\underline{H}$对非負綫性运算及单調上升极限之封閉性，便知$\underline{H}\supset$一切非負之$\underline{B}$一可测实函数。故得証$(E,\underline{B})$是一个$L$一型空間。⑤

推論 若$(E,\underline{C},\underline{B})$是$D_0$空間，則将$C$射入$C$之綫性算子族$T_{s,t}$ $(0\leqslant s\leqslant t)$是某唯一的Feller型轉移函数所对应之半群算子之充要条件是⑥：$T_{s,t}$满足$T.1°$一

① 注意：这里字母$\underline{B}$是专用的，前面（§2）已給出了它的定义。

② 若 $T_{s,t}f(x)=\int_X f(y)p(s,x,t,dy)$，凡$f\in L$；則称$T_{s,t}$为$p(s,x,t,\Gamma)$所对应之半群算子。

③ 称$(E,\underline{C},\underline{B})$为$D_0$空間，若$\underline{B}=$全体可测U集所产生之$\sigma$一代数。此处$\underline{C}$表拓扑。

④ 称非空集合班$\underline{P}$为半环，若$A,B\in\underline{P}\Longrightarrow A\cap B\in\underline{P}$；且$A,B\in\underline{P}$，$A\supset B$时，有$A\setminus B=\bigcup_{K=1} C_K$，其中$C_K\in\underline{P}$，且互不相交。

⑤ 有趣的是，此处的L一族与〔5〕所引入的L系不同，但当論及相加之积分会出現$+\infty$时，比L一系更易构成，这在定理4.1或4.2証明中都可看見。

⑥ Feller型轉移函数之定义見[1]第4章及第5章。

$T.4^\circ$ 及 $T.5^\circ$　$\|T_{s,t}f\|\leqslant\|f\|$，凡$f\in L=C$ 。

下面討論拟轉移函数与无穷小算子之对应。

定理4.2. 設 $(X,\underline{B})$ 是 L—型空間，有界实函数族 L 是一个代数，且 $\overline{L}=L$，若 A 是射入 L 之綫性算子，且滿足：

$A.1^\circ$ 算子定义域 D_A 在 L 中稠

及存在$0<\lambda_n\uparrow+\infty$，使

$A.2^\circ$ 对任 $g\in L$，$\lambda_n f-Af=g$ 有解 $f\in D_A$

$A.3^\circ$ $\|\lambda_n f-Af\|\geqslant\lambda_n\|f\|$，对任 $f\in D_A$ 眞

$A.4^\circ$ $g\in L, g\geqslant 0$，則 $(\lambda_n-A)^{-1}g\geqslant 0$①

$A.5^\circ$ $f_K\in L, f_K\downarrow 0$，則 $\lim\limits_{k\to+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty}e^{tA_{\lambda_n}}f_K(x)=0$，凡$x\in X$（其中$e^{tA_{\lambda_n}}f_K(x)$

$$=\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-t\lambda_n}\frac{(t\lambda_n{}^2R_{\lambda_n})^l}{l!}f_K(x)\text{②}，R_{\lambda_n}=(\lambda_n-A)^{-1}）,$$

則必在$(X,\underline{B})$上存在唯一的L—型齐次拟轉移函数 $P(t,x,\Gamma)$，$0\leqslant t$，$x\in X$，$\Gamma\in\underline{B}$③，以 A 为其无穷小算子（即 $Af=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{T_tf-f}{t}$，凡$f\in D_A$，此处极限是依范数极限。其中$T_tf(x)=\int_X f(y)P(t,x,dy,)$）；且它所对应之半群 T_t，滿足 $\|T_tf\|\leqslant\|f\|$，凡$f\in L$ 。

〔注〕条件$A.5^\circ$乍一看来似乎很难滿足，但其实，只要条件$A.1^\circ$被滿足，則它便是一个必要条件（这点可由拟轉移函数所对应之半群 T_t必具有σ—光滑性，及由 *Hille—yorsida* 定理所决定之半群必是唯一的，且等于 $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{tA_{\lambda_n}}f$，凡$f\in L$；知）。

并且，在下面任一情形，$A.5^\circ$均能被滿足：

1）X是紧拓扑空間，$L=\{$全体連續函数$\}$

2）X为任意拓扑空間，$L=\hat{C}=\{$全体連續函数f，滿足 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$者$\}$

3）X为任意不空集合，L为任意一族有界实函数，但有

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}e^{tA_{\lambda_n}}f_m=\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}e^{tA_{\lambda_n}}f_m，凡f_m\in L，f_m\downarrow 0\ 眞。$$

現往証定理4.2.眞 。

---

① 由A.2°，A.3° 易知逆算子（λ_n-A）$^{-1}$是单值地存在的。

② 級数收斂是在 Banaeh 空間之收斂，即依范数收斂。

③ 若 $P(s,x,t,\Gamma)=P(0,x,t-s,\Gamma)$，凡 $0\leqslant s\leqslant t$，$x\in X$，$\Gamma\in\underline{B}$ 眞，則称它是齐次的，且記 $P(t-s,x,\Gamma)=P(0,x,t-s,\Gamma)$ 。

〔証〕1)由 $Hille-yorsida$ 定理(见[4]定理1.4., pp50—54)知，存在半群 T_t ($\|T_tf\| \leqslant \|f\|$，凡 $f \in L$)，$t \geqslant o$，将 L 射入 L，且滿足 $\lim\limits_{t \to 0+} T_tf = T_of = f$①，使以 A 为其无穷小算子，且 T_t 是唯一的②。往証 $f \geqslant 0$，$f \in L \Longrightarrow T_tf \geqslant 0$。事实上，由設 $f \geqslant 0 \Longrightarrow R_{\lambda_n}f \geqslant 0$，故 $e^{tA_{\lambda_n}}f = e^{-t\lambda_n}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(t\lambda_n^2R_{\lambda_n})^K}{k!}f \geqslant 0$，从而

$T_tf = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{tA_{\lambda_n}} f \geqslant o$。

2)由 $A.5°$ 还可知，当 $0 \leqslant t$ 及 $x \in X$ 固定时，$T_tf(x)$ 还是 $f \in L$ 上之 σ－光滑之綫性泛函，故由定理2.2.，便知在 $\underline{B}$ 上存在唯一的測度 $P(t,x,\Gamma)$ $0 \leqslant t, x \in X$，$\Gamma \in \underline{B}$，使 $T_tf(x) = \int_X f(y)p(t,x,dy)$，凡 $f \in L$；$P(t,x,\Gamma) = sup\{p(t,x,F): \Gamma \supset F \in \hat{Z}\}$，凡 $\Gamma \in \underline{B}$ 及，

$P(t,x,F) < +\infty$，凡 $F \in \hat{Z}$ 眞。合 $P(s,x,t,\Gamma) = P(t-s,x,\Gamma)$，凡 $0 \leqslant t \leqslant s$，$x \in X$，$\Gamma \in \underline{B}$，往証它是 L－型拟轉移函数。易知其它均显然，仅需驗証 $P.3°$ 及 $P.5$，$P.6°$ 眞。先証 $P.3°$ 及 $P.6°$：記 $\underline{H}$ 为使

a) $\int_X f(y)\,P(t,x,dy)$ 是 $x \in X$ 之 $\underline{B}$－可測实函数，凡 $t \geqslant 0$，

b) $\int_X P(s,x,dy)\int_X f(z)P(t,y,dz) = \int_X f(z)P(s+t,x,dz)$，凡 $0 \leqslant s, t$，$x \in X$

成立之 $\underline{B}$－可測实函数 f 之全体。易知 $\underline{H}$ 成一个 L－族，且 $\supset L$；故 $\underline{H} \supset$ 全体非負 $\underline{B}$－可測实函数。特别地，$\Gamma \in \underline{B}$ 时，$f(x) = \chi_\Gamma(x) \in \underline{H}$，得証 $P.3°$ 及 $P.6°$ 眞。再証 $P.5°$：由 $Hille-yorsida$ 定理，得 凡 $f \in L$

$$f(x) = T_of(x) = \int_X f(y)P(o,x,dy),$$

記 $\underline{H}$ 为使上式成立之 $\underline{B}$－可測实函数 f 之全体，易知 $\underline{H} \supset L$，且是一个 L－族，故 $\underline{H} \supset$ 全体非負 $\underline{B}$－可測实函数。特别地，令 $f(x) = \chi_{X \setminus \{x_o\}}(x)$，对任 $x_o \in X$；便可得 $0 = \chi_{X \setminus \{x_o\}}(x_o) = \int \chi_{X \setminus \{x_o\}}(y)P(o,x_o,dy)$，即 $P(o,x_o,X \setminus \{x_o\}) = 0$ 眞，定理得証。

除了条件 $A.1°$ 外，容易見到若 A 是某正則 L－型拟轉移函数之无穷小算子，則A.2°－A.4°均是 A 所需要滿足的必要条件。③至于 A.1° 何时将仍成为必要条

① 此处极限，均是指依范数极限。

② 見[9]中譯本PP116.

③ 并且 A.1。眞时，A.5。也隨着眞 。

件，这个我們将在另文中加以討論，在此不再贅述。

最后，如同定理4.1.一样，容易得到各种有关具体空間之推論，茲从略。

本文得到梁之舜付教授热情启发指导，謹在此致以最衷心的謝意。

参 考 文 献

〔1〕 郑曾同“綫性泛函的积分表示及测度的弱收斂”中山大学学报 1962，4. pp32－41

〔2〕 V.S.Varadarajan “On a theorem of F.Riesz concerning fhe form of linear functionals” Fund. Math.46(1958)pp209－220

〔3〕 P.R. Halmols“Measure Theory” 1950（中譯本： 王建华譯“测度論”科学出版社）

〔4〕 E.Б.Дынкин “Марковские процессы”1963

〔5〕 E.Б.Дынкин“Основания теории Марковских процессов” 1959（中譯本:王梓坤譯“馬尔科夫过程理論基础”科学出版社）

〔6〕 L.H. Loomis：An introduction to abstract harmonic analysis” 1953

〔7〕 伊藤清“确率論” 1952（中譯本：刘璋温譯“概率論”科学出版社）

〔8〕 V.S.Varadarajan “Меры на топологических пространствах”，Матем.сборник 55(97) (1961)pp35－100(其中 П.С.Александров 定理见pp68定理19)

〔9〕 伊藤清“确率过程”1957（中譯本：刘璋温譯“随机过程”上海科学技术出版社）

〔10〕 И.П.Натансон“Теория функций вещественной переменной” 1957（第二版）（中譯本：徐瑞云譯“实变函数論”人民教育出版社）

A Form of Riesz Representation of Linear Functionals And The Semi-groups, Infinitesimal Operators of the Markov Pseudo-transition Functions

Stu yung

Abstract

Let X be a nonempty set, L be a family of bounded real-valued functions on it. Set

$$Z^{**}=\{f^{-1}(F):F \text{ is a closed set in the straight line, } f\in L\}$$

$$Z^{*}=\{\cup M:M \text{ is a finite subclass of } Z^{**}\}$$

$$\hat{Z}^{*}=\{\cap N:N \text{ is a finite or countable subclass of } Z^{*}\}$$

$$\hat{Z}=\Big\{A:A\in\hat{Z}^{*}, \text{ there exists } \varepsilon>0 \text{ and nonempty finite subclass } L''\subset L \text{ such that } A\subset\bigcup_{f\in L''}\{|f|\geqslant\varepsilon\}\Big\},$$

and let $\hat{\zeta}^{*}$ be the σ-ring generated by $\hat{Z}$, Let $\underline{B}$ be the set-class of all A such that

$A\subset X$, and $B\in\hat{\zeta}^{*}\Longrightarrow A\cap B\in\hat{\zeta}^{*}$.

Evidently, $\underline{B}$ is a σ-algebra and $\underline{B}\supset\hat{\zeta}^{*}$

we have

Theorem. Let L be an algebra and $\overline{L}=L$ ($\overline{L}$ denotes the uniform closure of L). Let $\wedge$ be a nonnegative linear functional on L. If $\wedge$ is σ-smooth, then there exists an unique measure μ on $\underline{B}$ such that①

1) $\wedge(f)=\int f d\mu,\ f\in L$

2) $\mu(A)=\sup\{\mu(B):A\supset B\in\hat{Z}\},\ A\in\underline{B}$

3) $\mu(B)<+\infty,\ B\in\hat{Z}$.

By means of this theorem we have considered: the one-to-one corresponding relation between a semi-group $T_{s,t}$ and a regular L—form pseudo-transition function, and find condictions of which an infinitesimal operator how to correspond to a unique regular L-form pseudo-transition function.

① We say that μ is a measure, if μ satisfies $\mu(\Phi)=0$, μ is nonnegative and countably additive.