非自治系統漸近稳定性的估值

范 达

（数学力学系）

摘 要

本文討論一类非自治微分系統，它們的系数可以是无界的，求出各系数在某各条件的估值界限，使能获得漸近稳定。在§1考慮綫性系統（1.1）：若其中P(t)随意分为$P_1(t)+P_2(t)$則得定理1.1；若分为上下三角形$A(t)+B(t)$則得定理1.2。在§2論非綫性系統(2.1)，其非綫性部分$f(t,x)$在条件(V_1)下得定理2.1和2,2。

最近文〔1〕曾用V-函数方法研究过一类具无界系数綫性系統漸近稳定性且建立了一个算作較簡便的判别准則，本文拟用积分不等式进行討論一类可以是无界系数的綫性系統解的界限（使之能漸近稳定的界限），并由此导出一类較文〔1〕稍为广些的漸近稳定的具无界系数綫性系統，同时我們也討論了非綫性系統的漸近稳定性。

§1 綫 性 系 統

我們考慮綫性微分方程組：

$$dx/dt = \Lambda(t)x + P(t)x, \tag{1.1}$$

假定n阶方陣$\Lambda(t)=diag(p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t))$和$P(t)=(p_{ij}(t))_1^n$，在$t\geqslant 0$上是連續的。

把$P(t)$随意裂分为二个連續方陣：

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t)$$

于是可写（1.1）为：

1965年3月9日收到。

$$dx/dt = A(t)x + [P_1(t) + P_2(t)]x \tag{1.1'}$$

定理1.1　假設存在常数 r, α, β, C, D, R 和 $t^* \geqslant 0$ 使得

(Ⅰ$_1$)　$P_i(t) \leqslant -r$, $r > 0$, $t \geqslant t^*$, $(i=1,2,\cdots,n)$

(Ⅱ$_1$)　$\int_{t^*}^{t} \|P_1(t)\| dt \leqslant Ct^{\alpha} + R$, $C, R \geqslant 0$, $t \geqslant t^*$,

(Ⅲ$_1$)　$\int_{t^*}^{t} \|P_2(\tau)\| d\tau \leqslant Dt^{\beta} + R$, $D \geqslant 0$, $t \geqslant t^*$

那么，如果

$$(\text{Ⅳ}_1) \quad \begin{cases} 1)\ \alpha = \beta = 1,\ r > n(C+D). \\ 2)\ \alpha = 1,\ \beta < 1,\ r > nC. \\ 3)\ \alpha < 1,\ \beta = 1,\ r > nD. \\ 4)\ \alpha < 1,\ \beta < 1. \end{cases}$$

四种情形中有任一情形成立，則必存在常数 K ($K > 0$) 和 ρ ($0 < \rho < 1$)，使得組 (1.1′) 的解滿足估值：

$$(*) \qquad \|x(t)\| \leqslant K\|x(t_0)\| e^{-r\rho t} \qquad t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

从两組 (1.1′) 的解是漸近稳定的。

〔証〕　由条件(Ⅰ$_1$)可得知，对于一切 $t \geqslant t^*$ 有

$$\|x(t)\| \leqslant ne^{-r(t-t^*)}\|x(t^*)\| + \int_{t^*}^{t} ne^{-r(t-\tau)} (\|P_1(\tau)\| + \|P_2(\tau)\|)\|x(\tau)\| d\tau$$

再应用 Bellman 不等式 ([5], p.35) 及条件(Ⅱ$_1$), (Ⅲ$_1$)可得

$$\|x(t)\| = n\|x(t^*)\| \cdot exp\left\{-rt\left[1 - \frac{nC}{r}t^{\alpha-1} - \frac{nD}{r}t^{\beta-1} - \frac{2nR + rt^*}{rt}\right]\right\} \tag{1.5}$$

易见，必存在常数 $\rho(0<\rho<1)$ 和足够大的 $T \geqslant t^*$ 使得对于(Ⅳ$_1$)中任一情形，当 $t \geqslant T$ 时皆有：

$$1 - \frac{nC}{r}t^{\alpha-1} - \frac{nD}{r}t^{\beta-1} - \frac{2nR + t^*}{rt} \geqslant \rho > 0$$

因此，由 (1.5) 得：

$$\|x(t)\| \leqslant n\|x(t^*)\| e^{-r\rho t}, \quad t \geqslant T \geqslant t^* \tag{1.6}$$

今設 $X(t)$: $X(0) = E$ 为組(1.1′)的基解陣，于是組(1.1′)的解可表为：

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0), \quad t > t_0 \geqslant 0 \tag{1.7}$$

令$K_1=n\|X(t^*)X^{-1}(t_0)\|$，由(1.6)及(1.7)即得

$$\|x(t)\|\leqslant K_1\|x(t_0)\|e^{-r\rho t},\quad t\geqslant T.$$

此示对于$t_0\geqslant T$定理已得証。而对于$T>t_0\geqslant 0$，因可以选取$K_2=const>0$使

$$\|X(t)X^{-1}(t_0)\|\leqslant K_2e^{-r\rho t},\quad t_0\leqslant t\leqslant T.$$

于是令$K=max(K_1,K_2)$便可得証

$$\|x(t)\|\leqslant K\|x(t_0)\|e^{-r\rho t}\qquad t\geqslant t_0\geqslant 0.$$

往下我們考察$P(t)$的一种值得注意的特殊裂分：

$$P(t)=A(t)+B(t)\tag{1.8}$$

其中

$$A(t)=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \cdots & 0\\ p_{21}(t) & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn-1}(t) & 0\end{pmatrix}\qquad B(t)=\begin{pmatrix}p_{11}(t) & \cdots & \cdots & p_{1n}(t)\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & p_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

于是可写(1.1)为

$$dx/dt=\Lambda(t)x+[A(t)+B(t)]x\tag{1.1''}$$

而在此情况下我們有：

定理1.2　假設存在常数r；α，β，C，D，R和$t^*\geqslant 0$使得

(Ⅰ₂)　$p_i(t)\leqslant -r$；$r>0$，$t\geqslant t^*$ $(i=1,2,\cdots,n)$

(Ⅱ₂)　$\int_{t^*}^{t}\|A(\tau)\|d\tau\leqslant Ct^{\alpha}+R$；$C$，$R\geqslant 0$，$t\geqslant t^*$

(Ⅲ₂)　$\int_{t^*}^{t}\|B(\tau)\|d\tau\leqslant Dt^{\beta}+R$；$D\geqslant 0$，$t\geqslant t^*$

(Ⅳ₂)　$\int_{0}^{+\infty}|p_{ii}(\tau)|d\tau<+\infty$，$(i=1,2,\cdots,n)$

那么，如果

$$(\mathrm{V}_2)\begin{cases}1) & \alpha=\beta=1,\ r>n(C+D)\\ 2) & \alpha=1,\ \beta<1\\ 3) & \alpha<1,\ \beta\leqslant 1\end{cases}$$

三种情形中有任一情形成立，則必存在常数 $K(K>0)$和 $\rho(0<\rho<1)$ 使得組(1.1″)的解滿足估值

$$\|x(t)\|\leqslant K\|x(t_0)\|e^{-r\rho t},\quad t\geqslant t_0\geqslant 0 \qquad (*)$$

从而組(1.1″)的解是漸近稳定的。

〔証〕 由定理1.1，对于情形$(\mathrm{V}_2)1)$定理显然成立。現在我們考察情形$(\mathrm{V}_2)2)$。为此选取足够小的常数$\varepsilon(0<\varepsilon<1)$使

$$r>\varepsilon nC \qquad (1.9)$$

今对組(1.1″)作ε_变换：

$$y=\Phi x,\qquad \Phi=diag(\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^n). \qquad (1.10)$$

于是組(1.1″)即化为

$$dy/dt=\Lambda(t)y+\tilde{P}(t)y \qquad (1.11)$$

其中$\tilde{P}(t)=\Phi P(t)\Phi^{-1}\equiv(\tilde{p}_{ij}(t))_1^n$，而显然有

$$\tilde{p}_{ij}(t)=\varepsilon^{i-j}p_{ij}(t),\qquad i,j=1,\cdots,n. \qquad (1.12)$$

現在象(1.8)那样，类似地把$\tilde{P}(t)$裂分为二，而此时(1.11)有(1.1″)类似形状：

$$dy/dt=\Lambda(t)y+[\tilde{A}(t)+\tilde{B}(t)]y \qquad (1.11')$$

由(1.12)及条件(II_2)，(III_2)，(IV_2)易証得：当$t\geqslant t^*$时

$$\int_{t^*}^{t}\|\tilde{A}(\tau)\|d\tau\leqslant\varepsilon Ct^{\alpha}+\tilde{R},$$

$$\int_{t^*}^{t}\|\tilde{B}(\tau)\|d\tau\leqslant\varepsilon^{-(n-1)}Dt^{\beta}+\tilde{R}.\ \tilde{R}=const>0$$

再注意到(1.9)，根据定理1.1情形(IV_1) 2)得知对于組(1.11′)的解滿足估值式(*)，又因$\|\Phi\|$，$\|\Phi^{-1}\|=const>0$，故組(1.1″)的解亦滿足估值式(*)，这里仅可能常数K有所差异。

至于情形$(v_2)3)$可仿証得(略)。

推論 1 設 $p_{ij}(t)=p_{ij}^{(1)}(t)+p_{ij}^{(2)}(t)$，$(i\neq j)$，而 $p_{ij}^{(k)}(t)$ 在 $t\geqslant 0$ 上連續$(i,j=1,2,\cdots,n;\ k=1,2)$。如果

1) $p_{ii}(t)\leqslant -r$, $r>0$, $t\geqslant T\geqslant 0$

2) $\int_0^{+\infty}|p_{ii}(\tau)|d\tau<+\infty$, $\int_0^{+\infty}|p_{ij}^{(2)}(\tau)|d\tau<+\infty(i,j=1,2,\cdots n,\ i\neq j)$

3) $p_{ij}^{(1)}(t)\to 0$，当$t\to\infty$，$(i>j)$

4) $p_{ij}^{(1)}(t)(i<j)$在$t\geqslant 0$上有界

則存在常数$k(k>0)$和ρ $(0<\rho<1)$ 使得組(1.1)的解滿足估値

$$\|x(t)\|\leqslant k\|x(t_0)\|e^{-r\rho t},\qquad t\geqslant t_0\geqslant 0 \qquad (*)$$

从而組(1.1)的解是漸近稳定的。

〔証提示〕 作

$$y=\Phi^{-1}x,$$

推論2　設 $p_{ij}(t)=p_{ij}^{(1)}(t)+p_{ij}^{(2)}(t)(i\neq j)$ 而$p_{ij}^{(k)}(t)$在$t\geqslant 0$上連續$(k=1,2;\cdots i,j=1,2,\cdots n)$，如果可以求得連續可微的对角形陣

$$U(t)=diag\,(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))$$

使得当$t\geqslant t^*\geqslant 0$ (t^*可以充分大)时下列条件成立：

1) $|u_i(t)|\geqslant k_i=const>0$，而

$p_i(t)+u'_i(t)/u_i(t)\leqslant -r(r>0)$，$\int_0^{\infty}|p_{ii}(\tau)|d\tau<+\infty$，或更一般，記

$p_i(t)+u'_i(t)/u_i(t)+p_{ii}(t)\equiv q_i^{(1)}(t)+q_i^{(2)}(t)$，而

$q_i^{(1)}(t)\leqslant -r$,　　$\int_0^{\infty}|q_i^{(2)}(\tau)|d\tau<+\infty$

2) $(u_i(t)/u_j(t))\,p_{ij}(t)\to 0$　($t\to\infty$ 时)$(i>j)$

$(u_i(t)/u_j(t))\,p_{ij}(t)$　有界$(i<j)$

3) $\int_0^{\infty}|(u_i(\tau)/u_j(\tau))\,p_{ij}(\tau)|d\tau<+\infty$　$(i\neq j)$

則存在常数$K(K>0)$和ρ $(0<\rho<1)$使得組(1,1)的解滿足估値

$$\|x(t)\|\leqslant k\|x(t_0)|e^{-r\rho t} \qquad (*)$$

从而組(1.1)的解是漸近稳定的。

〔証提示〕 作

$$y=U(t)x。$$

推論 3　設 $p_{ij}(t)=p_{ij}^{(1)}(t)+p_{ij}^{(2)}(t)$　$(i\neq j)$，而 $p_{ij}^{(k)}(t)$ 在 $t\geqslant 0$ 上連續 $(i,j=1,2,\cdots,n;k=1,2)$，如果

1）$p_i(t)<r$，$r>0$，$t\geqslant t^*\geqslant 0$

$$\int_0^\infty |p_{ii}(\tau)|d\tau<+\infty \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

2）对于 $i<j$ $(i=1,2,\cdots,n-1,\ j=2,3,\cdots,n)$ $p_{ij}^{(1)}(t)$ 是 t 的多項式且它們的次数最高者为 k_j 次，而

$$\int_0^\infty t^{-k_j}|p_{ij}^{(2)}(t)|dt<+\infty$$

3）对于 $i>j\,(i=2,3,\cdots n,\ j=1,\cdots,n-1)$

$$p_{ij}^{(1)}(t)=O\left(t^{\alpha_j-\alpha_i-\eta_{ij}}\right)$$

$$\int_0^\infty t^{\alpha_i-\alpha_j}\ |p_{ij}^{(2)}(t)|dt<+\infty$$

其中

$$\eta_{ij}=const>0,\quad \alpha_1=0\quad \alpha_i=\sum_{s=2}^{i}k_s$$

則存在常数 $k(k>0)$ 和 $\rho\,(0<\rho<1)$ 使得組(1,1)的解滿足估值

$$\|x(t)\|\leqslant k\|x(t_0)\|e^{-r\rho t}\quad ,\ t\geqq t_0\geqslant 0$$

从而組(1.1)的解是漸近穩定的。

例 1　考慮綫性組

$$dx_1/dt=(aCost-b)x_1+(t+g/t^\lambda)x_2 \tag{1.21}$$

$$dx_2/dt=\frac{1}{(t+1)^{1+\delta}}x_1+(cSint-d)x_2$$

其中常数 $\delta>0$，$\lambda\geqslant 0$，$|a|<b$，$|c|<d$，g 任意

显見，組(1.21)滿足推論 3 的一切条件，因此它的解是漸近穩定的。

在文〔1〕中証明过当 $a=c=g=0$，$b=d=1$ 时組(1.21)是漸近穩定的。然而当 $a^2+c^2\neq 0$ 时，文〔1〕的方法却失效。又对于 $a=c=g=0$，$b=d=1$，$\delta=2$ 的情形也被文〔2〕考慮过，但文〔2〕仅能証明这一特殊情形是稳定的。

§2 非綫性系統

現在我們把§1中获得的結論推广到考虑非綫性微分方程組

$$dx/dt = A(t)x + p(t)x + f(t,x) \tag{2.1}$$

其中n阶方陣$A(t)$，p(t)与§1相同。而$f(t,x)$是在域Ω: $t \geqslant 0$，$\|x\| \leqslant H(H>0)$上的n維連續向量且关于x滿足 *Lipschitz* 条件

由$p(t)$的裂分(1.4)可写

$$dx/dt = A(t)x + [P_1(t) + P_2(t)]x + f(t,x) \tag{2.1'}$$

定理2.1 假設定理1.1中条件(Ⅰ$_1$)，(Ⅱ$_1$)及(Ⅲ$_1$)成立，又設

$$\|f(t,x)\| \leqslant g(t)\|x\|,\quad (t,x)\in\Omega \tag{Ⅴ$_1$}$$

$$\int_0^{\infty} g(t)dt \leqslant Gt^{\delta} + R,\quad G = const \geqslant 0$$

那么，如果下面表1中八种情形有任一情形成立，則組(2.1′)的零解$x=0$漸近穩定

表 1

	$\alpha=1$		$\alpha<1$	
$\beta=1$	$\gamma>n(C+D+G)$	$\gamma>n(C+D)$	$\gamma>n(D+G)$	$\gamma>nD$
$\beta<1$	$\gamma>n(C+G)$	$\gamma>nC$	$\gamma>nG$	
	$\delta=1$	$\delta<1$	$\delta=1$	$\delta<1$

〔証〕 选取ξ：$\|\xi\|<H$，設$x(t)$：$x(t^*)=\xi$为組(2.1′)的解，今变动$t>t^*$使当$t^* \leqslant \tau \leqslant t$时$\|x(\tau)\|<H$，于是在这些条件下有

$$x(t) = Y(t)r(t^*)Y(t^*) + \int_{t^*}^{t} Y(t)Y^{-1}(\tau)\Big\{\Big[P_1(\tau)+P_2(\tau)\Big]x(\tau) + f(\tau,x(\tau))\Big\}d\tau$$

由(1.3)及条件(Ⅰ$_1$)，(Ⅱ$_1$)，(Ⅲ$_1$)，(Ⅳ$_1$)和应用 *Bellman* 不等式計算得

$$\|x(t)\| \leqslant n\|x(t^*)\|exp\Big\{-rt\Big[1 - \frac{nC}{r}t^{\alpha-1} - \frac{nD}{r}t^{\beta-1} \tag{2.2}$$

$$- \frac{nG}{r}t^{\delta-1} - \frac{3nR+rt^*}{rt}\Big]\Big\}$$

易見，必存在常数$\rho(0<\rho<1)$及足够大的$T \geqslant t^*$使B对于表1中任一情形，当$t \geqslant T$时皆有

$$1-\frac{nC}{r}t^{\alpha-1}-\frac{nD}{r}t^{\beta-1}-\frac{nG}{r}t^{\delta-1}-\frac{3nR+rt^*}{rt}\geqslant\rho \tag{2.3}$$

又由（〔4〕，$pp.8$，13－15）可知：可选取常数 $\varepsilon: 0<\varepsilon<H$ 和 $\eta: 0<\eta<min(\varepsilon/n,\varepsilon)$ 使得当 $\|x(t^*)\|<\eta$ 时

$$\|x(t)\|\leqslant\|x(t^*)\|e^{k(t-t^*)}<\varepsilon<H,\quad t^*\leqslant t\leqslant T \tag{2.4}$$

于是，由(2.2)，(2.3)及(2.4)可証得：当 $\|x(t^*)\|<\eta$ 时，对于一切 $t\geqslant t^*$ 皆有：

$$\|x(t)\|\leqslant n\|x(t^*)\|e^{-r\rho t}$$

由此可知組(2.1′)的零解 $x=0$ 是漸近稳定的。

特别，关于 $P(t)$ 的裂分(1.8)，此时

$$\begin{aligned} dx/dt &= \Lambda(t)x+P(t)x+f(t,x) \\ &\equiv \Lambda(t)x+[A(t)+B(t)]x+f(t,x) \end{aligned} \tag{2.1''}$$

我們用类似于定理1.2的証明方法，同样可以由定理2.1証得：

定理2.2　假設定理1.2条件(I_2)，(II_2)(III_2)及(IV_2)和定理2.1中条件(V_1)成立，則对于表Ⅱ中八种情形的任一情形，組(2.1″)的零解 $x=0$ 皆漸近稳定，这里所謂表Ⅱ即从表Ⅰ中仅解除限制 $r>nC$，$r>nD$ 而成。

例2　考虑非綫性組〔1〕

$$\begin{aligned} dx_1/dt &=(-3/2+aSint)x_1+tx_2+e^tx_1^2+t^2x_2^2 \\ dx_2/dt &=\frac{1}{(t+1)^2}x_1+(-2+bCost)x_2+(t+1)x_1^2+(loqt)x_2^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中常数 $|a|\leqslant\frac{1}{4}$，$|b|\leqslant\frac{1}{2}$

特別，对于 $a^2+b^2=0$ 的情形是文〔1〕所考虑的，并且証明了此情形零解 $x_1=x_2=0$ 是漸近稳定的，現在我們利用剛建立的定理往証組(2.5)(不一定要 $a^2+b^2=0$)的零解也漸近稳定

事实上，置

$$y_1=u_1(t)x_1=te^tx_1$$
$$y_2=u_2(t)x_2=t^2e^tx_2$$

于是組(2.5)可化为

$$\begin{aligned} dy_1/dt &=(-1/2+1/t+aSint)y_1+y_2+\frac{1}{t}y_1^2+\frac{1}{te^t}y_2^2 \\ dy_2/dt &=\frac{t}{(t+1)^2}y_1+(-1+2/t+bCost)y_2+\frac{t+1}{e^t}y_1^2+\frac{loqt}{t^2e^t}y_2^2 \end{aligned}$$

由計算可驗証組(2.6)滿足定理2.2中情形 $\alpha=\delta=\frac{1}{2}<1$，$\beta=1$ 的一切条件，故組(2.6)的零解 $y_1=y_2=0$ 漸近稳定，从而組(2.5)的零解 $x_1=x_2=0$ 漸近稳定。

参 考 文 献

〔1〕 許淞庆，王高雄，中山大学学报（自然学科）1－2(1963)
〔2〕 Н. Я. Лященко, ДАН СССР, Т. 96, №2 (1954)
〔3〕 J. H. Hale and A. P. Stokes, J. Math. Anal. and Appl. Vol. 3, №1 (1961)
〔4〕 E. A. Coddington and N. Lovinson, Theory of ordinary differential equations. (1955)
〔5〕 R. Bellman, Stability theory of differential equations (1953)
〔6〕 А. В. Костин Труды Одесского Гос. ун-та. Год. XC11. т.146, серия матем. наук вып. 6(1956)

Appraisal of Nonautonomous Systems for Their Asymptotic Stability

Ean Dak

Abstract

In this puper we discuss the linear system

$$dx/dt = \Lambda(t)x + P(t)x \tag{1.1}$$

Where $\Lambda(t)$ is a diagonal matrix and p(t) may be separated into arbitrary matrices $P_1(t)$ and $P_2(t)$ or into upper and lower triangular matrices A(t) and B(t). With the suitable bounds for the relations in their coefficients, we have asymptotic stability as listed in tne theorems 1.1 and 1.2 respectively.

By the way, we also consider the nonlinear system

$$dx/dt = \Lambda(t)x + P(t)x + f(t,x). \tag{2.1}$$

With the alike relations imposed on the linear part and a simple relation on the nonlinear part f(t.x)we have the asymptotic stability of the trivial solution as stated in the theorems 2.1 and 2.2.