

非駐定常微組的穩定性

蔣廷詩

(數學力學系)

本文利用改變自變量的方法和 Ляпунов 第二方法來研究綫性組的穩定性問題。對於方程，

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{sj}(t)x_j \quad (s=1, \dots, n) \quad (1)$$

如果係數 $a_{sj}(t)$ 經過四則運算始終只有有限個極值點(即不是無限振動的)，則它的穩定性問題，均可解決。在適當條件下可推廣到非綫性組中去。

以下要用到自變量之變換

$$t = f(\tau),$$

其中 $f(\tau)$ 在 (T_0, ∞) 上是單調增加的連續函數，且當 $\tau \rightarrow \infty$ 時， $f(\tau) \rightarrow \infty$ 。我們稱這樣的變換為“基本變換”。顯然，基本變換的逆變換也是基本變換。容易證明，通過基本變換後 Ляпунов 穩定性保持不變，函數 V 的定號性，有界性也保持不變。

用基本變換很易證明周雪鷗在[1]中之結果。

由於方程(1)中係數之性質，可把(1)式變為：

$$\frac{dx_s}{dt} = \alpha(t) \sum_{j=1}^n [a_{sj} + b_{sj}(t)]x_j \quad (s=1, \dots, n), \quad (2)$$

其中當 t 充分大時， $\alpha(t) > 0$ ；又當 $t \rightarrow \infty$ 時，有 $b_{sj}(t) \rightarrow 0$ 。

$$\text{記常矩陣 } A = (a_{sj})_1^n \quad (3)$$

的特征根為 $\omega_s (s=1, \dots, n)$ 。

以下分別討論 A 陣的各種情況。

I. A陣之一般情形

〔定理1〕1° 若 $\int_{t_0}^{\infty} a(t)dt = \infty$, 而A陣之所有特征根 α_s 均有 $Re \alpha_s < 0$, 則組(2)的零解漸近穩定。

2° 若 $\int_{t_0}^{\infty} a(t)dt = \infty$, 而有 k , 使 $Re \alpha_k > 0$ 時, 則不穩定。

3° 若 $\int_{t_0}^{\infty} a(t)dt < \infty$, 則組(2)之零解穩定但非漸近穩定。

〔証〕在情形1°, 2°, 只要引進基本變換 $\pi = \int_{t_0}^t a(t)dt$, 再用〔2〕中272頁的定理即可得証。

在情形3°, 取 $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, 通過方程組進行估值得到。

〔推論1〕當(2)式中增加非線性項 $a(t)X_s(t, x_1, \dots, x_n)$ 時, 定理仍然成立。其中 X_s 是 $x_1, \dots, x_n$ 的正則函數, 展式不低於二次項, 係數是 t 的有界函數。

II. A陣有 k 個具綫性初級因子的零根

如果A陣(3)有 k 個具綫性初級因子的零根, 其他根均具負實部。通過自變量之基本變換 $\tau = \int_{t_0}^t a(t)dt$, 及因變量的綫性變換, 可變為:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{d\tau} &= B(\tau) \sum_{j=1}^n [b_{ij} + C_{ij}(\tau)] x_j \quad (i=1, \dots, k), \\ \frac{dx_s}{d\tau} &= \sum_{i=k+1}^n a_{si} x_i + B(\tau) \sum_{j=1}^n [b_{sj} + C_{sj}(\tau)] x_j \quad (s=k+1, \dots, n), \end{aligned} \quad (4)$$

其中常矩陣 $\bar{A} = (a_{st})_{k+1}^n$

的特征根均具負實部。且當 $\tau \rightarrow \infty$ 時, $B(\tau) \rightarrow 0$, $C_{ij}(\tau) \rightarrow 0$, $C_{sj}(\tau) \rightarrow 0$, 當 τ 充分大時, $B(\tau) > 0$ 。

$$\text{又記常矩陣 } R = (b_{ij})_1^k \quad (5)$$

的特征根為 $\lambda_i (i=1, \dots, k)$, 則對組(4)有:

〔定理2〕1° 當 $\int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau = \infty$ 且 $Re \lambda_i < 0 (i=1, \dots, k)$

時, 零解漸近穩定。

2° 當 $\int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau = \infty$, 且有 l , 使 $Re \lambda_l > 0$ 時, 則零解不穩定。

3°. 当 $\int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau < \infty$ 时, 零解稳定但非漸近稳定。

〔証〕 在情形1°中, 取定負二次型 $\bar{W}_1(x_1, \dots, x_k)$, $\bar{W}_2(x_{k+1}, \dots, x_n)$, 求出定正二次型 $V_1(x_1, \dots, x_k)$ 及 $V_2(x_{k+1}, \dots, x_n)$ 。使滿足方程

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial V_1}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^k b_{ij} x_j \right) = \bar{W}_1(x_1, \dots, x_k),$$

$$\sum_{s=k+1}^n \frac{\partial V_2}{\partial x_s} \left(\sum_{t=k+1}^n a_{st} x_t \right) = \bar{W}_2(x_{k+1}, \dots, x_n).$$

$$\text{再令 } V = V_1 + V_2 + B(\tau) \sum_{s=k+1}^n \sum_{i=1}^k a_{is} x_i x_s.$$

其中 a_{is} 是待定常数, 用以消去将在 $\frac{dV}{d\tau}$ 中出現的有关 $B(\tau)x_i x_s$ 的項 ($i=1, \dots, k$; $s=k+1, \dots, n$). 以保証 $\frac{1}{B(\tau)} \frac{dV}{d\tau}$ 是定負的。由(1)可証零解是漸近稳定的。

在情形2°中可类似地选取 V 函数。

情形3°用估值的方法証明。

〔推論2〕当方程(4)中各方程都增加非綫性項 $B(\tau)X_s(\tau, x_1, \dots, x_n)$ 后, (X_s 之假設与推論1同), 定理仍然成立。

如果(5)式之矩陣 B 又有实部为零之根, 其他根均具負实部, 且 $\int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau = \infty$, 則必須研究系数 $C_{ij}(\tau)$, 也可类似地作出稳定性之結論, 得到相似的定理。

III. 矩陣 A 具有綫性因子的虛根

若 A 陣(3)具有一对虛特征根, 其他根均具負实部, 則可将(2)式变为:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -\rho x_2 + B(\tau) \sum_{j=1}^n [b_{1j} + C_{1j}(\tau)] x_j, \quad (6)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = \rho x_1 + B(\tau) \sum_{j=1}^n [b_{2j} + C_{2j}(\tau)] x_j,$$

$$\frac{dx_s}{d\tau} = \sum_{t=3}^n a_{st} x_t + B(\tau) \sum_{j=1}^n [b_{sj} + C_{sj}(\tau)] x_j \quad (s=3, \dots, n),$$

其中 $\rho > 0$, 当 τ 充分大时 $B(\tau) > 0$, 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $C_{ij}(\tau) \rightarrow 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), $B(\tau) \rightarrow 0$.

而矩陣 $\bar{A} = (a_{st})_3^n$

的特征根均具負实部, 則对組(6)有:

[定理3] 1° 若 $\int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau = \infty$, $b_{11} + b_{22} < 0$, 零解漸近穩定。

2° 當 $\int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau = \infty$, $b_{11} + b_{22} > 0$, 零解不穩定。

3° 當 $\int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau < \infty$, 零解穩定但非漸近穩定。

[証] 在情形1°時, 我們取

$$V_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{B(\tau)}{\rho} \left\{ (b_{12} + b_{21}) \frac{x_1^2}{2} + \frac{b_{22} - b_{11}}{2} x_1 x_2 \right\},$$

又取定負二次型 $\overline{W}_2(x_3, \dots, x_n)$ 以確定正二次型 $V_2(x_3, \dots, x_n)$, 使滿足

$$\sum_{s=3}^n \frac{\partial V_2}{\partial x_s} \sum_{t=3}^n a_{st} x_t = \overline{W}_2(x_3, \dots, x_n),$$

然後取: $V = V_1 + V_2 + V_3(x_1, \dots, x_n)$

其中 $V_3 = B(\tau) \sum_{s=3}^n (\alpha_s x_1 x_s + \beta_s x_2 x_s)$, 是待定的。选取系数 α_s, β_s 借以消

去將在 $\frac{dV}{d\tau}$ 中出現的 $B(\tau) x_i x_s$ 項 ($i = 1, 2; s = 3, \dots, n$) 以保證 $\frac{1}{B(\tau)} \frac{dV}{d\tau}$

是定負的。由[1]可証得結論成立。

在情形2°, 可類似地选取 V 。

情形3°用估值法証之。

[推論3] 在方程組(6)中, 各方程都增加非線性項:

$B(\tau)X_s(\tau x_1, \dots, x_n)$ 后, (X_s 之假定同推論1)

定理之結論仍然成立。

如果 $b_{11} + b_{22} = 0$, 又 $\int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau = \infty$, 則需由高阶系数 $C_{1j}(\tau), C_{2j}(\tau)$ 來決定, 也有類似的結論。

如果矩陣 $A(3)$ 具有 k 對綫性因子的虛根, 也可類似地判定其穩定性。

IV. 矩陣有 k 重零根

如果矩陣 $A(3)$ 具有 k 重零根, 其餘根均具負實部, 則方程(2)變為:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = B(\tau) \sum_{j=1}^n \left[b_{1j} + C_{1j}(\tau) \right] x_j, \quad (7)$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = x_{i-1} + B(\tau) \sum_{j=1}^n \left[b_{ij} + C_{ij}(\tau) \right] x_j \quad (i = 2, \dots, k),$$

$$\frac{dx_s}{d\tau} = \sum_{t=k+1}^n a_{st}x_t + B(\tau) \sum_{j=1}^n \left[b_{sj} + c'_{sj}(\tau) \right] x_j \quad (S = k+1, \dots, n),$$

其中当 τ 充分大时, $B(\tau) > 0$, 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $B(\tau) \rightarrow 0$, $c'_{ij}(\tau) \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, n$).

矩陣 $\bar{A} = (a_{st})_{k+1}^n$ 之特征根均具負实部, 对于方程(7)有:

[定理4] 1° 若 $\int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau = \infty$. 当 $k = 2$ 时, 若:

$b_{1k} > 0$ 則不稳定. 当 $k > 2$ 时, 若 $b_{1k} \neq 0$, 則不稳定.

2° 若 $\int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau = \infty$, 又 $b_{1k} = 0$. 当 $k = 3$ 时, 若 $b_{1,k-1} + b_{2k} > 0$,

則不稳定. 当 $k > 3$ 时, 若 $b_{1,k-1} + b_{2k} \neq 0$, 則不稳定.

[証] 情形 1°, 作变换 $x_i = \sqrt[k]{B(\tau)}^{K-i} \bar{x}_i$ ($i = 1, \dots, k$) $x_s = \bar{x}_s$ ($S = k+1, \dots, n$), 把方程(7)变为方程(4)之形式, 得到定理2之情形2°, 这时 B 陣(5)有实部为正之特征根 $\lambda_s, \operatorname{Re} \lambda_s = m > 0$, 故关于 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 是不稳定的.

再作变换: $\bar{x}_j = e^{-\frac{m}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt[k]{B(\tau)} d\tau} y_j$ ($j = 1, \dots, n$) 則变换后之方程形式不变, 这时 B 陣的每个特征根均減去了 $-\frac{m}{2}$, 故仍有实部为正的. 所以关于 $y_1, \dots, y_n$ 是不稳定的.

$$\text{由: } x_i = \sqrt[k]{(B(\tau))^{K-i}} e^{\frac{m}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt[k]{B(\tau)} d\tau} \cdot y_i \quad (i = 1, \dots, k),$$

$$x_s = e^{\frac{m}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt[k]{B(\tau)} d\tau} y_s \quad (S = k+1, \dots, n)$$

利用 $\int_{\tau_0}^{\tau} B(\tau) d\tau = \infty$ 可証关于 $x_1, \dots, x_n$ 也是不稳定的.

情形 2°, 作变换 $x_i = \sqrt[k]{(B(\tau))^{K-i-1}} \bar{x}_i$ ($i = 1, \dots, K$)

$x_s = \bar{x}_s$ ($S = k+1, \dots, n$), 仿情形1° 証之.

在 $k = 2, k = 3$ 之其他情形, 必需看高阶系数才能决定. 如果 $k > 3$, $b_{1k} = 0$, $b_{1,k-1} + b_{2k} = 0$, 則需看 $b_{1,k-2} + b_{2,k-1} + b_{3k}$ 之值来决定.

对于 A 陣有重虛根之情形, 可用类似的方法来处理.

V. 各种情形之混合

以上談到矩陣 A 的具綫性因子零根及虛根以及重根之情况. 还可能遇見这些不

同类型实部为零之根之各种各样的組合，若一一討論，將不胜其繁，但基本方法將如上述，結論也大致一样。

例如矩陣 A 具有一对虛根及 K 个具綫性因子的零根时，(2)式变为：

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} &= -\rho x_2 + B(\tau) \sum_{j=1}^n \left[b_{1j} + C_{1j}(\tau) \right] x_j, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \rho x_1 + B(\tau) \sum_{j=1}^n \left[b_{2j} + C_{2j}(\tau) \right] x_j, \\ \frac{dx_i}{dt} &= B(\tau) \sum_{j=1}^n \left[b_{ij} + C_{ij}(\tau) \right] x_j \quad (i = 3, \dots, k+2), \\ \frac{dx_s}{dt} &= \sum_{t=k+3}^n a_{st} x_t + B(\tau) \sum_{j=1}^n \left[b_{sj} + C_{sj}(\tau) \right] x_j \quad (s = k+3, \dots, n),\end{aligned}\quad (8)$$

其中： $\rho > 0$ ，当 τ 充分大时， $B(\tau) > 0$ ，当 $\tau \rightarrow \infty$ 时， $B(\tau) \rightarrow 0$ ， $C_{ij}(\tau) \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, n$)。

矩陣 $\bar{A} = (a_{st})_{k+3}^n$ 之特征根均具負实部。

矩陣 $B = (b_{ij})_3^{k+2}$ 之特征根設为 λ_i ($i = 3, \dots, k+2$)，对方程(8)有：

[定理5] 若 $1^\circ \int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau = \infty$ ，又 $b_{11} + b_{22} < 0$ ， $Re \lambda_i < 0$ ($i = 3, \dots, k+2$)，則零解漸近稳定。

$2^\circ \int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau = \infty$ ， $b_{11} + b_{22}$ 及 λ_i ($i = 3, \dots, k+2$) 中有一个具正实部，

則不稳定。

3° 若 $\int_{\tau_0}^{\infty} B(\tau) d\tau < \infty$ ，則稳定但非漸近稳定。

[推論4] 当8式增加 $B(\tau)x_s(\tau_1 x_1 \dots x_n)$ ($s = 1, 2, \dots, n$) 之非綫性項后，(X. 假定与定理1同)定理之結論不变。

本文承胡金昌、許湫庆两教授之指导，黎百恬老师之帮助，謹致謝意。

参 考 文 献

- [1] 周雪鷗 关于李雅普諾夫第二方法中稳定性及不稳定性定理的推广, 四川大学学报 1960.1
- [2] 許淞庆 常微分方程稳定性理論, 上海科技出版社。1962.

Stability of Nonautonomous Differential Systems

Cheung Ting-si

Abstract

In this paper we propose some sufficient conditions for the stability of a certain type of ordinary differential equations. Use is made of a transformation of the independent variable t and the Liapounov's direct method. We treat with most of the critical cases.