二阶常系数綫性椭圓型微分方程組的若干边界問題

吴 偉 良

（数学力学系）

摘 要

二阶常系数綫性椭圓型微分方程組的若干边界問題。

本文研究已化成标准型的常系数綫性椭圓型微分方程組

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \lambda-1\\\lambda-1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0$$

的两种边界問题（見本文§2、§3）的解的存在性及唯一性。

§1 引 言

設 $A\ B\ C$ 代表三个二行二列的实数方陣、則

$$A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0$$

表示二阶两个自变数 x、y，两个未知函数 $u\ v$ 的偏微分方程組。当它的特征四次型

$$Q(\xi\ \eta)=|A\xi^2+B\xi\eta+C\eta^2|$$

有一对复重根时，它經过自变数的綫性变换，函数的綫性变换及方程間的綫性組合等可化为如下的标准型。[1]

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & \frac{\lambda-1}{2}\\\frac{\lambda-1}{2} & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0 \qquad (1.1)$$

1965年3月9日收到

这儿λ是实数，$\lambda\neq 0$，± 1， 如果命$u+iv=f(z)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\quad ;\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

则（1.1）可写成如下的复数形式[2]

$$(1-\lambda)\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}+(1+\lambda)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z\partial \bar{z}}=0 \tag{1.2}$$

它的一般解是[2]

$$f(z)=\frac{\lambda-1}{4\lambda}\bar{z}\varphi(z)+\frac{\lambda+1}{4\lambda}\overline{\int_0^z \varphi(\xi)d\xi}+\psi(z) \tag{1.3}$$

其中$\varphi(z)$，$\psi(z)$是z的解析函数。

林伟、吳兹潛同志在〔2〕〔3〕中，先后研究了方程組(1.1)的四种边界問題的解的存在性和唯一性，本文拟研究方程組(1.1)的另两种边界問題的解的存在性和唯一性。（§2，§3）

本文的工作多方面得到林伟同志的热情帮助，特此志謝。

§2 第五問題

第五問題是求函数u v，使它們在单位园$|z|<1$內适合方程組（1.1），而且滿足如下的边界条件：

$$u+\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{|z|=1}=g(\zeta) \tag{2.1}$$

$$v+\frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{|z|=1}=h(\zeta) \tag{2.2}$$

这儿$z=x+iy=\rho e^{i\theta}$，$\zeta=e^{it}$；$g(\zeta)$及$h(\zeta)$是給定在$|\zeta|=1$上的連續函数，而且$g'(\zeta)$、$h'(\zeta)$滿足Hölder条件。

我們用Fourier分析的方法来解这个問題，这就是从方程組(1.1)的一般解(1.3)出发，命

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

$$\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$$

即得

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda-1}{4\lambda}a_{n+1}\rho^{n+2}+b_n\rho^n\right)e^{in\theta}+\left(\frac{\lambda-1}{4\lambda}a_0+\frac{\lambda+1}{4\lambda}\bar{a}_0\right)\rho e^{-i\theta}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda+1}{4\lambda}\frac{\bar{a}_{n-1}}{n}\rho^n e^{-in\theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial\rho}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\lambda-1}{4\lambda}(n+2)a_{n+1}\rho^{n+1}+nb_n\rho^{n-1}\right]e^{in\theta}+\left(\frac{\lambda-1}{4\lambda}a_0+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda+1}{4\lambda}\bar{a}_0\right)e^{-i\theta}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda+1}{4\lambda}\bar{a}_{n-1}\rho^{n-1}e^{-in\theta}$$

命　$g(\zeta)+ih(\zeta)=\omega(\zeta)$　則由(2.1)(2.2)有

$$\omega(\zeta)=f(z)+\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{|z|=1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\lambda-1}{4\lambda}(n+3)a_{n+1}+(n+1)b_n\right]e^{in\theta}+2\left(\frac{\lambda-1}{4\lambda}a_0+\frac{\lambda+1}{4\lambda}\bar{a}_0\right)e^{-i\theta}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda+1}{4\lambda}\frac{1+n}{n}\bar{a}_{n-1}e^{-in\theta} \qquad (2.3)$$

由此立得：

$$2\left(\frac{\lambda-1}{4\lambda}a_0+\frac{\lambda+1}{4\lambda}\bar{a}_0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)e^{it}dt \qquad (2.4)$$

$$\frac{\lambda+1}{4\lambda}\frac{1+n}{n}a_{n-1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(\zeta)}e^{-int}dt\quad,\quad n\geqslant 2 \qquad (2.5)$$

$$\frac{\lambda-1}{4\lambda}(n+3)a_{n+1}+(n+1)b_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)e^{-int}dt\quad,\quad n\geqslant 0 \qquad (2.6)$$

当　$\lambda\neq-1$ 时，由(2.5)(2.6)得：

$$a_n=\frac{4\lambda}{\lambda+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(\zeta)}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)e^{-i(n+1)t}dt\quad,\quad n\geqslant 1 \qquad (2.7)$$

$$b_n=-\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(\zeta)}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)e^{-i(n+2)t}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)\frac{1}{1+n}e^{-int}dt,\quad n\geqslant 0 \qquad (2.8)$$

故得：

$$\varphi(z)=a_0+\frac{4\lambda}{\lambda+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(\zeta)}\left[\frac{ze^{-i2t}}{1-ze^{-it}}+\frac{log(1-ze^{-it})}{z^2e^{-it}}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}e^{-it}\right]dt$$

$$\int_0^z\varphi(\xi)d\xi=\alpha_0 z-\frac{4\lambda}{\lambda+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(\zeta)}\left[1+\tfrac{1}{2}ze^{-it}+\frac{log(1-ze^{-it})}{ze^{-it}}\right]dt$$

$$\psi(z)=-\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(\zeta)}\left[\frac{e^{-i2t}}{1-ze^{-it}}-\frac{log(1-ze^{-it})}{ze^{it}}\right]dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)\frac{log(1-ze^{-it})}{ze^{-it}}dt$$

将它們代入（1.3）得：

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)Re\left(1+2\frac{log(1-ze^{-it})}{ze^{-it}}\right)dt$$

$$+\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(\zeta)}e^{-i2t}\left[\frac{\bar z}{z}e^{i2t}\left(1+2\frac{log(1-ze^{-it})}{ze^{-it}}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{\bar z}{z}e^{i2t}-1\right)\frac{1}{1-ze^{-it}} \tag{2.9}$$

$$\left.-\frac{\bar z}{z}e^{i2t}(1+\tfrac{1}{2}ze^{-it})-\left(\frac{\bar z}{z}e^{i2t}-1\right)\frac{log(1-ze^{-it})}{ze^{-it}}\right]dt$$

这就是第五問題的解的复数形式。

定理1：設 $g(\zeta)$ 及 $h(\zeta)$ 是給定在单位园 $|z|=1$ 上的連續函数，且 $g'(\zeta)$ 及 $h'(\zeta)$ 在 $|\zeta|=1$ 上滿足 Hölder 条件，則方程組（1.1），当 $\lambda\neq 0$，± 1 时，它在单位园內存在唯一解：

$$u(z)=Re(f(z)) \tag{2.10}$$

$$v(z)=I_m(f(z)) \tag{2.11}$$

滿足如下的边界条件：

$$u+\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{|z|=1}=g(\zeta)$$

$$v+\frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{|z|=1}=h(\zeta)$$

这儿 $f(z)$ 如(2.9)所示。

証： i）解(2.10)(2.11)适合方程組(1.1)，由(2.9)得：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)\left[\frac{2}{\bar{z}^3 e^{it}}\overline{log(1-ze^{-it})}+\frac{2}{\bar{z}^2(1-\bar{z}e^{it})}-\right.$$

$$\left.-\frac{e^{it}}{\bar{z}(1-\bar{z}e^{it})^2}\right]dt$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z\partial \bar{z}}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)\left[-\frac{2}{\bar{z}^3 e^{it}}\overline{log(1-ze^{-it})}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\bar{z}^2(1-\bar{z}e^{it})}+\frac{e^{it}}{\bar{z}(1-\bar{z}e^{it})^2}\right]dt$$

代入(1.2)得:

$$(1-\lambda)\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}+(1+\lambda)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z\partial \bar{z}}=0$$

即解(2.10)(2.11)适合方程組(1.1)

ii)解(2.10)(2.11)适合边界条件:

由(2.9)得: $$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho f(z))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)Re\left(\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\right)dt$$

$$+(z\bar{z}-1)\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(z)}e^{-i2t}\left[\frac{1}{1-ze^{-it}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(1-ze^{-it})^2}\right]dt$$

由于 $\omega'(\zeta)$ 在 $|\zeta|=1$ 上滿足 Hölder 条件，按 Сохоцкий 公式:

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(\zeta)}e^{-i2t}\left[\frac{1}{1-ze^{-it}}+\frac{1}{(1-ze^{-it})^2}\right]dt$$

存在[4]，故

$$f(z)+\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\Big|_{|z|=1}=\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)Re\left(-\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\right)dt$$

$$+\lim_{\rho\to 1}(\rho^2-1)\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(\zeta)}e^{-i2t}\left[\frac{1}{1-ze^{-it}}+\frac{1}{(1-ze^{-it})^2}\right]dt$$

$$=\omega(\zeta)$$

这就說明 $u(z)$，$v(z)$适合边界条件(2.1)(2.2)。明所欲証。

附記: 第五問題的解可由另一方法获得，即将它归結为方程組(1.1)的 Dirichlet 問題，事实上，条件(2.1)(2.2)可写为:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f(z))\Big|_{|z|=1}=f(z)+\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\Big|_{|z|=1}=\omega(\zeta)$$

容易証明：函数 $\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f(z))$ 适合方程組（1.2），因此我們可利用文章[2]中Dirichlet 問題的解，即得

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)Re\left(\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\right)dt$$

$$+(z\bar{z}-1)\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(\zeta)}e^{-i2t}\left[\frac{1}{1-ze^{-it}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(1-ze^{-it})^2}\right]dt$$

两边对 ρ 积分立得（2.9）

§3 第六問題

第六問題（1），就是求函数u,v，使它們在单位园$|z|=1$内适合方程組(1.1)，并且滿足如下的边界条件：

$$u(z)\Big|_{|z|=1}=g(\zeta) \tag{3.1}$$

$$v(z)+\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{|z|=1}=h(\zeta) \tag{3.2}$$

这儿 $g(\zeta)$及$h(\zeta)$是給定在$|\zeta|=1$上的連續函数，且 $g'(\zeta)$及 $h'(\zeta)$在 $|\zeta|=1$ 上滿足Hölder条件。

仿照§2，我們仍是从一般解(1.3)出发

命 $2g(\zeta)+i2h(\zeta)=\omega(\zeta)$ 則由一般解(1.3)及(3.1)，(3.2)可得：

$$\frac{\lambda-1}{4\lambda}(4a_1-2\bar{a}_1)+2b_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)\,dt \tag{3.3}$$

$$\frac{\lambda-1}{4\lambda}(5a_2-\bar{a}_0)-\frac{\lambda+1}{4\lambda}a_0+3b_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)e^{-it}\,dt \tag{3.4}$$

$$\frac{\lambda-1}{4\lambda}(3a_0-3\bar{a}_2)+\frac{\lambda+1}{4\lambda}3\bar{a}_0-\bar{b}_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)e^{it}\,dt \tag{3.5}$$

$$\frac{\lambda-1}{4\lambda}(n+4)a_{n+1}+(n+2)b_n-\frac{\lambda+1}{4\lambda}a_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\zeta)e^{-int}dt \qquad n\geqslant 2 \tag{3.6}$$

$$-\frac{\lambda-1}{4\lambda}(n+2)a_{n+1}-nb_n+\frac{\lambda+1}{4\lambda}\left(1+\frac{2}{n}\right)a_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(\zeta)}e^{-int}\,dt \qquad n\geqslant 2 \tag{3.7}$$

从而有

$$\frac{\varphi(z)-a_0}{z} = a_1+2\bar{a}_0 z+\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\left[z\varphi(z)+\int_0^z\varphi(\xi)d\xi\right]$$

$$-\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)\left[\frac{1}{(1-ze^{-it})^2}-1\right]dt$$

$$+i\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\zeta)\frac{ze^{-it}}{1-ze^{-it}}dt \tag{3.8}$$

当 $\lambda<0$（即 $\left|\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right|<1$）时，命 $k^2=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$，将上式对 z 求导数得：

$$\frac{d}{dz}\Big(\varphi(z)-a_0\Big)-\left(\frac{1}{z}+\frac{3k^2z}{1-k^2z^2}\right)\Big(\varphi(z)-a_0\Big)=\frac{2\bar{a}_0+2a_0k^2}{1-k^2z^2}z$$

$$-\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2g(\zeta)\frac{1}{1-k^2z^2}\frac{ze^{-it}}{(1-ze^{-it})^3}dt$$

$$+i\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\zeta)\frac{1}{1-k^2z^2}\frac{ze^{-it}}{(1-ze^{-it})^2}dt \tag{3.9}$$

由此可得：当 $\lambda=-1$ 时

$$\varphi(z)=a_0+a_1z+2\bar{a}_0z^2-\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)z\left[\frac{1}{(1-ze^{-it})^2}-1\right]dt$$

$$+i\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\zeta)z\left[\frac{1}{1-ze^{-it}}-1\right]dt \tag{3.10}$$

当 $\lambda\neq-1$ 时

$$\varphi(z)=a_0+\frac{z}{(1-k^2z^2)^{3/2}}\left[c+\int_0^z Q(z)dz\right] \tag{3.11}$$

其中 a_0 及 c 是任意复常数；$k^2=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$，

而 $$Q(z)=(2\bar{a}_0+2a_0k^2)\sqrt{1-k^2z^2}-\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2g(\zeta)e^{-it}\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{(1-ze^{-it})^3}dt$$

$$+i\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\zeta)e^{-it}\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{(1-ze^{-it})^2}dt$$

另方面由(3.4)～(3.7)得

$$\psi(z)=b_0-\frac{\lambda-1}{4\lambda}\bar{a}_0z-\frac{\lambda-1}{4\lambda}\frac{\varphi(z)-a_0}{z}+\frac{\lambda-1}{4\lambda}a_1-\frac{\lambda+1}{4\lambda}\Phi(z)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2g(\zeta)\frac{ze^{-it}}{1-ze^{-it}}dt \tag{3.12}$$

将此式代入一般(1.3)，并計及(3.3)得：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}dt+\frac{\lambda-1}{4\lambda}(\rho^2-1)\frac{\varphi(z)-a_0}{z}$$

$$-i\frac{\lambda+1}{2\lambda}\mathrm{Im}\Big(\Phi(z)\Big)+i\frac{\lambda-1}{2\lambda}\mathrm{Im}(a_0\bar{z})+i\,\mathrm{Im}\Big(\frac{\lambda-1}{4\lambda}a_1+b_0\Big) \tag{3.13}$$

这便是第六問題(1)的解的复数形式。

定理2： 設$g(\zeta)$及$h(\zeta)$是給定在单位园$|z|=1$上的連續函数且$g'(\zeta)$及$h'(\zeta)$在$|\zeta|=1$上滿足Hölder条件，則方程組(1.1)当$\lambda<0$时，在单位园$|z|<1$內存在唯一解：

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)dt+\frac{\lambda-1}{4\lambda}(\rho^2-1)Re\left(\frac{\varphi(z)-a_0}{z}\right) \tag{3.14}$$

$$v(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)\mathrm{Im}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)dt+\frac{\lambda+1}{4\lambda}(\rho^2-1)\mathrm{Im}\left(\frac{\varphi(z)-a_0}{z}\right)$$

$$-\frac{\lambda+1}{2\lambda}\mathrm{Im}\Big(\Phi(z)\Big)-\frac{\lambda-1}{2\lambda}\mathrm{Im}(\bar{a}_0z)+\mathrm{Im}\Big(b_0+\frac{\lambda-1}{4\lambda}a_1\Big)$$

滿足如下的边界条件：

$$u(z)\big|_{|z|=1}=g(\zeta)$$

$$v+\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{|z|=1}=h(\zeta)$$

这儿$\varphi(z)$如(3.10)，(3.11)所示，而 $\Phi(z)=\int_0^z\varphi(\xi)d\xi$

証：利用复数解(3.13)易証解(3.14)(3.15)滿足方程組(1.1)。现在証明它們也适合边界条件，

因为$\omega'(\zeta)$满足 Hölder条件，故

$$\lim_{\rho\to 1}\left(\frac{\varphi(z)-a_0}{z}\right) \quad \text{存在}$$ [4]

由(3.14)得：

$$u(z)\big|_{|z|=1}=\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)dt+$$

$$+\lim_{\rho\to 1}\frac{\lambda-1}{4\lambda}(\rho^2-1)Re\left(\frac{\varphi(z)-a_0}{z}\right)=g(\zeta)$$

即解(3.14)适合边界条件(3.1)

由(3.15)，并計及(3.8)得：

$$v+\frac{\partial v}{\partial n}=Im\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ih(\zeta)\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}dt+\frac{\lambda-1}{4\lambda}3(a_0\bar{z}+\bar{a}_0z)\right.$$

$$\left.+b_0+\frac{\lambda-1}{4\lambda}3a_1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[g(\zeta)-ih(\zeta)]dt\right\}$$

$$-\frac{2}{\rho}\frac{\lambda-1}{4\lambda}Im\left(\bar{a}_0z+a_0\frac{\rho^2}{z}\right)+\frac{\lambda-1}{4\lambda}(\rho^2-1)Im\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi(z)-a_0}{z}\right)\frac{z}{\rho}\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi(z)-a_0}{z}\right]+Im\left\{\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)\frac{2\zeta z}{(\zeta-z)^2}dt+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda-1}{2\lambda}(\rho-1)\frac{\varphi(z)}{z}\left(1+\frac{1}{\rho}k^2z^2\right)\right\}$$

由(3.3)得 $Im\left(b_0+\frac{\lambda-1}{4\lambda}3a_1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[g(\zeta)-ih(\zeta)]dt\right)=0$

又由于$\omega'(\zeta)$满足Hölder条件因此

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)\frac{2\zeta z}{(\zeta-z)^2}dt \text{ 及 } \lim_{\rho-1}\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi(z)-a_0}{z}\right) \text{ 存在}$$ [4]

又因 $\lim_{\rho\to 1}Im\left[\frac{\lambda-1}{4\lambda}3(a_0\bar{z}+\bar{a}_0z)\right]=0$

及 $\lim_{\rho\to 1}Im\left[\frac{2}{\rho}\frac{\lambda-1}{4\lambda}\left(\bar{a}_0z+a_0\frac{\rho^2}{z}\right)\right]=0$

故得：

$$v+\frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{|z|=1}=\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\zeta)Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)dt$$

$$=\quad h(\zeta)$$

即解(3.15)适合边界条件(3.2)，明所欲証。

同理可得第六間題(2)的解的存在性及唯一性，即：

定理3：　設$g(\zeta)$及$h(\zeta)$是給定在単位园$|z|=1$上的連續函数且$g''(\zeta)$及$h''(\zeta)$在$|\zeta|=1$上滿足 Hölder 条件則方程組(1.1)在单位园$|z|<1$內存在唯一解：

$$u(z)=\frac{\lambda-1}{4\lambda}(\rho^2-1)Re\left(\frac{\varphi(z)-a_0}{z}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)dt$$

$$v(z)=\frac{\lambda-1}{4\lambda}(\rho^2-1)Im\left(\frac{\varphi(z)-a_0}{z}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)Im\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)dt$$

$$-\frac{\lambda+1}{2\lambda}Im(\Phi(z))-\frac{\lambda-1}{2\lambda}Im\left(\bar{a}_0 z\right)+Im\left(b_0+\frac{\lambda-1}{4\lambda}a_1\right)$$

滿足如下的边界条件：

$$u(z)\Big|_{|z|=1}=g(\zeta)$$

$$v+\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{|z|=1}=h(\zeta)$$

这儿　$\Phi(z)=\int_0^z\varphi(\zeta)d\zeta$ 而$\varphi(z)$是如下的函数

当$\lambda=-1$时：

$$\varphi(z)=a_0+a_1z-i\bar{a}_0z^2-\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)\frac{z^2e^{-it}}{(1-ze^{-it})^2}dt$$

$$+\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}i\left[g(\zeta)-ih(\zeta)\right]\frac{z^2e^{-it}}{1-ze^{-it}}dt$$

当$\lambda\neq-1$时

$$\varphi(z)=a_0+ze^{-i\frac{k^2z^2}{2}}\left[C+\int_0^z Q(z)dz\right]$$

其中　$$Q(z)=e^{i\frac{k^2z^2}{2}}\left[-i\bar{a}_0-ia_0k^2+\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}i[g(\zeta)-ih(\zeta)]\frac{e^{-it}}{(1-ze^{-it})^2}dt\right.$$

$$+\frac{4\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\zeta)e^{-it}\left[\frac{1}{(1-ze^{-it})^2}-\frac{2}{(1-ze^{-it})^3}\right]dt$$

a_0及C为任意复常数，　$k^2=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$

参 考 文 献

〔1〕华罗庚、林伟、吳兹潛：二阶两个自变数两个未知函数的常系数綫性偏微分方程的标准型。　科学通报　1964.NO:12.　P.1100－1103

〔2〕林伟、吳兹潛：常系数二阶两个自变数两个未知函数的綫性椭园型微分方程組(1)　中山大学学报(自然科学版)1964.NO:4　P.450－460

〔3〕林伟、吳兹潛：常系数二阶两个自变数两个未知函数的綫性椭园型微分方程組(Ⅱ)

〔4〕Ф.Д.Гахов. Краевые задачи М 1958 ГИ. 14.4 Р. 40－41

К некоторых краевых задач систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа с постоянными коэффициентами.

у Вэй—лянь

Резюме

В настоящей статье мы изучим два рода краевого задачи смстем уравнений с частными производными

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\lambda-1\\\lambda-1&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0$$

здесь λ—вещественное, $\lambda\neq0,1$.