

在相平面上微分方程組的某一类奇点

徐 詒

关于微分方程組:

$$\frac{dx}{dt} = y + X(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \quad (1)$$

在原点的邻域的性质, A. M. Ляпунов [1] 早已就其个别情形作了研究。这里 X, Y 为解析函数, 起始项至少为二次, 原点为孤立奇点。A. Ф. Андреев [2] 曾作相图綫的詳尽研究, 他的工作是根据 M. Frommer 方法利用密切抛物綫作軌綫的逼近图貌 (除了在 [2] стр 54 当 $d=0$ 处用 Ляпунов 結果作图)。在这工作中还可决定寻常例外方向及奇异例外方向, 沿着这些方向有有限多条或无穷多条軌綫趋向原点。从工作 [2] 中得知 Н. Б. Хаимов [3] 也曾同时在同时采用类似的方法研究过这个问题, 获得同样的图貌。这是此項研究的一方面。

另一方面, S. Barocio [4] 根据如下的方程組:

$$\frac{dx}{dt} = -Y(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = y + X(x, y) \quad (2)$$

与組(1)互为正交, 但組(2)已为 I. Bendixon [5] 詳尽研究, 已經有了經典的結果, 因此組(1)可以从正交作图立即决定。故工作 [4] 在所謂 “mod fan” 条件下, 开列出可能的七种图貌, 其中由 S. Lefschetz [6] 帮助他証明只能有一种特殊的橢圓域存在。此方法比較用 Frommer 方法为簡, 亦无須涉及 [1] 的結果, 但 [4] 还需作如下补充。

本文將根据工作 [4] 中的 Γ_V, Γ_H 办法, 用另一种簡單方法作图, 由这种方法立即可得 [6] 的結果, 并証明以下两个命題*

定理 1 微分方程組(1)的介乎两个双曲域之間, “fan” 不存在 (即只能有一条 0-曲綫作为分界綫)

定理 2 微分方程組(1)不可能有結点如 [4] 中 Plate II, B II 4 之形 (即本文图 3 及其对 x 軸, y 軸和原点的反射)

現在我們先作組(1)的一切可能的相图。对組(1)作变换: $x \rightarrow x, x+y \rightarrow y$ 得

$$\frac{dx}{dt} = y - x + \bar{X}(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = y - x + \bar{Y}(x, y) \quad (3)$$

* 这两个命題是胡金昌教授提出的, 且指出其解决途径, 本文是在他的直接指導下完成的。謹致謝意。

其中 $\bar{X}, \bar{Y}$ 与 X, Y 具有同样的性质。根据魏尔斯特拉斯预备定理有:

$$\left. \begin{aligned} y-x+\bar{X}(x,y) &\equiv (y-x-A(x))E_1(x,y) \\ y-x+\bar{Y}(x,y) &\equiv (y-x-B(x))E_2(x,y) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 A, B, E_1, E_2 为解析函数, $A, B=[x]_2, A \neq B, E_i(0,0)=1$

因此在原点的足够小的邻域内, 組(3)的軌綫之鉛直切綫和水平切綫的切点軌跡 Γ_V, Γ_H 分别为:

$$\Gamma_V: y-x-A(x)=0 \quad \Gamma_H: y-x-B(x)=0$$

例外方向直綫 L 为: $y-x=0$

Γ_V, Γ_H 把原点的邻域划分为四个扇形, 在每个扇形内 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 是定号的, 因此軌綫在每一个扇形内是单调变化的。

由 Bendixon [5] 的理論我們知道, 趋于原点的軌綫或是螺旋迫近它, 或是沿着确定的方向(例外方向)趋于它。

我們將根据上述两个事实作图。这个方法只用到 Γ_V, Γ_H 和 L , 同时我們只是研究原点的足够小的邻域内的相图, 因此可以把 E_i 略去, 其 Γ_V, Γ_H 和 L 不变。于是变为对較简单的方程組:

$$\frac{dx}{dt} = y-x-B(x) \quad \frac{dy}{dt} = y-x-B(x) \quad (5)$$

的研究。为了方便起见, 我們对組(5)再作变换: $x \rightarrow x, y-x \rightarrow y$ 得:

$$\frac{dx}{dt} = y-A(x) \quad \frac{dy}{dt} = A(x)-B(x) \quad (6)$$

即回到組(1)的坐标系。在原点的足够小的邻域内, 組(6)有:

$$\Gamma_V: y-A(x)=0 \quad \Gamma_H: x=0 \quad L: y=0$$

現在我們来研究組(6)在原点的足够小的邻域内的相图, 这里立即可得[6]的結果。即如果有橢圓域存在必与 y 軸相交, 因为 Γ_H 是 y 軸。

令 $g(x) \equiv A(x)-B(x) \equiv x^k G(x), G(0) \neq 0$ 。根据 k 为奇数或偶数分下列四种情形来討論。

I. $xg(x) < 0$

(a) Γ_V 在 x 軸之上。則从 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 的符号知道, 軌綫可能如图 1: 原点邻域由一个橢圓域, 一个双曲域和抛物域組成。也可能如图 2: 原点为中心或焦点。

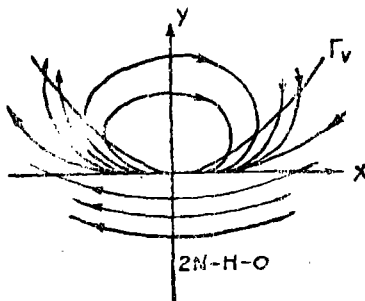


图 1

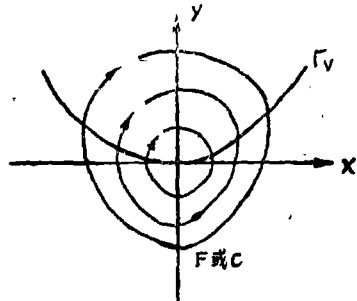


图 2

(b) Γ_V 在 x 軸之下。即情形(a)对 x 軸作反射。

(c) Γ_v 穿过第一和第三象限。則軌綫可能如图 3 或它对原点的反射：即結点域。我們將要証明不可能有这种結点域（定理 2）。也可能如图 4：即普通的結点域。还可能为中心或焦点。

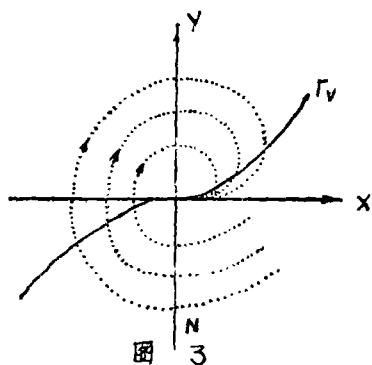


图 3

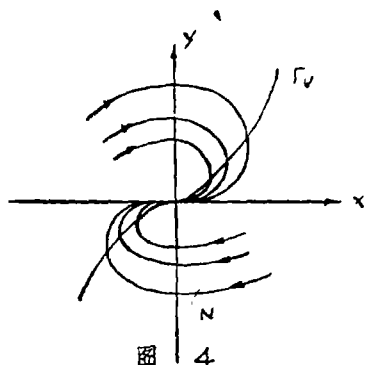


图 4

(d) Γ_v 穿过第二和第四象限。即情形 (c) 对 y 軸作反射。

因此对于 $xg(x) < 0$ 的情形可能的图貌为（图 1, 2, 4）和它們对 x 軸或 y 軸的反射。对于其余三种情形用同法分析我們得到：

II. $g(x) < 0$. (图 5, 6) 和它們对 x 軸的反射。

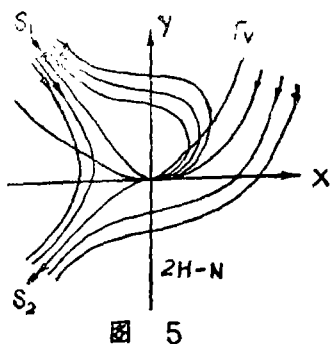


图 5

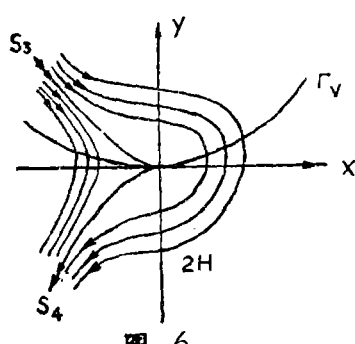


图 6

III. $xg(x) > 0$ (图 7)

IV. $g(x) > 0$. 即情形 II 对 y 軸的反射。

定理 1 的証明 在左半平面，只当 $g(x) < 0$ 时才出現双曲域，图中的 S_i 表示两个双曲域之間的一条分界綫。我們的問題是要証明代替各 $S_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 不可能出現“fan” 即是說两个双曲域之間不可能有无穷多条軌綫趋向原点或从原点离开。例如假設 S_1 处有“fan” 存在。設 $y_1(x), y_2(x) = y_1(x) + \epsilon(x)$ 为对应的两支 0-曲綫， $\epsilon(x) > 0$ 。因为 $y_1(x)$ 滿足方程：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{y-A(x)} \quad (7)$$

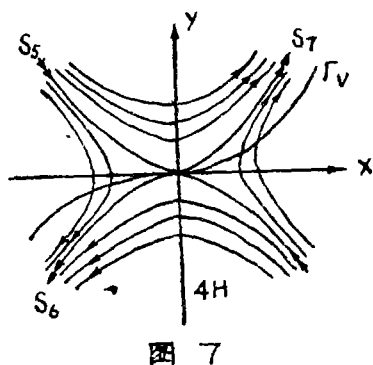


图 7

故
$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{g(x)}{y-A(x)} \right]_{y=\bar{y}} = -\frac{\varepsilon g(x)}{(\bar{y}-A)^2}$$

其中 $y_1(x) < \bar{y} < y_2(x)$.

因为 $g(x) < 0$, 所以 $\frac{d\varepsilon}{dx} > 0$, 即 ε 单调上升. 故此 $0 < \varepsilon(x_0) < \varepsilon(x)$, 当 $x_0 < x < 0$ 时.

因而 $\lim_{x \rightarrow 0-} \varepsilon(x) \geq \varepsilon(x_0) > 0$, 这和 $x \rightarrow 0$ 时 $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ 的假设矛盾, 对于其余的 $S_i (i=2, 3, \dots, 6)$ 依同理可证.

在右半平面的情形, 刚好与左半平面的情形相差一个符号, 即只当 $g(x) > 0$ 时才出现双曲域, 依同理可证得:

$$\frac{d\varepsilon}{dx} < 0$$
, 即 ε 单调下降, $0 < \varepsilon(x_0) < \varepsilon(x)$ 当 $0 < x < x_0$ 时. 故 $\lim_{x \rightarrow 0+} \varepsilon(x) \geq \varepsilon(x_0) > 0$,

同样和 $x \rightarrow 0$ 时 $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ 的假设矛盾. 因此“fan”不存在.

定理 2 的证明 如果图 3 型结点存在, 此时 $xg(x) < 0$, 但 $g(x) \equiv A(x) - B(x) = [x]_2$. 故 $g(x) = -bx^{2m+1} \bar{E}_1(x)$, $b > 0$. $\bar{E}_1(0) = 1$, m 为正整数.

在图 3 的情形 $A(x) > 0$, 当 $x > 0$ 时. 因此 $A(x) = ax^n \bar{E}_2(x)$, $a > 0$ $\bar{E}_2(0) = 1$. n 为正整数.

略去 $\bar{E}_i$, 把组(6)的等号改为 $\doteq$ 得:

$$\frac{dx}{dt} \doteq y - ax^n \quad \frac{dy}{dt} = -bx^{2m+1} \quad (8)$$

即变成证明组(8)没有图 3. 我们用归谬法证之. 假设(8)有图 3 如果 n 为奇数, 则作变换 $x = -x_1$, $y = -y_1$. 此时组(8)仍然不变. 因此在 (x_1, y_1) 平面的第一象限有轨线沿 x_1 轴趋于原点, 即在 (x, y) 平面的第三象限有轨线沿 x 轴趋于原点. 这和图 3 不符.

如果 n 为偶数, 则作变换 $x = -x_1$, $t = -t_1$, 组(8)仍然不变, 故在 (x_1, y) 平面的第一象限有轨线当 $t_1 \rightarrow +\infty$ 时沿 x_1 轴趋于原点. 即在 (x, y) 平面的第二象限有轨线当 $t \rightarrow -\infty$ 时沿 x 轴趋于原点, 同样和图 3 不符.

对于图 3 关于 x 轴, y 轴和原点反射的情形依同理可证. 因此图 3 型之结点不存在.

总结上面所述, 我们得到组(1)只有六种类型的相图(如下表), 它们关于 x 轴, y 轴, 或原点的反射我们看作是同一类型. 对应的指标(index)可用 Bendixon 公式计算:

$$\text{ind } 0 = 1 + \frac{\nu - \sigma}{2}$$

其中 ν 为椭圆扇形个数, σ 为双曲扇形个数.

指 标	类 型	图 形	对应 Bendixon 組
+ 1	2N-H-O	图 1	N
	F 或 C	图 2	N
	N	图 4	N
0	2H-N	图 5	2H-N
	2H	图 6	2H-N
- 1	4H	图 7	4H

这里 N, H, O, F 和 C 分别表示结点域, 双曲域, 椭圆域, 焦点和中心。

参 攷 文 献

- [1] Ляпунов. А. М Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения Собр сочинений II.
- [2] Андреев. А. Ф. Исследование поведения. интегральных кривых одной системы двух дифференциальных уравнений В окрестности особой точки Вестник Ленинградского Университета 1955 No 8 стр 43--55.
- [3] Хаимов. Н. Б ОБ уравнениях, В правых частях которых имеются линейные члены Уи Зап Сталинабад пед ин-та 2 1952.
- [4] Barocio. S. On certain critical points of a differential system in the plane Contributions to non-linear oscillations III 1956 pp 127-135.
- [5] Bendixon. I Sur les courbes definies par des équations differentielles Acta Math 24 (1901).
- [6] Lefschetz. S On the critical points of a class of differential equations Contributions to non-linear oscillations, IV 1958 pp 19.