

关于测度正则性的一个定理

吳 占 生

(数学系)

关于拓扑空间上有限 Baire 测度的正则性, 这是一个熟知的事实, [1]中对此结果已加以推广。

P. R. Halmos 于[4]中曾研究了局部紧 Hausdorff 空间上, 由全体紧 G_δ 集所产生的 σ -环上的 Baire 测度的正则性。在[3]中, J. Maryk 也讨论过拓扑空间上可取广义实值的 Baire 测度的正则性。

[1], [3]及[4]中的结果, 看来是互不被蕴含的。本文提出了一个较普遍的关于测度正则性的定理, 其结果蕴含了[1], [3]及[4]中关于各种 Baire 测度正则性的结论。

本文是得到[1]的启发, 并在郑曾同教授的指导下完成的, 作者谨在此表示衷心的感谢。

§ 1

先引入一些记号, 对任一集族 K , 我们用记号 $(K)_s, (K)_d, (K)_\sigma, (K)_\delta$, 分别表示所有以下形式的集合之族:

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n, \quad E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \text{这里 } E_i \in K.$$

其次, 我们用 $R(K)$ 表示由 K 产生的最小环, 用 $\sigma(K)$ 表示由 K 产生的最小 σ -环。

设 M 是一个由固定集合 Ω 的子集所组成的环。我们把 M 上的非负, 有限可加, 广义实值集函数称为 M 上的测度。如果测度仅取实值, 则称为有限测度。如果测度具有可数可加性, 则称为 σ -测度。

设 μ 是环 M 上的测度, A, B 分别是 Ω 的子集组成的族。对 $E \in M$, 我们称 A 关

于 μ 自内逼近 E , 若

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(D) : D \in M \text{ 且存在 } A \in A, \text{ 使 } D \subset A \subset E \}.$$

若 M 中每一集合均可由 A 关于 μ 自内逼近, 则称 M 可由 A 关于 μ 自内逼近。〔注1〕

对 $E \in M$, 我们称 B 关于 μ 自外逼近 E , 若

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(D) : D \in M, \text{ 且存在 } B \in B, \text{ 使 } E \subset B \subset D \}.$$

若 M 中每一集合均可由 B 关于 μ 自外逼近, 则称 M 可由 B 关于 μ 自外逼近。

引理 1:

设 M 是 Ω 上的一个环, A, B 是 Ω 的子集组成的族, 使对于 M 上每一有限测度, A, B 均分别自内和自外逼近 M 。

又设 X 是一个任意集合, C 是一族由 X 到 Ω 内的映象。

用 S 记族 $\{ f^{-1}(E) : f \in C, E \in M \}$ 所产生的最小环; 用 Z 记族 $(\{ f^{-1}(A) : f \in C, A \in A \})_{ds}$; 用 U 记族 $(\{ f^{-1}(B) : f \in C, B \in B \})_{ds}$ 。

则对于 S 上的任一有限测度 μ , S 均可由 Z 及 U 关于 μ 分别自内及自外逼近。

〔证〕: 作乘积空间 $\Omega^C = \prod_{f \in C} \Omega_f$, 其中 $\Omega_f = \Omega$, 对每 $f \in C$ 。

令 $M_f = M$, 对每 $f \in C$ 。

用 M_f^* 记 Ω^C 中如下形式的柱体之全体:

$$\bigcap_{f' \in C} E_{f'}, \text{ 其中 } E_{f'} = \Omega_{f'}, \text{ 当 } f' \neq f \text{ 及 } E_f \in M_f.$$

$$\text{令 } \bigcap_{f \in C} M_f = R \left(\bigcup_{f \in C} M_f^* \right)$$

$$\text{显然 } \bigcap_{f \in C} M_f = \left(\bigcup_{f \in C} M_f^* \right)_{ds}$$

我们定义由 X 到 Ω^C 内的映象 C , 使对每 $x \in X$, $C(x)$ 在第 f 个因子空间的投影为 $f(x)$ 。

注意到对每 $F \in \bigcap_{f \in C} M_f$, 有 $C^{-1}(F) \in S$, 因此由映象 C , 便可在 $\bigcap_{f \in C} M_f$ 上诱导有限测度 $P = \mu C^{-1}$ 。

用 A_f^* 记 Ω^C 中如下形状的集合的全体:

$$\bigcap_{f' \in C} A_{f'}, \text{ 其中 } A_{f'} = \Omega_{f'}, \text{ 当 } f' \neq f \text{ 及 } A_f \in A.$$

现首先证明 M_f^* 可由 A_f^* 关于 P 自内逼近。

〔注1〕 关于此概念, 可参看〔2〕

事實上, 設 $P_f = \mu f^{-1}$ 為環 M_f 上由 f 誘導出來的測度。考慮任一 $E_f^* \in M_f^*$, 可有 $E \in M$, 使

$$E_f^* = \bigcup_{f' \in C} E_{f'}, \text{ 其中 } E_{f'} = \Omega_{f'}, \text{ 當 } f' \preceq f \text{ 及 } E_f = E.$$

由題設, 對每 $\varepsilon > 0$, 存在 $A \in A$ 及 $D \in M$ 使

$$D \subset A \subset E \text{ 及 } P_f(E/D) < \varepsilon.$$

令 $A_f^* = \bigcup_{f' \in C} A_{f'}$, 其中 $A_{f'} = \Omega_{f'}$, 當 $f' \preceq f$ 及 $A_f = A$.

$$D_f^* = \bigcup_{f' \in C} D_{f'}, \text{ 其中 } D_{f'} = \Omega_{f'}, \text{ 當 } f' \preceq f \text{ 及 } D_f = D.$$

顯然 $A_f^* \in A_f^*$, $D_f^* \in M_f^*$, 且 $D_f^* \subset A_f^* \subset E_f^*$.

很明顯有 $P(E_f^*) = P_f(E)$ 及 $P(D_f^*) = P_f(D)$, 由此便得 $P(E_f^* \setminus D_f^*) < \varepsilon$.

現再証 $\bigcup_{f \in C} M_f$ 可由 $\left(\bigcup_{f \in C} A_f^* \right)_{ds}$ 關於 P 自內逼近。

考慮任一 $F \in \bigcup_{f \in C} M_f$, 則 F 可表為:

$$F = \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^{k_i} F_j^i, \text{ 此處 } F_j^i \in \bigcup_{f \in C} M_f^*.$$

由上面所証, 對每 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_j^i \in \bigcup_{f \in C} A_f^*$ 及 $D_j^i \in \bigcup_{f \in C} M_f^*$, 使 $D_j^i \subset A_j^i \subset F_j^i$ 及 $P(F_j^i \setminus D_j^i) < \frac{\varepsilon}{k_n}$, 此中 $k = \max(k_1, \dots, k_n)$.

因而我們有:

$$\bigcap_{j=1}^{k_i} D_j^i \subset \bigcap_{j=1}^{k_i} A_j^i \subset \bigcap_{j=1}^{k_i} F_j^i \text{ 及}$$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k_i} F_j^i \setminus \bigcap_{j=1}^{k_i} D_j^i\right) \leq P\left(\bigcap_{j=1}^{k_i} (F_j^i \setminus D_j^i)\right) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

$$\text{令 } D = \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^{k_i} D_j^i, \quad A = \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^{k_i} A_j^i, \text{ 則 } A \in \left(\bigcup_{f \in C} A_f^* \right)_{ds},$$

$$D \in \bigcup_{f \in C} M_f, \text{ 且 } D \subset A \subset F \text{ 及 } P(E/D) < \varepsilon.$$

由上面所証之事實, 即表明 S 可由 Z 關於 μ 自內逼近。

同样可证, S 可由 U 关于 μ 自外逼近. 引理证毕.

引理 2:

在引理 1 的假设下, 又设 μ 是 S 上的有限 σ -测度, 令 ν 是 μ 在 $\sigma(S)$ 上的扩张, 则 $\sigma(S)$ 可由 $Z^* = (Z)_\sigma$ 及 $U^* = (U)_\sigma$ 关于 ν 分别自内和自外逼近.

[证]: 引用[4]的已知结果知, 对每 $E \in \sigma(S)$,

$$\nu(E) = \inf \{ \nu(K): E \subset K \in (S)_\sigma \} \quad (1)$$

$$= \sup \{ \nu(H): E \supset H \in (S)_\delta \} \quad (2)$$

对任 $\varepsilon > 0$, 由(2)知存在 $H \in (S)_\delta$, 使 $E \supset H$

且
$$\nu(E/H) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

H 可表为如下形状:

$$H = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i, \quad H_i \in S.$$

由引理 1 结果知, 对每 H_i , 存在 $Z_i \in Z$ 及 $F_i \in S$ 使 $F_i \subset Z_i \subset H_i$ 及 $\nu(E_i/H_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

令 $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, 及 $Z = \bigcap_{i=1}^{\infty} Z_i$, 则 $F \in \sigma(S)$, $Z \in Z^*$ 且 $F \subset Z \subset H$ 及 $\nu(H/F) < \frac{\varepsilon}{2}$.

由此有 $F \subset Z \subset E$ 且 $\nu(E/F) < \varepsilon$.

这就证明了 $\sigma(S)$ 可由 Z^* 关于 ν 自内逼近.

引用(1)式及引理 1, 同样可证: $\sigma(S)$ 可由 U^* 关于 ν 自外逼近. 引理证毕.

设 ν 是 $\sigma(S)$ 上的 σ -测度, H 是任一由 X 的子集组成的集族. 对 $E \in \sigma(S)$ 若存在 $D_i, F_i \in \sigma(S)$ 及 $H_i \in H$, $i=1, 2, 3, \dots$, 使 $D_i \subset H_i \subset F_i$, $\nu(F_i) < +\infty$,

$i=1, 2, 3, \dots$, 及 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, 则称 E 是 (ν, H) - σ -有限.

定理 1

在引理 1 的假设下, 又设 ν 是 $\sigma(S)$ 上的 σ -测度, 则我们有如下结论:

1) 若每一 $E \in \sigma(S)$, 满足 $\nu(E) < +\infty$, 均为 (ν, U^*) - σ -有限, 则 $\sigma(S)$ 可由 U^* 关于 ν 自外逼近.

2) $\sigma(S)$ 中每一 (ν, Z^*) - σ -有限集均可由 Z^* 关于 ν 自内逼近.

[证]: 1) 兹分以下各种情形加以证之. 对任 $E \in \sigma(S)$,

若 $\nu(E) = +\infty$, 则结论自明.

若存在 $U \in U^*$ 及 $F \in \sigma(S)$ 使 $E \subset U \subset F$, 且 $\nu(F) < +\infty$ 。我們把映象族 C 限制于 F , 考慮定義在 F 上的映象族 $\{f|F: f \in C\}$, 另外再考慮 F 上的 σ -環 $\sigma(S) \cap F$, 引用引理 1 及 2 便知 $\sigma(S) \cap F$ 可由 $U^* \cap F$ 關於 ν 自外逼近。因 $E \subset U \subset F$, 所以 E 可由 $U^* \cap U$ 關於 ν 自外逼近。即 E 可由 U^* 關於 ν 自外逼近。

若 $\nu(E) < +\infty$, 則存在 $D_i, F_i \in \sigma(S)$ 及 $U_i \in U^*$ 使 $D_i \subset U_i \subset F_i$, $\nu(F_i) < +\infty$, $i = 1, 2, 3, \dots$, 及 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ 。令 $E_1 = E \cap D_1, E_2 = (E/D_1) \cap D_2, \dots$,

$$E_i = (E / \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j) \cap D_i, \dots$$

則 $E_i \subset U_i \subset F_i$, 且 $\nu(F_i) < +\infty, i = 1, 2, 3, \dots$, 由上面已証的事實知, 對任 $\varepsilon > 0$, 存在 $K_i \in \sigma(S)$ 及 $\bar{U}_i \in U^*$ 使 $E_i \subset \bar{U}_i \subset K_i$ 且 $\nu(K_i/E_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ 。令 $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{U}_i, K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$,

則 $U \in U^*, K \in \sigma(S)$, 且 $E \subset U \subset K$, 并有 $\nu(K/E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(K_i/E_i) < \varepsilon$ 。

綜合上述各種情形, 便知 $\sigma(S)$ 可由 U^* 關於 ν 自外逼近。

2) 對 $E \in \sigma(S)$ 。首先証明: 若存在 $Z_0 \in Z^*$ 及 $F \in \sigma(S)$ 使 $\nu(F) < +\infty$ 及 $E \subset Z_0 \subset F$, 則 E 可由 Z^* 關於 ν 自內逼近。

事實上, 考慮定義在 F 上的映象族 $\{f|F: f \in C\}$ 及 F 上的 σ -環 $\sigma(S) \cap F$, 引用引理 1 及 2 便知 $\sigma(S) \cap F$ 可由 $Z^* \cap F$ 關於 ν 自內逼近。因 $E \in \sigma(S) \cap F$, 故對任 $\varepsilon > 0$, 存在 $K \in \sigma(S)$, $Z \in Z^*$, 使 $K \subset Z \cap F \subset E$ 及 $\nu(E/K) < \varepsilon$ 。

因 $Z_0 \cap Z \in Z^*$ 且滿足 $K \subset Z_0 \cap Z \subset E$, 故知 E 可由 Z^* 關於 ν 自內逼近。

其次, 若 E 是 $\sigma(S)$ 中的 $(\nu, Z^*)\sigma$ -有限集, 則存在 $D_i, F_i \in \sigma(S)$ 及 $Z_i \in Z^*$ 使 $D_i \subset Z_i \subset F_i, \nu(F_i) < +\infty, i = 1, 2, 3, \dots$, 及 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ 。

令 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, 其中 $E_i = (E / \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j) \cap D_i$, 則諸 E_i 互不相交, 且 $E_i \subset D_i \subset Z_i \subset F_i$ 。

由上面已証的事實知, 對每 $\varepsilon > 0$, 存在 $\bar{Z}_i \in Z^*$ 及 $K_i \in \sigma(S)$ 使 $K_i \subset \bar{Z}_i \subset E_i$ 且 $\nu(E_i/K_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ 。由此有:

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(K_i) > \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) - \frac{\varepsilon}{2} = \nu(E) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

由上式可知, 若 $\nu(E) < +\infty$, 則存在自然數 n_1 使

$$\nu \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} K_i \right) > \nu(E) - \varepsilon.$$

令 $Z_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} \bar{Z}_i$, 则 $Z_1 \in Z^*$, 且 $\bigcup_{i=1}^{n_1} K_i \subset Z_1 \subset E$.

若 $\nu(E) = +\infty$, 则 $\nu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \right) = +\infty$, 对任 $M > 0$, 存在 n_2 , 使 $\nu \left(\bigcup_{i=1}^{n_2} K_i \right) > M$.

令 $Z_2 = \bigcup_{i=1}^{n_2} \bar{Z}_i$, 则 $Z_2 \in Z^*$, 且 $\bigcup_{i=1}^{n_2} K_i \subset Z_2 \subset E$,

总而言之, 这便证得 $\sigma(S)$ 中每一 (ν, Z^*) σ -有限集, 均可由 Z^* 关于 ν 自内逼近. 定理证毕.

(注)从上述对于定理1,2)的证明中可看到, 其实我们得到了一个更强的结果即 E 可由 Z^* 中测度为有限的集合关于 ν 自内逼近.

§ 2

在本节中, 我们把定理1用于讨论拓扑空间上的测度, 得出了(3), (4)中的一些相应结果.

先给出如下命题:

命题:

设 Ω 是直线上的Borel集, M 是 Ω 上的全体Borel子集, A 是 Ω 上的全体紧子集, B 是 Ω 上的全体开子集, 则对每一 M 上的有限 σ -测度 μ , M 均可由 A 及 B 关于 μ 分别自内和自外逼近.

即: 对每 $E \in M$,

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(A); E \supset A \in A \} \quad (3)$$

$$= \inf \{ \mu(B); E \subset B \in B \}. \quad (4)$$

(证): (3)式可由(4), P.40习题10的结果推得.

现证(4), 对每 $E \in M$, 考虑 Ω/E , 由(3)有

$$\mu(\Omega/E) = \sup \{ \mu(A); E \supset A \in A \}$$

所以 $\mu(E) = \mu(\Omega) - \sup \{ \mu(A); E \supset A \in A \}$

$$= \inf \{ \mu(\Omega/A); E \supset A \in A \}$$

$$= \inf \{ \mu(B); E \subset B \in B \}. \text{ 证毕.}$$

下面给出定理1的两个应用.

1. 设定理1中的 X 是一个拓扑空间, Ω 是直线, M 取作为直线上的全体Borel集,

A 是直线上的全体紧子集, B 是直线上的全体开子集, C 为 X 上的全体连续函数。

很明显, 此时 Z^* 为 X 上的全体 Z -集族, U^* 为 X 上的全体 U -集族[注2], $\sigma(S)$ 是包含 Z^* (或 U^*) 的最小 σ -代数。

由此便可得如下定理:

定理 2:

设 X 是拓扑空间, 用 U^* 记 X 上的全体 U -集, 用 Z^* 记 X 上的全体 Z -集, $\sigma(S)$ 为包含 U^* (或 Z^*) 的最小 σ -代数, 对于 $\sigma(S)$ 上的 σ -测度 ν , 若使得每一具有有限测度的集合, 均 $(\nu, U^*)\sigma$ -有限, 则 $\sigma(S)$ 可由 U^* 关于 ν 自外逼近, 而且 $\sigma(S)$ 中每一 $(\nu, Z^*)\sigma$ -有限集, 可由 Z^* 关于 ν 自内逼近。

特别, 当 ν 是有限 σ -测度, 则 $\sigma(S)$ 可由 U^* 及 Z^* 关于 ν 分别自外和自内逼近。

注意到每一 $(\nu, Z^*)\sigma$ -有限集必然是 $(\nu, U^*)\sigma$ -有限集, 便知定理 2 即 (3) 中所给的結果。

2. 现在假设定理 1 中的 X 是一个局部紧 Hausdorff 空间, $\mathcal{Q}$ 是直线, M 是直线上全体不含原点的 Borel 集, A 是直线上全体不含原点的紧子集, B 是直线上全体不含原点的开子集, C 是 X 上全体具有紧支柱的连续函数。

此时, Z^* 为 X 上的全体紧 G_δ 集, $\sigma(S)$ 为全体紧 G_δ 集所产生的最小 σ -环, 即 X 上的全体 Baire 集 (按 (4) 的定义), U^* 中每一集合均为 X 上的开 Baire 集。(其实, U^* 即为 X 上之全体开 Baire 集, 但为了得到下面的定理 3, 我们并没有用到此事实。)

现来证明上述事实:

1°, 兹证明 Z^* 为 X 上的全体紧 G_δ 集。

事实上, 对直线上任一不含原点的闭集 A 和 $f \in C$, $f^{-1}(A)$ 显然是 X 上的紧 G_δ 集, 又因紧 G_δ 集之有限并、可数交仍为紧 G_δ 集, 故知 Z^* 中每一集合均为紧 G_δ 集。

反之, 对任一 X 上的紧 G_δ 集 F , 由于 X 是局部紧的, 所以存在开集 G_n , $n=1, 2, \dots$, 及紧 K , 使

$$G_n \subset K, n=1, 2, \dots, \text{ 且 } F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

取 X 上连续函数 f_n , 满足:

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{在 } G_n \text{ 外。} \\ \frac{1}{2^n} & \text{在 } F \text{ 上。} \end{cases}$$

[注 2] 一个集合称为 Z -集, 若它能表为形状: $\{x \in X: f(x)=0, f \in C\}$,

一个集合称为 U -集, 若它能表为形状: $\{x \in X: f(x) \neq 0, f \in C\}$ 。

$$\text{且 } 0 \leq f_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

则 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in C$, 且 $F = f^{-1}(1)$. 这便知 $F \in Z^*$.

2°, 再证明 U^* 中每一集合均为开 Baire 集。

设 B 为直线上任一不含原点之开集, 则 B 可表为 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 其中每一 A_n 均

为不含原点之闭集。因而 $F^{-1}(B)$ 为 X 上开集, 且由 $f^{-1}(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$ 又知 $f^{-1}(B)$ 为 Baire 集。即 $f^{-1}(B)$ 为开 Baire 集。又因开 Baire 集的有限交、可数并仍为开 Baire 集, 故知 U^* 中每一集合均为开 Baire 集。

按(4)中的定义, 局部紧 Hausdorff 空间 X 上的 Baire 测度 ν 是指定义在全体 Baire 集 $\sigma(S)$ 上的非负、广义实值、可数可加集函数, 且使得对于每一紧 G_δ 集 Z , 均有 $\nu(Z) < +\infty$ 。

不难证明, 对任一 Baire 测度 ν , 每一 Baire 集均是 (ν, Z^*) 和 (ν, U^*) σ -有限的。

由此可得如下定理:

定理 3: 每一 Baire 测度 ν 均是正则的。即 $\sigma(S)$ 可由 U^* 和 Z^* 关于 ν 分别自外和自内逼近。

上述定理即是(4)中第十章之 § 52 定理 G 。

参 考 文 献

- [1] 郑曾同, 线性泛函的积分表示及测度的弱收敛, 中山大学学报, 4, 1962, 32—41页。
- [2] E. Marczewski, On Compact measures, Fund. Math., XI(1953), p.111—124.
- [3] J. Maryk, Borel and Baire measures, Czechoslovak Math. Jour., 82(2)(1957), p.248—253.
- [4] P. R. Halmos, Measure Theory.

A Theorem on the Regularity of Measures

Wu Zhan-sun

The main results of this paper are the following: Let M be a ring of subsets

of a fixed set Ω and let A, B be a class of subsets of Ω respectively such that for each measure μ in M (i.e. nonnegative, finitely additive real set function) A approximates M inside with respect to the measure μ and B approximates M outside with respect to the measure μ .

Let X be an arbitrary set and C be a family of maps which are on X into Ω .

Let S be the ring generated by $\{f^{-1}(E): f \in C, E \in M\}$ and let $\sigma(S)$ be the σ -ring generated by S , let

$$Z = (\{f^{-1}(A): f \in C, A \in \mathcal{A}\})_{ds},$$

$$U = (\{f^{-1}(B): f \in C, B \in \mathcal{B}\})_{ds},$$

$$Z^* = \{\cap \hat{Z}: \hat{Z} \text{ is a finite or countably subclass of } Z\},$$

$$U^* = \{\cup \hat{U}: \hat{U} \text{ is a finite or countably subclass of } U\},$$

We have 1) for each measure ν in S , Z approximates S inside with respect to the measure ν and U approximates S outside with respect to the measure ν ,

2) for each countably additive measure ν , Z^* approximates $\sigma(S)$ inside with respect to ν and U^* approximates $\sigma(S)$ outside with respect to ν ;

3) let ν be a countably additive extended real valued measure in $\sigma(S)$, then

i) if each $E \in \sigma(S)$ such that $\nu(E) < +\infty$ is $(\nu, U^*)\sigma$ -finite^(*), then U^* approximates $\sigma(S)$ outside with respect to ν ;

ii) for each $(\nu, Z^*)\sigma$ -finite set $E \in \sigma(S)$, Z^* approximates E inside with respect to ν .

The results mentioned above generalize some known theorems about regularity of Baire measures in [3], [4].

[*] Let ν be any countably additive extended real valued measure in $\sigma(S)$ and K be a class of subsets of X , we say that $E \in \sigma(S)$ is $(\nu, K)\sigma$ -finite, if there are $K_n \in K$, $A_n, B_n \in \sigma(S)$, $n=1, 2, 3, \dots$, such that $A_n \subset K_n \subset B_n$, $\nu(B_n) < +\infty$, $n=1, 2, 3,$

$\dots$, and $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.