

# Чаплыгин方程的唯一性定理<sup>(\*)</sup>

吳 茲 潛

(数学力学系)

## 摘 要

本文利用a—b—c方法解Чаплыгин方程的Tricomi問題唯一性定理。

Ф. И. Франкль<sup>[1]</sup>在1945年曾經證明：若系数 $k(y)$ 是二阶連續可微，單調遞增的函数，且 $yk(y) \geq 0$ ， $k(0) = 0$ ，并且适合于

$$f(y) = 2\left(\frac{k}{k'}\right)' + 1 \geq 0, \quad y < 0 \quad (1)$$

則Чаплыгин方程

$$k(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

的Tricomi問題的解是唯一的。

$k(y)$ 在上述的条件下，M. H. Protter<sup>[2]</sup>，对Франкль的結果作了推广：当 $0 \geq y \geq -y_0$  ( $y_0 > 0$ )时， $f(y) \geq 0$ ，而当 $y < -y_0$ 时， $f(y) < 0$ 。在边界附加某些条件时。Tricomi問題的解是唯一的。

1955年吳新謀、丁夏畦<sup>[3]</sup>也推广了Франкль的結果，同时由 $f(y)$ 的性質的探討，指出双曲域只能延伸到 $k(y)$ 奇点之上。在边界加上条件的情况下，証明Tricomi問題的解的唯一性。

1953年，S. Agmon等<sup>[4]</sup>，証明了

$$f(y) = 4\left(\frac{k}{k'}\right)' + 1 \geq 0, \quad y < 0 \quad (3)$$

时，則 Чаплыгин 方程的 Tricomi 問題解唯一。

本文将指出条件(1)及(3)并非必需的。而  $k(y)$  只要求二阶連續可微及  $k$  是單調

(\*)1964年12月12日收到

遞增的就够了。而獲得的結果似乎比上述的結果好。

方程(2)的係數 $k(y)$ 是二階連續可微的;  $yk(y) \geq 0$ ,  $k(0) = 0$ ;  $k'(y) > 0$ 。

設 $\Gamma_1$ 是在上半平面上的一條可求長的光滑約當曲綫弧, 它的端點在 $X$ 軸上的點 $P$ 和 $Q(Q > P)$ 當 $y < 0$ 時, 方程(2)有兩個實特徵方程是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{-k}}, \quad (4a)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{-k}}, \quad (4b)$$

以 $\Gamma_2$ 表示由(4a)通過點 $Q$ 引伸出來的特徵綫,  $\Gamma_3$ 由(4b)通過點 $P$ 引伸出來的特徵綫。 $\Gamma_2$ 及 $\Gamma_3$ 在下半平面交於點 $S$ 。由 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 所圍成的域記為 $D$ , 域 $D$ 的上半平面部分記為 $D_1$ , 下半平面部分記為 $D_2$ 。

Tricomi問題是在域 $D$ 內求方程(2)的解 $u(x, y)$ , 它在 $\Gamma_1\Gamma_2$ (或 $\Gamma_3$ )上取給定的邊界值。

$k(y)$ 在上述的假設下, 且 $\Gamma_1$ 是關於原點星形的。即

$$xdy - ydx \geq 0。$$

對於 $u \in C^{(1)}(D)$ 函數類, 方程(2)的Tricomi問題的解是唯一的。

考慮積分

$$I = \iint_D \{b(x, y)u_x + C(x, y)u_y\} [k(y)u_{xx} + u_{yy}] dx dy, \quad (5)$$

這兒 $b$ 及 $C$ 是連續函數, 並且是分區可微的, 由下面恒等式

$$\begin{aligned} bku_x u_{xx} &= \frac{1}{2} (bku_x^2)_x - \frac{1}{2} b_x k u_x^2, \\ bu_x u_{yy} &= (bu_x u_y)_y - b_y u_x u_y - \frac{1}{2} (bu_y^2)_x + \frac{1}{2} b_x u_y^2, \\ ck u_y u_{xx} &= (ck u_y u_x)_x - \frac{1}{2} (ck u_x^2)_y + \frac{1}{2} (ck)_y u_x^2 - c_x k u_x u_y, \\ cu_y u_{yy} &= \frac{1}{2} (cu_y^2)_y - \frac{1}{2} c_y u_y^2, \end{aligned}$$

及 Green 公式, 由(5)得

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D \left\{ \frac{1}{2} \{ -kb_x + (kc)_y \} u_x^2 - 2(kc_x + b_y) u_x u_y + \{ b_x - c_y \} u_y^2 \right\} dx dy \\ &+ \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \left\{ \frac{1}{2} (bku_x^2 + 2cku_x u_y - bu_y^2) dy + \frac{1}{2} [cku_x^2 - 2bu_x u_y - cu_y^2] dx \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

由於

$$u \Big|_{\Gamma_1 + \Gamma_2} = 0$$

立得

$$u_x dx + u_y dy = 0, \text{ 在 } \Gamma_1 + \Gamma_2 \text{ 上}$$

由此并由(6)得

$$0 = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{1}{2} \left[ k + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 \right] u_x^2 (bdy - cdx) + \int_{\Gamma_3} \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dy} \right)^2 (-bdy - cdx) + \\ + \iint_D \frac{1}{2} \{ (kc)_y - kb_x \} u_x^2 - 2(kc_x + b_y) u_x u_y + (b_x - c_y) u_y^2 \} dx dy$$

命

$$b = \beta x, \quad C = \begin{cases} \beta y, & \text{当 } y \geq 0 \text{ 时,} \\ -\frac{(-k\alpha)}{k'} & \text{当 } y < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

这儿, 当  $y < 0$  时,  $\alpha$  是一个大于 1 的常数,  $\beta$  是正实数, 而且设

$$\beta = \frac{\sup_{y < 0} (-k)^{\alpha-1} (f(y)+1)}{0} < +\infty \\ f(y) = \left( \frac{k}{k'} \right)' + (\alpha-1), \quad \alpha > 1, \quad y < 0.$$

当  $y \geq 0$  时有

$$(kc)_y - kb_x = \beta y k' \geq 0, \\ b_x - c_y = \beta - \beta = 0, \\ kc_x + b_y = 0, \\ bdy - cdx = \beta(xdy - ydx) \geq 0, \text{ 在 } \Gamma_1 \text{ 上,}$$

当  $y < 0$  时有

$$(kc)_y - kb_x = -k\{\beta - (-k)^{\alpha-1}(f(y)+1)\} > 0, \\ b_x - c_y = \beta - (-k)^{\alpha-1}f(y) > 0, \\ b_y + kc_x = 0.$$

由(4b)立得

$$-bdy - cdx \geq 0, \text{ 在 } \Gamma_3 \text{ 上.}$$

由此立得  $u \equiv 0$ , 在域 D 内.

附記 利用本文的方法还可以证明一般混合问题的解的唯一性定理, 以及其他某些边界问题的唯一性定理.

## 参 考 文 献

- [1] Франкль, Ф.И. О Задаче, С.А.Чаплыгина Для Смешанных До-Н Сверхзвуковых. Течений и вв. АН. СССР СЕРИЯ МАТЕМ, 1945, 9.2, 121—143.

- [ 2 ] Protter, M.H. Uniqueness Theorems for the Tricomi Problem, Part I. J. of Rational Mechanics and Analysis, 2. 107—114(1953).
- [ 3 ] 吳新謀、丁夏畦、查普雷金方程的特里谷米問題的唯一性, 數學學報 5 卷 3 期 (1955) .
- [ 4 ] AGmon, S. Nirenberg, L and Protter, M.H. Maximum Principle for a class of Hyperbolic Equations and Applications to Equations of Mixed Elliptic—Hyperbolic Type, Comm. on pure and Appl. Math., 6, 455—470(1953).

### Uniqueness Theorem of the Чаплыгин's Equation

Wu Tze-chine

#### Abstract

In this paper we resolve the Uniqueness theorem of Tricomi problem of the Чаплыгин's equation by the method of the a-b-c