

費米子 Regge 極迹的解析性和閾行為

李 華 鍾

(物 理 系)

摘 要

从 π 介子核子散射振幅出发, 根据 Mandelstam 表示和么正条件。对于奇异量子数为零, 重子数为 1 的費米子 Regge 極迹, 求得了下列結果: (1) 位置参数 $\alpha(s)$ 的解析性, 只有右方物理割无左方动力割, 但是左方有从 $s = 0$ 到 $-\infty$ 的运动学割。(2) 在当 $s < 0$ 时 $\alpha(s)$ 取复数值, 并且还有一条同它或成复共轭 (在 $s < 0$ 范围内) 的 Regge 極迹。这一对極迹它們的 J -宇称相同, 但是空間宇称相反。 $0 < s < (M + \mu)^2$ 时, $\alpha(s)$ 为实数。不同宇称的極迹对 S 之依賴不同。(3) 討論了費米子 Regge 極迹在閾能 ($W_0 = M + \mu$) 附近的行为, 凡是与共振态, 束縛态有关的 Regge 極迹, $\alpha(W_0) \neq 0$ 。求得了在閾附近的表示, 定性方面同玻色子 Regge 極迹相同, (5) 还有一大类 Regge 極迹, 它們同共振态束縛态无关, $\alpha(W_0) = 0$, 这类極迹在能量趋近閾能时, 有无穷多个极点趋于 $\text{Re} J = 0$, (即我們在費米子情况下得到 Gribov-Pomeranchuk 极点凝聚现象), 这类極迹当能量由閾下趋于閾时, 从 J 平面左半平面共轭成对地趋于 $\text{Re} J = 0$ 。当能量从閾上趋于閾时, 成对地从第一和第三象限趋于 $\text{Re} J = 0$ 。所有这些极点实数部分 $\text{Re} \alpha \rightarrow 0$ 比虛数部 $\text{Im} \alpha \rightarrow 0$ 快一或二个数量級。 J 平面原点是一个凝聚点, 这类“非动力”的 Regge 極迹閾行为, 無論对玻色子, 費米子, 以至非相对論勢散射, 定性都相似 (只是凝聚的軸綫和点不同)。它們实际上 S 陣在閾的普遍性质的反映。

§1 导 言

近来基本粒子强相互作用理論方法有了新的发展, 人們把散射振幅看成是复数

*) 1964年3月收到

能量和复数角动量的函数,研究这样的散射振幅的解析性和它的物理解释。势散射的研究⁽¹⁾証明了非相对論S陣在角动量 l 右上半平面 $\text{Re}l > -\frac{1}{2}$ 是 l 的半純函数。复 l 平面上的极点(Regge极点)的位置和留数是能量的函数。随着能量变化,极点位置在 l 平面描成軌迹(Regge极迹)。这些极点有确定的物理意义,当极点位置参数实数部分取物理值时便相应于系統出现束縛态或共振态。它的虚数部分則与系統的态的能級宽度联系。对于某些类型短程势(如叠合湯川势),存在最右方的极点,正是这个极点,决定了散射振幅的高能漸近行为。

复角动量理論的概念很快被移用到相对論S矩陣理論上来⁽²⁾。对相对論S陣在复 l 平面上解析性的研究⁽³⁾,并不象势散射那样直截了当,在势散射时,可以直接写出薛定格方程及其解的漸近形式,由此証明了散射振幅在 l 平面的解析性,再推出散射振幅的漸近行为。(这样相应的Mandelstam表示的有限刪去也就确定了)。可是,在Mandelstam表示和么正条件的基础上研究相对論性S陣时,我們并不知道振幅的漸近形式,不知道刪去次数是否有限次。此外,主道么正条件的完整式由于包含非彈性道的贡献使問題变得复杂,所以人們不得不应用彈性近似的么正条件。对于无自旋粒子两体散射振幅的研究表明⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾,在某些关于刪去或漸近形式和彈性么正条件等的假設下,在一定能量区域内,散射振幅在 l 平面上 $\text{Re}l > 1$ 时为半純函数。把解析区域再推广到 $\text{Re}l \leq 1$ 还是未解決的問題,对于有自旋粒子散射振幅的解析性还未見系統的研究。在本文中,我們不討論散射振幅的問題,我們將假設所需要的总角动量平面上的解析性。

从复角动量理論的观点来看,物理系統的束縛态和共振态的研究归結为Regge极迹的研究。在相对論性理論中,完全解出Regge极迹是一个困難的問題,目前有一些工作研究了Regge极迹在能量平面的解析性質和在某些能量区域的局部性質。对于玻色子Regge极迹,Грибов和померанчук⁽⁶⁾,Barut和Zwanziger⁽⁵⁾等的研究得到了位置参数和留数参数在能量平面的解析性,也討論了Regge极迹在閾附近的行为。Грибов和померанчук⁽⁷⁾还发现了在閾附近有Regge极点的凝聚现象,他們指出在能量趋于閾能时,有无穷多个玻色Regge极点趋向集中于 $\text{Re}l = -\frac{1}{2}$ 綫上。还有不少工作,在已知极迹参数解析和閾行为的基础上对真空极迹和 ρ 介子极迹性質,作更細緻的討論。或者同实验結合作求出极迹的半經驗解析式。

对于費米子Regge极迹,情况較為复杂一些,Грибов⁽⁸⁾曾从純粹运动学的考虑和振幅漸近形式的考虑研究了費米子Regge极迹在能量平方 $s < 0$ 时的一个性質。也討論了交叉道費米子Regge极点同主道大角度散射微分截面的联系⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

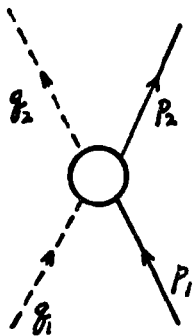
本文从几介子核子散射振幅出发,利用Mandelstam表示,求得了对应于奇异量子数为零,重子数为1的費米子Regge极迹的位置参数 $\alpha(s)$ 的解析性,然后加入么正条件,用类似于文献⁽⁵⁾的方法,求得費米子Regge极迹的閾行为。我們还求出当能量趋近閾能时,还有另一类极点向 $\text{Re}l = 0$ 凝聚。

§2 中我們概述了 πN 散射振幅的运动学, 我們的工作分述于 § 3, 4, 5, 6, .
 § 3 討論了开拓到复数总角动量 J 的分波公式, 和分波振幅的解析性, 其中某些分波振幅式子在^[9]也有过。§ 4 討論了 $\alpha(s)$ 的解析性, 我們得出 $\alpha(s)$ 无左方动力割只有物理割, 在左方有运动学割从 $-\infty$ 到 0。一般以为^{[8][9]} 由于 πN 振幅有运动学奇点 $\sqrt{s}$, 所以不在 s 平面討論, 我們的做法表明, $\sqrt{s}$ 运动学奇点实际上也不妨碍我們在 s 平面討論。§ 5 討論了 $\alpha(s)$ 在 $s < (M + \mu)^2$ 时的性質。在 $s < 0$ 时, α 为复数, 这时就有另一条同它互为复共轭 ($s < 0$) 的极迹, 相应于相同的 J -宇称而不同的空間宇称。在 $0 < s < (M + \mu)^2$ 时极迹为实数。§ 6 根据分波振幅的解析性和么正条件討論极迹的閾行为, 我們区别在閾附近两类本質不同的极迹的行为。一类相应于“动力的”, 它們与束縛或共振态密切有关。另一类完全是“非动力的”。它們同束縛态共振态无关。后者在閾附近向 $\text{Re} J = 0$ 聚集。这种凝聚現象是 Грибов 和 Померанчук^[7] 在玻色子情况下指出的, 我們在費米子情况下, 并用不同的推导方法得出。

§2 运动学

π 介子核子散射的运动学是众所周知的^[10], 为了引入必要的物理量和符号, 我們扼要綜述如下。

令 $p_1, q_1; p_2, q_2$ 分別表散射前后核子和 π 介子的四維动量



(图 1)

$$\begin{aligned} p_1 + q_1 &\longrightarrow p_2 + q_2 \\ \text{定义} \quad \left. \begin{aligned} s &= -(p_1 + q_1)^2 \\ u &= -(p_2 - q_1)^2 \\ t &= -(q_1 - q_2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$s + u + t = 2M^2 + 2\mu^2 \quad (2.2)$$

M, μ 各为核子, π 介子的质量。又令 W 为质心坐标系中 πN 系統的总能量, q 为质心坐标中三維动量数值, θ 为质心坐标系中散射角, 則有

$$\left. \begin{aligned} s &= W^2 \\ t &= -2q^2(1 - \cos\theta) \\ u &= 2M^2 + 2\mu^2 - W^2 + 2q^2(1 - \cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$q^2 = \frac{[s - (M + \mu)^2][s - (M - \mu)^2]}{4s} \quad (2.4)$$

散射不变振幅 T 同 S 矩陣以有下式:

$$S_{fi} = -\delta_{fi}(2\pi)^4 i \delta^{(4)}(p_2 + q_2 - p_1 - q_1) \left(\frac{M^2}{4 E_1 E_2 W_1 W_2} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}_2 T u, \quad (2.5)$$

E_1, E_2, W_1, W_2 為核子, 介子的總能量. $\bar{u}u = 1$.

不變振幅的自旋結構為:

$$T = -A(s, u, t) + i \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{Q} B(s, u, t) \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2}{2}$$

為簡單起見, 我們略去同位旋。

物理振幅 $\mathcal{F}$ 的定義為

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\text{自旋}} |\langle f | \mathcal{F} | i \rangle|^2 \quad (2.7)$$

$$\mathcal{F} = f_1 + \frac{\overset{\rightarrow}{(\sigma \cdot q_1)} \overset{\rightarrow}{(\sigma \cdot q_2)}}{\overset{\rightarrow}{|q_1|} \overset{\rightarrow}{|q_2|}} f_2 \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{(W+M)^2 - \mu^2}{16\pi W^2} [A + (W-M)B] \\ f_2 &= \frac{(W-M)^2 - \mu^2}{16\pi W^2} [-A + (W+M)B] \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

f_1, f_2 按總角動量 j 的分波分解為

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \sum f_{j-\frac{1}{2}}^j P'_{j+\frac{1}{2}}(z) - \sum f_{j+\frac{1}{2}}^j P'_{j-\frac{1}{2}}(z) \\ f_2 &= \sum f_{j+\frac{1}{2}}^j P'_{j+\frac{1}{2}}(z) - \sum f_{j-\frac{1}{2}}^j P'_{j-\frac{1}{2}}(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

其中, $P_j(z)$ 為勒上特多項式, 為方便計引入

$$z = \cos \theta$$

$$f_{\pm}^j = f_{j \pm \frac{1}{2}}^j$$

$$\text{而} \quad f_{\mp}^j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz [P_{j \mp \frac{1}{2}}(z) f_1(z) + P_{j \pm \frac{1}{2}}(z) f_2(z)] \quad (2.11)$$

由 (2.9) (2.10) (2.11) 得

$$\begin{aligned} f_{\mp}^j &= \frac{[(W+M)^2 - \mu^2]}{32\pi W^2} [A_{j \mp \frac{1}{2}} + (W-M)B_{j \mp \frac{1}{2}}] + \frac{[(W-M)^2 - \mu^2]}{32\pi W^2} [-A_{j \pm \frac{1}{2}} \\ &\quad + (W+M)B_{j \pm \frac{1}{2}}] \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{j \pm \frac{1}{2}}(s) &= \int_{-1}^1 P_{j \pm \frac{1}{2}}(z) A(s, u, t) dz \\ B_{j \pm \frac{1}{2}}(s) &= \int_{-1}^1 P_{j \pm \frac{1}{2}}(z) B(s, u, t) dz \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Mac Dowell^[11] 首先指出, $f_{\pm}^j$ 視為 W 函數時, 有下述所謂“反射性質”:

$$f_{+}^j(W) = f_{-}^j(-W) \quad (2.14)$$

(2.13) 表明, $f_{\pm}^j$ 有 $\sqrt{s}$, 在 $s = 0$ 有運動學奇點, 在 § 6 我們將要應用 $f_{\pm}^j$ 的么正條件, 我們最好明顯地避開這個支點, 如採用螺旋振幅 (Helicity Amplitude), 是可以得到無運動學奇點的振幅^[10], 但是 § 6 要用到的是分波相移表示的么正條件

$$f_{\pm}^j = \frac{e^{i\delta_{\pm}} \sin \delta_{\pm}}{q} \quad (2.15)$$

而螺旋振幅是 f_{+}^j, f_{-}^j 的疊合, 它失去了使用彈性么正條件簡單形式 (2.15) 的方便。因此, 不用螺旋振幅, 在 § 6 我們在 W 平面上討論。但是, 當研究 $\alpha(s)$ 解析性時 (§ 4), 我們仍可以在 s 平面上討論。

為避免 (2.13) 或分母 $W = 0$ 極點把分波振幅定義為

$$\frac{W^2 e^{i\delta_{\pm}} \sin \delta_{\pm}}{q} \quad (2.16)$$

從量子力學知道, 在閾附近 $\delta_{\pm} \sim q^{2l+1}$, 現在我們先注意 f_{-}^j , 當能量趨近閾能 $W \rightarrow M + \mu$ 時, (2.16) 式 $\sim q^{2l} \sim q^{2(j-\frac{1}{2})}$, 當 $W \rightarrow -(M + \mu)$ (由反射性質 (2.14) 這相當於 $f_{+}^j, W \rightarrow M + \mu$ 時) 時, (2.16) $\sim q^{2l+2} \sim q^{2(j+\frac{1}{2})}$ 。此兩情形下, (2.16) 表示的分波振幅均趨於零, 即 (2.16) 表示的分波振幅在閾有零點, 於是 $(f_{\pm}^j)^{-1}$ 有 $q = 0$ 極點, 此外當 j 開拓到複數時有 $f_{\pm}^j$ 有 $q = 0$ 運動學分支點。這些在以下討論 (§ 4.6) 均應避免, 為消除這兩缺點, 引入

$$a_{-}^j(W) = \frac{W^2}{(W+M)^2 - \mu^2} \frac{e^{i\delta_{-}} \sin \delta_{-}}{q^{2j}} \quad (2.17)$$

$$\text{或} \quad a_{-}^j(W) = \frac{32\pi W^2}{[(W+M)^2 - \mu^2] q^{2j-1}} f_{-}^j(W) \quad (2.18)$$

f_{-}^j 是以 (2.15) 表示。

同樣引入

$$a_{+}^j(W) = \frac{32\pi W^2}{[(W-M)^2 - \mu^2] q^{2j-1}} f_{+}^j(W) \quad (2.19)$$

$$a_{\pm}^j(W) = -a_{\mp}^j(-W) \quad (2.20)$$

易見 $a_{\pm}^j$ 已無一切運動學奇點, 並有正確的閾行為。

在 § 3 我們也將看到, 這樣選擇的 $a_{\pm}^j$ 當 j 開拓到複數 J 時, 也有最簡單的解析性。 $a_{\pm}(J, W)$ 同 $a_{\pm}^j(W)$ 在 W (或 s) 平面的解析性相同。

§ 3 分表振幅的解析开拓

假設 A 和 B 滿足有限次刪去的 Mandelstam 表示

$$A(s, u, t) = \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} du' \frac{A_u(s, u')}{u' - u} + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \frac{A_t(s, t')}{t' - t} \quad (3.1)$$

$$A_u(s, u') = \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{a_{12}(s', u')}{s' - s} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{2M^2 - 2\mu^2 - u'} ds' \frac{a_{23}(s, t')}{s' - s} \quad (3.2)$$

$$A_t(s, t') = \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{a_{13}(s, t')}{s' - s} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{(M-\mu)^2 - t'} ds' \frac{a_{23}(s, u')}{s' - s}$$

上式還應有 N 次有限次刪去沒有明顯寫出。 $B(s, u, t)$ 滿足類似的色散關係，但還要加上“核子極點項”。

引入分波投射

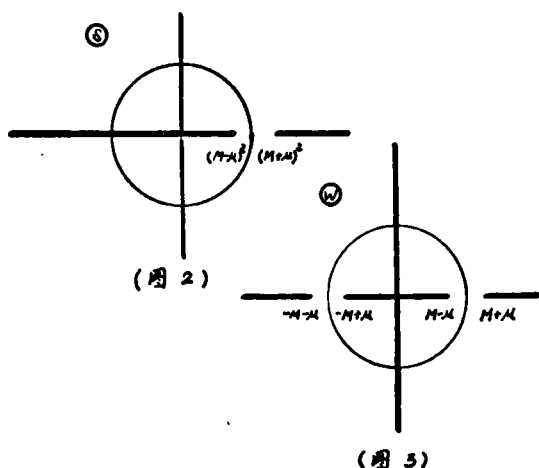
$$A_{j\pm\frac{1}{2}}(s) = \int_{-1}^1 dz A(s, u, t) P_{j\pm\frac{1}{2}}(z) \quad (3.3)$$

$$A(s, u, t) = \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} du' \frac{A_u(s, u')}{u' - [2M^2 + 2\mu^2 - s + 2q^2(1-z)]} + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \frac{A_t(s, t')}{t' + 2q^2(1-z)} \quad (3.4)$$

$$A_{j\pm\frac{1}{2}}(s) = \frac{1}{\pi q^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' A_t(s, t') Q_{j\pm\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{t'}{2q^2}\right) + \frac{(-1)^{j\pm\frac{1}{2}}}{\pi q^2} \int_{(M+\mu)^2 - (M^2 - \mu^2)^2/s}^{\infty} du' A_u(s, u') + \frac{(M^2 - \mu^2)^2}{s} Q_{j\pm\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{u'}{2q^2}\right) \quad (3.5)$$

$Q_{j\pm\frac{1}{2}}(\nu)$ 為第二類勒上特函數。上式當 $j > N$ 成立。

物理值 j 的 $A_{j \pm \frac{1}{2}}$ 在 s 或 W 平面的解析性是已知的^{〔10〕〔11〕}。可以概括于(图2), (图3)。



对于 $B_{j \pm \frac{1}{2}}$, 除了(图2)(图3)所列出的割线外, 当 $j = \frac{1}{2}$ 时在 $S = M^2 (W = \pm M)$ 还有极点, 在一般情形下 $S = \left(\frac{(M^2 - \mu^2)^2}{M^2}, M^2 + 2\mu^2 \right)$, (W 平面则在 $\left(\frac{M^2 - \mu^2}{M}, + (M^2 + 2\mu^2)^{\frac{1}{2}} \right)$, $\left(-\frac{M^2 - \mu^2}{M}, - (M^2 + 2\mu^2)^{\frac{1}{2}} \right)$ 之間有短割线, 这些都是由于核子极点項引起的, 下面将看到这些区别对我们的讨论并没有影响。

现在把 $A_{j \pm \frac{1}{2}}$, $B_{j \pm \frac{1}{2}}$ 开拓到复数角动量 J . (3.5) 不是合适的开拓式子。因为 $(-1)^{J \pm \frac{1}{2}}$ 导致沿 $J = \pm i\infty$ 开拓的结果不同。把(3.5)写成

$$A_{j \pm \frac{1}{2}} = A_{j \pm \frac{1}{2}}^{(1)} + (-1)^{j \pm \frac{1}{2}} A_{j \pm \frac{1}{2}}^{(2)} \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{引入定义} \quad A_{j \pm \frac{1}{2}}^{(\sigma)} &= A_{j \pm \frac{1}{2}}^{(1)} \mp A_{j \pm \frac{1}{2}}^{(2)} \\ A_{j \pm \frac{1}{2}}^{(0)} &= A_{j \pm \frac{1}{2}}^{(1)} \pm A_{j \pm \frac{1}{2}}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

把物理值 j 的公式换成复数域 J

$$\left. \begin{aligned}
 A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e)}(J, s) &= \frac{1}{\pi q^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' A_t(s, t') Q_{J \pm \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t'}{2q^2}\right) \\
 &\mp \frac{1}{\pi q^2} \int_{(M+\mu)^2 - \frac{(M^2 - \mu^2)^2}{s}}^{\infty} du' A_u \left(s, u' + \frac{(M^2 - \mu^2)^2}{s}\right) Q_{J \pm \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u'}{2q^2}\right) \\
 A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(o)}(J, s) &= \frac{1}{\pi q^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' A_t(s, t') Q_{J \pm \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t'}{2q^2}\right) \\
 &\pm \frac{1}{\pi q^2} \int_{(M+\mu)^2 - \frac{(M^2 - \mu^2)^2}{s}}^{\infty} du' A_u \left(s, u' + \frac{(M^2 - \mu^2)^2}{s}\right) Q_{J \pm \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u'}{2q^2}\right)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

上式当 $J \pm \frac{1}{2} > N$ 时成立。

完全重复 Грибов^[3] 或 Squires^[12] 的論証, 可以証明(3.8)是滿足要求的唯一的开拓, 当 $J \pm \frac{1}{2}$ 取物理值时, 它們与物理的振幅重合。当 $J \pm \frac{1}{2} > N$, 它們是 J 的解析函数, 开拓是唯一的。当 $J \pm \frac{1}{2}$ 向 $\leq N$ 开拓时, 振幅出現 J 的奇異点, 本文不討論 A 在 J 平面的解析性問題, 我們假設 $J > J_{min}$ 时振幅是 J 的半純函数, 使振幅具有我們所需的半純性。

对于 B , 我們同样引入

$$\left. \begin{aligned}
 B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e)}(J, s) &= \frac{1}{\pi q^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' B_t(s, t') Q_{J \pm \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t'}{2q^2}\right) \\
 &\mp \frac{1}{\pi q^2} \int_{(M+\mu)^2 - \frac{(M^2 - \mu^2)^2}{s}}^{\infty} du' B_u \left(s, u' + \frac{(M^2 - \mu^2)^2}{s}\right) Q_{J \pm \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u'}{2q^2}\right) \\
 B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(o)}(J, s) &= \frac{1}{\pi q^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' B_t(s, t') Q_{J \pm \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t'}{2q^2}\right) \\
 &\pm \frac{1}{\pi q^2} \int_{(M+\mu)^2 - \frac{(M^2 - \mu^2)^2}{s}}^{\infty} du' B_u \left(s, u' + \frac{(M^2 - \mu^2)^2}{s}\right) Q_{J \pm \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u'}{2q^2}\right)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

我們注意在(3.9)式中, 相应于 Mandelstam 表示中的核子极点項沒有写出。当明显写入这一項时就意味着核子极点在 J 平面上是不动的, 不是 Regge 极点。也就是說核子是“基本粒子”。近来不少人建議^[2], 核子同其他共振态一样都是 Regge 极点, 它也属某一 Regge 极迹。这样在 $B_{J \pm \frac{1}{2}}(J, s)$ 中就不应包含孤立不动的核子极点項。

应用(2.12):

$$\begin{aligned} f_{\pm}^{(e), (0)}(J, W) = & \frac{[(W+M)^2 - \mu^2]}{32\pi W^2} \left[A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e), (0)}(J, s) \right. \\ & \left. + (W-M) B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e), (0)}(J, s) \right] + \frac{[(W-M)^2 - \mu^2]}{32\pi W^2} \left[-A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e), (0)}(J, s) \right. \\ & \left. + (W+M) B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e), (0)}(J, s) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

(2.18), (2.19)得

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm}^{(e), (0)}(J, W) = & \mp \frac{A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e), (0)}}{q^{2J-1}} + (W \pm M) \frac{B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e), (0)}}{q^{2J-1}} + \\ & + \frac{[(W \pm M)^2 - \mu^2]}{2W^2} \left[\pm \frac{A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e), (0)}}{q^{2J+1}} + (W \mp M) \frac{B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e), (0)}}{q^{2J+1}} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

$f_{\pm}^{(e), (0)}$ 或 $\alpha_{\pm}^{(e), (0)}$ 是具有一定的空間宇称和 J -宇称 (J -Parity 或 Signature) 的分波, 振幅士号相应于空間宇称 $(-1)^{J \pm \frac{1}{2}}$, $(e), (o)$ 分別表示偶, 奇 J -宇称, 偶 J -宇称表示当 $j + \frac{1}{2}$ 为奇, $j - \frac{1}{2}$ 为偶时 (即 $J = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \dots$) $\alpha^{(e)}(J)$ 与物理振幅重合, 奇 J -宇称表示当 $j + \frac{1}{2}$ 为偶, $j - \frac{1}{2}$ 为奇时 (即 $J = \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots$) $\alpha^{(o)}(J)$ 与物理振幅重合。

現在討論 $A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e), (o)}$ $B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(e), (o)}$ 在 S 或 W 平面的解析性, 它們同物理值 j 的振幅的解析性有两点不同。

(1) 在求得物理 j 值振幅 $A_{j \pm \frac{1}{2}}$, $B_{j \pm \frac{1}{2}}$ 解析性时, 众所周知^[10], 吸收部分 A_t , A_u (或 B_t , B_u 下同) 第二項 (參看(3.2)式) 的割綫实际上并无贡献, 它們的出現仅仅是由于在 Mandelstam 表示中把 $\frac{1}{(t'-t)(u'-u)}$ 分解为部分分式才出現 $\frac{1}{s'-s}$ 因子, 当 A_t, A_u 相加后 $s'-s$ 就消去^[10]。但是当我们把振幅分成 (e) , (o) 之后, 又把 J 视为复数, 此时, 上述抵消不复存在, 这可以简单地直接計算驗

証, 因而 $A_{\pm}, A_u$ 对 $A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon), (0)}$ 在 s 平面贡献一割綫从 $-\infty$ 到 $(M-\mu)^2 - 4\mu^2$ 。相应地在 W 平面贡献为从 $-\sqrt{(M-\mu)^2 - 4\mu^2}$ 到 $+\sqrt{(M-\mu)^2 - 4\mu^2}$ 及从 $-i\infty$ 到 $+i\infty$ 不过这些新增的割綫都刚好落在图2图3已給的割之內。因而不增加新的割縫, 但是我們注意, 这些新增的割綫仍要区别出来, 考虑 Regge 极迹的解析性时 (§4) 这些贡献非另加处理不可。

(2) 另一不同处在 $Q_{J \pm \frac{1}{2}}(\nu)$, 当 $J \pm \frac{1}{2}$ 为整数时, $Q_{J \pm \frac{1}{2}}(\nu)$ 的割綫从 $\nu = -1$ 到 $+1$, 当 $J \pm \frac{1}{2}$ 为非整数时, 割綫从 $-\infty$ 到 1 。这样 $A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon), (0)}$ 在全实軸有割綫。如同 $\pi-\pi$ 振幅一样, 这割綫可消去一部分。应用

$$Q_{\lambda}^{(\nu)} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\frac{3}{2}) (2\nu)^{\lambda+1}} F\left(\frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda}{2}+1, \lambda+\frac{3}{2}, \frac{1}{\nu^2}\right) \quad (3.12)$$

超几何函数 $F(a, b; c; \frac{1}{\nu^2})$ 割綫由 $\nu = -1$ 到 $+1$, 引入

$$\left. \begin{aligned} A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon), (0)} &= \frac{A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon), (0)}}{q^{2J \pm 1}} \\ B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon), (0)} &= \frac{B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon), (0)}}{q^{2J \pm 1}} \end{aligned} \right\} (*注) \quad (3.13)$$

則 A, B 的解析性同物理值 j 的 $A_{J \pm \frac{1}{2}}, B_{J \pm \frac{1}{2}}$ 的解析性 (图(2,3)相同)。

(3.11) 变为:

$$\begin{aligned} a_{\pm}^{(\epsilon), (0)}(J, W) &= \pm A_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon), (0)} + (W \pm M) B_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon), (0)} + \\ &+ \frac{[(W \pm M)^2 - \mu^2]^2}{2W^2} \left[\pm A_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon), (0)} + (W \mp M) B_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon), (0)} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

a 在 s 及 W 平面的解析性也就知道了, 它的割綫如图2, 3所示, 但还应記住吸收部分第二項的支点贡献。

§4 Regge 极迹的解析性

我們要討論的 Regge 极点是 $a_{\pm}^{(\epsilon), (0)}(J, W)$ 在 J 平面的极点, 今后专只討論

〔*注〕 由于排印鉛字所限不能用其他字体, 請讀者注意, 公式左端是正体 A, B , 公式右端是斜体 A, B ; 以下各式均請注意区别——編者

$\alpha_{-}^{(\epsilon)}(J, W)$, 从(3.14)看到 $\alpha_{-}^{(\epsilon)}$ 的极点来自 $A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$, $B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ 的极点, 或即 $[A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon)}]^{-1}$ $[B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon)}]^{-1}$ 的要点。設这些方程的根为 $\alpha_{A \pm}^{(\epsilon)}(s)$, $\alpha_{B \pm}^{(\epsilon)}(s)$, 如这些函数各不相同, 則显然它們全是 $\alpha_{-}^{(\epsilon)}$ 的 Regge 极迹, 若其中有相同的话, 例如 $\alpha_{A+}^{(\epsilon)}(s) = \alpha_{B+}^{(\epsilon)}(s)$, 則当这对极点的留数适合某些关系时, 两项可能抵消掉, 而 $\alpha_{-}^{(\epsilon)}$ 不出現这一极迹。不論何种情况, 我們只需要討論 $[A_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon)}]^{-1} = 0$, $[B_{J \pm \frac{1}{2}}^{(\epsilon)}]^{-1} = 0$ 的根解析性足够了。

讓我們討論 $A_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$, (3.8)式可改寫为

$$A_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)} = \frac{1}{\pi q^{2J+1}} \int_{4\mu^2}^{\infty} dx' A_t(s, x') Q_{J-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x'}{2q^2}\right) + \frac{1}{\pi q^{2J+1}} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} dx' A_u(s', x') Q_{J-\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{x' + s - 2M^2 - 2\mu^2}{2q^2}\right) \quad (4.1)$$

应用^[13]

$$Q_{\lambda}(\nu) = \frac{2^{\lambda} [\Gamma(1+\lambda)]^2}{\Gamma(2+2\lambda)} (\nu \pm 1)^{-\lambda-1} F\left(1+\lambda, 1+\lambda; 2+2\lambda; \frac{2}{1 \pm \nu}\right) \quad (4.2)$$

按照 Barut-Zwanziger^[5]的办法, 可以把超几何函数 F 分为两部分。

$$F\left(1+\lambda, 1+\lambda; 2+2\lambda; \frac{2}{1 \pm \nu}\right) = F_0 + F_1 \quad \left. \begin{aligned} F_0 &= F - \sum_{n=-p}^R \sum_{m=0}^{R'} C_n(J) S^n X'^{-m} \\ F_1 &= \sum_{n=-p}^R \sum_{m=0}^{R'} C_n(J) S^n X'^{-m} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

(在 $Q_{J-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x'}{2q^2}\right)$ 中 $1 - \nu = -\frac{x'}{2q^2}$, 在 $Q_{J-\frac{1}{2}}\left(-1 + \frac{x' + s - 2M^2 - 2\mu^2}{2q^2}\right)$ 中 $1 + \nu = \frac{x' + s - 2M^2 - 2\mu^2}{2q^2}$, 而 $q^2 = [s - (M + \mu)^2][s - (M - \mu)^2]/4s$,

因此, F 的展开中包含 x' 的負幕, s 的正負幕)。因为 F_1 是有限項和, 对 S 是解析的, 故 F_0 包含了原来 F 的奇异性, 而 F_1 則不含原来 F 的奇异性。相应地 $A_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ 可以分成两部分

$$A_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)} = A_{J-\frac{1}{2},1}^{(\epsilon)} + A_{J-\frac{1}{2},1}^{(\epsilon)} \quad (4.4)$$

A_0 的重要性质是, 在 $Re(J-\frac{1}{2}) > N-R'$ 时, A_0 是 J 的全纯函数。(N 为 Mandelstam 表示的删去次数), 这是因为在 $Q_{J-\frac{1}{2}}(\nu)$ 中把 F 对 x' 展开后减去了头 R' 项, 这结果相当于对 x' 积分多了 R' 次删去, 因此足够大的 R' 则 A_0 对于 J 无奇异性, 故 $A_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ 对 J 的奇异性全在 A_1 , Regge 极点位置参数乃是 $[A_{J-\frac{1}{2},1}^{(\epsilon)}]^{-1} = 0$ 之根。根据二元复变函数的隐函数定理^[14], 如 $[A_{J-\frac{1}{2},1}^{(\epsilon)}]^{-1} = 0$ 无重根, 则 $\alpha(s)$ 的解析区域与 $(A_1)^{-1}$ 解析区域同。

现考察 A_1^{-1} 在 S 平面的解析性。

$$A_{J-\frac{1}{2},1}^{(\epsilon)} = \frac{1}{2\pi} \frac{[\Gamma(J+\frac{1}{2})]^2}{\Gamma(2J+1)} \left\{ \int_{4\mu^2}^{\infty} dx' A_t(s, x') x'^{-(J+\frac{1}{2})} F_1 + \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} dx' A_u(s, x') (x' + s - 2M^2 - 2\mu^2)^{-(J+\frac{1}{2})} F_1 \right\} \quad (4.5)$$

为方便计令

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &\equiv \int_{4\mu^2}^{\infty} dx' A_t(s, x') x'^{-(J+\frac{1}{2})} F_1 \\ A_{12} &\equiv \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} dx' A_u(s, x') (x' + s - 2M^2 - 2\mu^2)^{-(J+\frac{1}{2})} F_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

因为 F_1 为有限项整次幕的和, 它对 s 是解析的, 对 dx' 积分也不引起奇异性。在 A_{11} 中奇异性来自吸收部分 $A_t(s, x')$ 和 $(x')^{-J-\frac{1}{2}}$, 因积分区域 x' 恒大于零故 $(x')^{-J-\frac{1}{2}}$ 亦不贡献奇点。故 A_{11} 只有吸收部分的割线, s 从 $(M+\mu)^2$ 到 $+\infty$, s 从 $-\infty$ 到 $(M-\mu)^2 - 4\mu^2$ 。

在 A_{12} 中, $(s+x'-2M^2-2\mu^2)^{-J-\frac{1}{2}}$ 对 dx' 积分时引起端点奇点, 为一支点, 贡献割线由 s 从 $-\infty$ 到 $(M-\mu)^2$ 。吸收部分 $A_u(s, x')$ 贡献为 s 从 $(M+\mu)^2$ 到 $+\infty$, 从 $-\infty$ 到 $(M+\mu)^2 - 4\mu^2$ 。

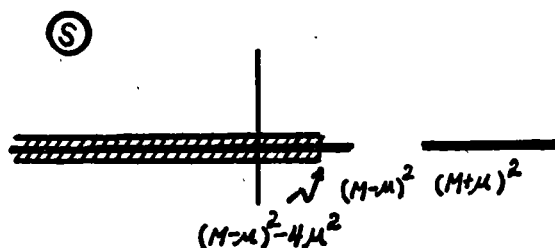


图 4

$A_{J-\frac{1}{2},1}^{(*)}$ 在 s 平面的割綫如图 4。这也是 $\alpha(s)$ 可能有的解析性。我們进一步証明 $\alpha(s)$ 上述左方割不存在。

考虑 A_1 在左方割岸上下的跳跃量,

$$A_1(s+i\varepsilon) - A_1(s-i\varepsilon) = \Delta A_1(J, s), \quad s < (M-\mu)^2 \quad (4.7)$$

若 ΔA_1 对所有 J 值是有限的, 則当 $J = \alpha(s+i\varepsilon)$ 为 $[A_1(J, s+i\varepsilon)]^{-1} = 0$ 之根时, 它也同时是 $[A_1(J, s-i\varepsilon)]^{-1} = 0$ 的根。即恒等式

$$\left. \begin{aligned} A_1^{-1}(\alpha(s+i\varepsilon), s+i\varepsilon) &= 0 \\ A_1^{-1}(\alpha(s+i\varepsilon), s-i\varepsilon) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad s < (M-\mu)^2 \quad (4.8)$$

同时成立。令 $\alpha^1(s-i\varepsilon)$ 为 $A_1^{-1}(J, s-i\varepsilon) = 0$ 的根之中同 $\alpha(s+i\varepsilon)$ 相同的一个

$$\alpha^1(s-i\varepsilon) = \alpha(s+i\varepsilon) \quad s < (M-\mu)^2$$

如 $\alpha^1(s-i\varepsilon)$ 适为 $\alpha(s-i\varepsilon)$ ($\alpha(s-i\varepsilon)$ 必为 $A_1^{-1}(J, s-i\varepsilon) = 0$ 之根) 則

$$\alpha(s-i\varepsilon) = \alpha(s+i\varepsilon) \quad s < (M-\mu)^2$$

即 $\alpha(s)$ 无 $s < (M-\mu)^2$ 割綫, 若 $\alpha^1(s-i\varepsilon)$ 不为 $\alpha(s-i\varepsilon)$ 則 $A_1^{-1}(J, s-i\varepsilon) = 0$ 至少有两个不同的根 $\alpha(s+i\varepsilon)$, $\alpha(s-i\varepsilon)$ 。但 $A_1(J, s)$ 是实解析函数, 在 $(M-\mu)^2 < s < (M+\mu)^2$ 无割綫, $\alpha(s)$ 在 $(M-\mu)^2 < s < (M+\mu)^2$ 沒有割綫, 故

$$\alpha(s+i\varepsilon) = \alpha(s-i\varepsilon) \quad (M-\mu)^2 < s < (M+\mu)^2$$

但 $\alpha(s+i\varepsilon)$ (即 $\alpha^1(s-i\varepsilon)$) 与 $\alpha(s-i\varepsilon)$ 的解析性是相同的, 除非 $A_1(J, s)$ 在 $(M-\mu)^2 < s < (M+\mu)^2$ 有重根, 則意味着两条极迹在 $(M-\mu)^2 < s < (M+\mu)^2$ 相重叠, 否則两解析函数在一段相同按解析函数唯一性定理, 可知

$$\alpha(s+i\varepsilon) = \alpha(s-i\varepsilon) \quad s < (M-\mu)^2$$

因此假設 Regge 极迹无相重, 則 $\alpha(s)$ 无上述左方动力割。

当 ΔA_1 不是有限时, 如能証明 $A_1(s+i\varepsilon)$, $A_1(s-i\varepsilon)$ 对 J 值因时为无穷, 則 (4.8) 式仍成立, 上述論証仍然成立。

現計算 $\Delta A_1(J, s)$

$$\Delta A_{11} = \int_{4\mu^2}^{\infty} dx' [A_t(s+i\varepsilon, x') - A_t(s-i\varepsilon)] x'^{-J-\frac{1}{2}} F_1(s+i\varepsilon, x') \quad (4.9)$$

当 $s < (M-\mu)^2 - 4\mu^2$ 时,

$$\Delta A_{11} = \int_a^b dx' 2ia_{23}(s, x') x'^{-J-\frac{1}{2}} F_1(s, x') \quad (4.10)$$

a, b 均 > 0 , 为有限. 故 ΔA_{11} 是 J 的解析函数。

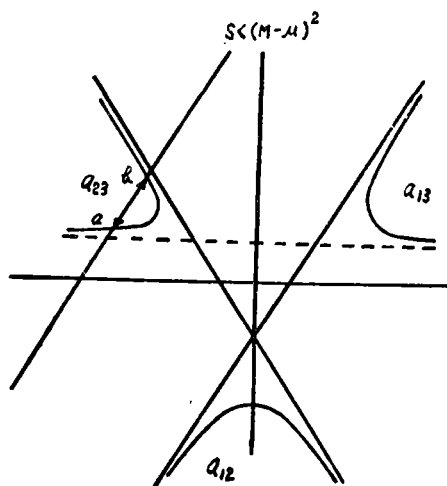


图 5

$$\begin{aligned} \Delta A_{12} = & \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} dx' \{ A_u(s+i\epsilon) [(s+i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{-J-\frac{1}{2}} - (s-i\epsilon+x'-2M^2- \\ & -\mu^2)^{-J-\frac{1}{2}}] - (A_u(s+i\epsilon) - A_u(s-i\epsilon)) (s-i\epsilon+x'-2M^2- \\ & -2\mu^2)^{-J-\frac{1}{2}} \} F_1(s+i\epsilon, x'; J) \end{aligned} \quad (4.11)$$

当 $s < (M-\mu)^2 - 4\mu^2$, $A_u(s+i\epsilon) - A_u(s-i\epsilon) = 2ia_{23}$, 积分限也是有限的, a', b' 。故 ΔA_{12} , 中第二项也是对 J 有限。至于第一项, $s = (M-\mu)^2$ 是端点奇点。积分限不能化为有限的。我們注意到 $s < (M-\mu)^2$ 时 $(s+i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{-J-\frac{1}{2}}$ 同 $(s-i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{-J-\frac{1}{2}}$ 差一相因子 $e^{+2\pi(J+\frac{1}{2})i}$,

$$\begin{aligned} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} dx' \frac{A_u(s+i\epsilon, x')}{(s+i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{J+\frac{1}{2}}} &= e^{-2\pi(J+\frac{1}{2})i} \\ \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} dx' \frac{A_u(s+i\epsilon, x')}{(s-i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{J+\frac{1}{2}}} &= e^{-2\pi(J+\frac{1}{2})i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{dx'}{(M+\mu)^2} \frac{A_u(s-i\epsilon, x')}{(s-i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{J+\frac{1}{2}}} + \frac{dx'}{(M+\mu)^2} \frac{A_u(s+i\epsilon, x') A_u(s-i\epsilon, x')}{(s-i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{J+\frac{1}{2}}} \right] \\
& = e^{-2\pi(J+\frac{1}{2})i} \left[\frac{dx'}{(M+\mu)^2} \frac{A_u(s-i\epsilon, x')}{(s-i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{J+\frac{1}{2}}} + \right. \\
& \left. + \frac{dx'}{a''} \frac{2ia_{23}(s, x')}{(s-i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{J+\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.12)
\end{aligned}$$

因此看出, 当 $\int \frac{dx'}{(M+\mu)^2} \frac{A_u(s-i\epsilon, x')}{(s-i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{J+\frac{1}{2}}}$ 中 J 有奇异性

时, 同时 $\int \frac{dx'}{(M+\mu)^2} \frac{A_u(s+i\epsilon, x')}{(s+i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{J+\frac{1}{2}}}$ 也有 J 的奇异性。

$$\begin{aligned}
\Delta A_{12} &= \int \frac{dx'}{(M+\mu)^2} \frac{A_u(s+i\epsilon, x') F_1}{(s+i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{J+\frac{1}{2}}} - \int \frac{dx'}{(M+\mu)^2} \frac{A(s-i\epsilon, x') F_1}{(s+i\epsilon+x'-2M^2-2\mu^2)^{J+\frac{1}{2}}} \\
&= A_{12}(J, s+i\epsilon) - A_{12}(J, s-i\epsilon)
\end{aligned}$$

当 $A_{12}(J, s+i\epsilon)$ 在某 J 有奇异性时, $A_{12}(J, s-i\epsilon)$ 同时有奇异性。

这样, 我們証明了 (4.8) 恒成立, 因此只要 Regge 迹不重叠, 就証明 $\alpha(s)$ 无上述左方动力割。只有物理割 s 从 $(M+\mu)^2$ 到 $+\infty$ 。如果极迹有一相交点, 則交点可能是一支点会在割綫, 我們在 § 5 將証明由于运动学奇点 $s=0$, 不同宇称的极迹在 $s=0$ 相交, 故在 $-\infty$ 到 0 有附加割綫。

为写出 $\alpha(s)$ 的色散关系, 我們还稍討論一下 $\alpha(s)$ 当 $s \rightarrow \infty$ 的行为。 u 道振幅的高能渐近行为 $\sim u^{\alpha(s)}$, 假設这个振幅当 $s \rightarrow \infty$ 时无本性奇点, 則要求 $\text{Re} \alpha(s)$ 有确定的极限, 与 s 沿那一方向趋向无穷无关, 令 $s \rightarrow \infty$ 时 $\alpha(s) \sim s^k$, 当 $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
f(u, s) &\sim u^{\alpha(s)} \sim u^{sk} \sim u |s|^k e^{ik\theta} \\
&\sim u |s|^k \cosh \theta e^{i |s|^k \sin k \theta \ln u} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

若 $k\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 不除去, 則 $f(u, s)$, $s \rightarrow \infty$ 有本性奇点。現 $\alpha(s)$ 在 s 平面有右方割, θ 之值可在 $0, 2\pi$ 之間变动, 由 $k\theta < \frac{\pi}{2}$, 得 $k < \frac{1}{4}$, 即 $\alpha(s)$ 可能有一次刪去。但这个論証不能視為很可靠的, 虽然 Gribov^{[3][6]} 也曾用了振幅在 $s \rightarrow \infty$ 无本性奇点的假定, 可是 Squires^[12] 曾指出, 这可能是太严的条件, 以致沒有物理的振幅能滿足。

暫設 $\alpha(s)$ 只有一次刪去, 写出色散关系

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \frac{s}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(s' + i\varepsilon) - \alpha(s' - i\varepsilon)}{s'(s' - s)} \frac{ds'}{(M + \mu)^2} \quad (4.15)$$

我們記得, 上面的 $\alpha(s)$ 是 A 或 B 的极迹, 还不一定是 $a(J, s)$ 的极迹, 我們在 § 5 将指出, 倘使不同空間宇称的极迹相重合的話, 則散射振幅的 Regge 极迹是 (4.15) 表示。倘使不同空間宇称的 Regge 极迹不相同的話, 則散射振幅的 Regge 极迹还有右方运动学割从 $-\infty$ 到 0, 而色散关系为

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \frac{s}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{I_m \alpha(s')}{s'(s' - s)} ds' + \frac{s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_m \alpha(s')}{s'(s' - s)} \frac{ds'}{(M + \mu)^2} \quad (4.16)$$

此时 $\alpha(s)$ 为实解析函数。

当然, 在实际应用时, 在 w 平面的色散关系是最方便的, 因为 w 平面上无运动学割綫,

$$\alpha(W) = \alpha(0) + \frac{W}{\pi} \int_{-\infty}^{-(M+\mu)} \frac{I_m \alpha(W')}{W'(W' - W)} dW' + \frac{W}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} \frac{I_m \alpha(W')}{W'(W' - W)} dW' \quad (4.17)$$

它除开刪去次数外同文献[8]一致。

§5 关于 $\alpha(S)$ 性質的一些討論

在本节中我們先討論 $\alpha(s)$ 的一些普遍性質。

从 (3.14) 看出, 我們必須区别几种情况。

(1) 倘若 $A_{J-\frac{1}{2}}^{(\theta)}$, $A_{J+\frac{1}{2}}^{(\theta)}$, $B_{J-\frac{1}{2}}^{(\theta)}$, $B_{J+\frac{1}{2}}^{(\theta)}$ 分别解出的极迹彼此全不相同, 則因这四个振幅同时出现在 $a_+^{(\theta)}$ 也出現在 $a_-^{(\theta)}$, 此如果 $\alpha(s)$ 是 $a_+^{(\theta)}$ 的极迹的話, $\alpha(s)$ 同时是 $a_-^{(\theta)}$ 的极迹, 这意味不同宇称的极迹相同 (这种情况今后称之为“宇称

退化”)。从物理的观点来看这种情况是不自然的。物理上并未发现有宇称相反的一对对的共振(*)，并且一般來說不同宇称的情态其相互作用应不相同。因此不再討論这一情况。

(2) 倘若 $A_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$, $B_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ 的极迹有两个或两个以上相同,但是这些极迹在上述四个振幅中的留数沒有相抵消发生。这时情况同(1)一样,也发生宇称退化。

(3) 倘若 $A_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$, $B_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ 的极迹留数有抵消发生,这是我們要詳細討論的情况。从(3.7)知 $A_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ ($B_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$) 的定义异于 $A_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ ($B_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$)。因此抵消应期待可能发生于 $A_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ 与 $B_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ (或 $A_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ 与 $B_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$) 之間。(例如 $A_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ 的极迹一般会异于 $A_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$, $B_{J+\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ 的极迹,极迹不同則抵消不会发生。)当有抵消时,則虽然 $\alpha(s)$ 是 $A^{(\epsilon)}$, $B^{(\epsilon)}$ 的极迹,但它不是 $\alpha^{(\epsilon)}$ 的极迹。从(1)(2)的討論就知道,要解除宇称退化,必須要有抵消发生。我們以下要証明,只要有抵消发生,宇称退化就解除,并討論一对宇称相反其他量子数相同的极迹之間的相互关系。

現設 $A_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$, $B_{J-\frac{1}{2}}^{(\epsilon)}$ 的极迹相同并在振幅 $a_{+}^{(\epsilon)}$ 有抵消,此时由(3.14)式,

$$-b_1 + (W+M) = 0 \quad (5.1)$$

b_1, b_2 为 $A_{J-1/2}$, $B_{J-1/2}$ 的共同极点 $\alpha(s)$ 的留数。这时 $\alpha(s)$ 不是 a_{+} 的极点(前已設 $\alpha(s)$ 为简单极点)。但对于 a_{-} , 发生抵消的条件是

$$b_1 + (W-M)b_2 = 0 \quad (5.2)$$

(5.1), (5.2) 不相容,故若 $\alpha(s)$ 在 a_{+} 抵消則在 a_{-} 不抵消, $\alpha(s)$ 是 a_{-} 的极迹。若 $\alpha(s)$ 在 $s < 0$ 为复数,則因 $s < 0$ 时 W 为純虚数,由(5.1)得

$$-b_1^* - (W-M)b_2^* = 0 \quad (5.3)$$

即 $\alpha^*(s)$ 在 a_{-} 抵消,而 $\alpha^*(s)$ 在 a_{+} 不抵消, (A, B 为实解析函数, $\alpha^*(s)$ 的留数为 $\alpha(s)$ 留数之复共轭), 于是 $\alpha^*(s)$ 是 a_{+} 的极迹而不是 a_{-} 的极迹。可見如果 $s < 0$ 时 $\alpha(s)$ 为复数的話,則 $\alpha(s)$, $\alpha^*(s)$ 分別为空間宇称相反的极迹。

$$\begin{aligned} \alpha_{-}(s) &= \alpha(s) \\ \alpha_{+}(s) &= \alpha^*(s) \end{aligned} \quad s < 0 \quad (5.4)$$

当 $0 < s < (M+\mu)^2$, w 不再为純虚数,这时若果 α_{-} , α_{+} 仍然是互共复数共轭的話,就会有很奇特的性質。例如, $\alpha^*(s)$ $s < 0$ 时本来是 a_{+} , 不是 a_{-} 的极点,但 $s > 0$ 时, α^* 在 a_{-} 抵消条件(5.3)不再滿足,于是 α^* 突然变成 a_{-} 的极点。因此,我們如要排除这种奇怪的間断性, $\alpha_{-}(s)$, $\alpha_{+}(s)$ 在 $0 < s < (M+\mu)^2$ 时不能互

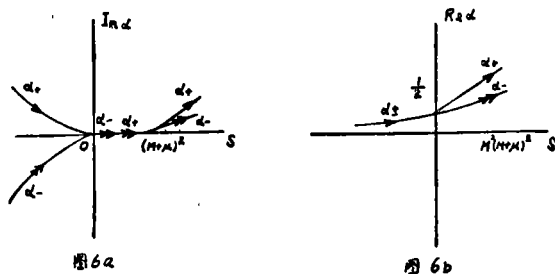
为复共轭。因 A, B 为实解析函数, 它不能有单个复数根, 故 $\alpha_+(s), \alpha_-(s)$ 在 $0 < s < (M+\mu)^2$ 为实数, 但其函数依赖关系可不相同。

由此可见 α_-, α_+ 在 $s < 0$ 为复数; 在 $0 < s < (M+\mu)^2$ 为实数, 故应有割线从 $-\infty$ 到 0。这割线是运动学奇点所引起的, 从 (5.1) (5.3) 看, 抵消条件成立时, 要求 b_1, b_2 在 $s = 0$ 有交点, 因 A_1, B_1 在 $s = 0$ 处本无支点, 是故 $\alpha(s)$ 在 $s = 0$ 应有支点, 可见我们的结论是内部一致的。

$s < 0, \alpha_-(s)$ 与 $\alpha_+(s)$ 互为复共轭, 而 $s > 0, \alpha_-(s), \alpha_+(s)$ 为实数, 于是 $s = 0$ 时 $\alpha_+(0) = \alpha_-(0)$, 这同由反射关系 (2.20) 导出的结论^{[8] [9]} 完全一致。由 (2.20), $\alpha(W)$ 为 α_+ 极点时 $\alpha(-W)$ 为 α_- 极点, 故在 $W = 0$ 处 $\alpha_+(0) = \alpha_-(0)$ 。

以上讨论中, 我们曾假定 $s < 0$ 时, $\alpha(s)$ 为复数。关于这点的证明,^[8] 曾经利用 πN 散射向后散射振幅渐近行为, 证明由于吸收部分在 $s < 0$ 为实数, 散射振幅的运动学奇点导致 $\alpha(s)$ 在 $s < 0$ 必为复数。我们在这里也可用全然不同的办法证明这一点。只要抵消条件 (5.1) 成立, 则因 $s < 0$ 时 W 为纯虚数, 故 b_1, b_2 必为复数, 且又是 $\sqrt{s}$ 的函数, 而 A_1, B_1 本无 $\sqrt{s}$ 支点是 s 的函数不是 $\sqrt{s}$ 的函数, 故 $\alpha(s)$ 在 $s < 0$ 时 $\alpha(\sqrt{s}) \neq \alpha(-\sqrt{s})$, 令 $\sqrt{s} = iW, \alpha(iW) \neq \alpha(-iW), \alpha(iW) \neq \alpha[(iW)^*], \alpha(iW) \neq \alpha^*(iW)$, 故 $\alpha(s)$ 当 $s < 0$ 时复数。

综上所述, 费米子 Regge 极迹的运动可示意如下图 6。



- (1) $s < 0, \alpha_+ = \alpha(s), \alpha_- = \alpha^*(s)$
- (2) $s = 0, \alpha_+(0) = \alpha_-(0)$
- (3) $0 < s < (M+\mu)^2, \alpha_+ = \alpha(s), \alpha_- = \alpha'(s)$ 均为实数。

我们的结论同^[8]一致, 但方法不同, 我们并不象^[8]限于“领头”的 Regge 极迹。

§6 极迹的阈行为

我们应用弹性么正条件, 为简便计, 把 J^- 宇称记号 $(e), (0)$ 省去。为了明显避免运动学奇点的麻烦, 本节在 W 平面上讨论。当 $M+\mu \leq W \leq M+2\mu$,

$$\alpha_{-}(J, W) = \frac{W^2}{(W-M)^2 - \mu^2} q^{2J-1} \frac{e^{i\delta_{-}} \sin \delta_{-}}{q} \quad (6.1)$$

我們用文献⁽⁵⁾方法, 它的精神是, 把 $\alpha_{-}(J, w)$ 分为两部分, 一部分有彈性割, 另一部分无彈性割, 这一部分在解析的, 允許把它作 Taylor 展开, 在 $\alpha_{-}(J, w)$ 是 J 的半純函数的假定下, 就得到包含极迹位置参数的超越方程。在附近的展开給出极迹位置参数的近似表示。

$$\begin{aligned} [\alpha_{-}(J, W)]^{-1} &= \frac{[(W-M)^2 - \mu^2]}{W^2} q^{2J} (\cot \delta_{-} - i) \\ q^2 &= \frac{[W^2 + (M-\mu)^2][W^2 - (M-\mu)^2]}{4W^2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

我們定义一函数 $G^J(W)$

$$G^J(W) = \left\{ \frac{[W + (M+\mu)][W - (M+\mu)][W + (M-\mu)][W - (M-\mu)]}{4W^2} \right\}^J \quad (6.3)$$

$G^J(W)$ 有五个分支点: $\pm(M+\mu)$, 0 , $\pm(M-\mu)$, 我們定义它的割綫如图 7 所示。

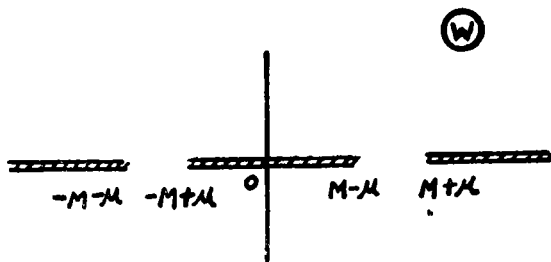


图 7

分別計算 $[\alpha_{-}(J, W)]^{-1}$ 和 $G^J(W)$ 在右方彈性区域 $M+\mu \leq W \leq M+2\mu$ 的虛部和实部, 因 $[\alpha_{-}(J, W)]^{-1}$ 及 $G^J(W)$ 均为 W 的实值解析函数, 直接計算可得:

$$\begin{aligned} [\alpha_{-}(J, W)]^{-1} \text{在右方彈性割的虛部} &= \frac{(W+M)^2 - \mu^2}{W^2} \frac{e^{J\pi i}}{\sin \pi J} G^J(W) \text{在右方割的虛部} \\ [\alpha_{-}(J, W)]^{-1} \text{在右方彈性割的实部} &= \frac{(W+M)^2 - \mu^2}{W^2} q^{2J} \frac{1}{\sin \pi J} \frac{\sin(\pi J - \delta_{-})}{\sin \delta_{-}} + \\ &+ \left\{ \frac{(W+M)^2 - \mu^2}{W^2} \frac{e^{-J\pi i}}{\sin \pi J} G^J(W) \text{在右方割的实部} \right\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

因此, $[\alpha_{-}(J, W)]^{-1}$ 可写成

$$[\alpha_{-}(J, W)]^{-1} = \frac{(W+M)^2 - \mu^2}{W^2} \frac{1}{\sin \pi J} \left[Y(J, W) + e^{-\pi J i} G^J(W) \right] \quad (6.5)$$

$$Y(J, W) = q^{2J} \frac{\sin(\pi J - \delta_-)}{\sin \delta_-}$$

由于 $[\alpha_-(J, W)]^{-1}$ 在右方弹性割上的跳跃量完全由 (6.5) 式第二项贡献, 可见 $Y(J, W)$ 无右方弹性割, 右方割的起点是 $M + 2\mu$ 。 $Y(J, W)$ 的性质是:

- (1) $Y(J, W)$ 在 W 平面是 W 的解析函数, 它无弹性割, 在 $W = W_0$, $W_0 \equiv W + \mu$ 处是解析的。
- (2) 由于 $\alpha_-(J, W)$ 是 J 半纯函数, 故么正条件所允的 $\alpha_-(J, W)$ 在 J 平面的极点由下式确定

$$Y(J, W) + e^{-\pi J i} G(J, W) = 0 \quad (6.6)$$

- (3) $Y(J, W)$ 在 W 固定时, 在 $J = 0$ 处是解析的。

(6.6) 是准确的式子, 不包含任何近似, 现在我们可以讨论在阈附近 Regge 极点的行为。考察 (6.6) 式, 可知实际上存在两大类极点。Regge 极迹是 (6.6) 式的根 $J = \alpha(W)$ 。

- (1) 第一类极点 $\alpha(W_0) \neq 0$, 这时, (6.5) 式第二项

$e^{-\pi \alpha(W)} G(\alpha(W), W) \rightarrow 0$, 当 $W \rightarrow W_0$, 而 $\sin \delta_- \sim \delta_- \rightarrow q^{2J}$, $W \rightarrow W_0$, 故 $Y(J, W)$ 当 $W \rightarrow W_0$ 时 $Y(J, W) \sim \sin(\pi \alpha(W) - \delta_-)$ 。因此这类极点实际上也是 $Y(J, W)$ 的零点。

我们分别讨论 $\alpha(W_0) > 0$, $\alpha(W_0) < 0$ 两种情况。

当 $\alpha(W_0) > 0$, $Y(J, W)$ 在 $(\alpha(W_0), W_0)$ 处是解析的, 可以展开

$$Y(\alpha(W), W) = Y(\alpha(W_0), W_0) + (W - W_0) Y_w + (\alpha(W) - \alpha(W_0)) Y_J + \dots \quad (6.7)$$

$$Y_w \equiv \left. \frac{\partial Y}{\partial W} \right|_{J=\alpha(W_0), W=W_0}, \quad Y_J \equiv \left. \frac{\partial Y}{\partial J} \right|_{J=\alpha(W_0), W=W_0}$$

由 (6.6) 可得

$$\alpha(W) = \alpha(W_0) - \frac{Y_w}{Y_J} (W - W_0) - \frac{1}{Y_J} e^{-\pi \alpha(W) i} G(\alpha(W), W) + \dots \quad (6.8)$$

当 $W \rightarrow W_0$, 用叠代近似, 右方用 $\alpha(W) \simeq \alpha(W_0)$ 代入得

$$\alpha(W) \simeq \alpha(W_0) - \frac{Y_w}{Y_J} (W - W_0) - \frac{1}{Y_J} e^{-\pi \alpha(W_0) i} G(\alpha(W), W) \quad (6.9)$$

§ 5 已证明 $\alpha(W_0)$ 为实数, 故

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \alpha(W) &\simeq \alpha(W_0) - \frac{Y_w}{Y_J} (W - W_0) - \frac{1}{Y_J} G(\alpha(W), W) \cos \pi \alpha(W_0) \\ \operatorname{Im} \alpha(W) &\simeq Y_J^{-1} G(\alpha(W), W) \sin \pi \alpha(W_0) \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

上式给出 Regge 极迹位置参数的阈行为。

当 $q(W_0) < 0$ 时, 則展开 $[Y(J, W)]^{-1}$, 可得

$$\alpha(W) \simeq \alpha(W_0) - \frac{(Y^{-1})_w}{(Y^{-1})_J} (W - W_0) - \frac{1}{(Y^{-1})_J} e^{\pi \alpha(W_0)i} G(-\alpha(W), W) \quad (6.11)$$

(2) 第二类极点, $\alpha(W_0) = 0$,

因 $Y(0, W) = 1$, 我們可以把 $\ln Y(J, W) = 0$ 在 $J = 0$ 展开.

$$\text{由} \quad e^{-\alpha(W)\pi i} G(\alpha(W), W) + Y(\alpha(W), W) = 0$$

$$\text{得} \quad (-|\ln q^2| - \pi i)\alpha(W) = K(W)\alpha + \dots + 2\pi m i \quad (6.12)$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{解之得} \quad \text{Re}\alpha(W) = \frac{2\pi^2 m}{[|\ln q^2| + K(W)]^2 - \pi^2}$$

$$\text{Im}\alpha(W) = \frac{2\pi m}{|\ln q^2| + K(W) - \frac{\pi^2}{|\ln q^2| + K(W)}} \quad (6.13)$$

当 $W \rightarrow W_0$ 时 $\ln q^2 \rightarrow \infty$

$$\text{Re}\alpha(W) \simeq \frac{2\pi^2 m}{|\ln q^2|^2} \quad (6.14)$$

$$\text{Im}\alpha(W) \simeq \frac{2\pi m}{\ln q^2}$$

由此可見, 当 $W \rightarrow W_0$ 时有无穷多个极点趋于虚軸 $\text{Re}J = 0$, 这些点是成对的, 每对之中, 一个由第一象限, 另一个由第三象限趋向虚軸. 原点是极点会聚之点.

这就是閾能时极点的凝聚现象, 它是 Грибов-Померанчук⁽⁷⁾ 所首先发现, 他們指出, 对于玻色 Regge 极点在閾能时有无穷多个极点趋向 $\text{Re}l = -\frac{1}{2}$. 最近 Desai 和 Newtor⁽¹⁵⁾ 对于无自旋粒子非相对論势散射的研究也指出同样的行为. 对照几种情况(玻色子, 費米子, 势散射)看出, 这类极点的方程基本上是相同的, 区别只在于凝聚的軸綫不同. 故这类极迹的性质完全是 S 矩阵普遍性质的反映. 它們同过程的动力性质和相对論效应都无关.

至于第一类极点, 它們同系統的动力性质密切有关系. 系統的束縛态共振态的存在取决于第一类极点.

正如同⁽¹⁵⁾的分析, 我們上面所討論的极迹閾行为, 实际上均只是相应于能量从閾上趋于閾时的情况($W \rightarrow W_0 + 0$)当能量从閾下趋近閾时($W \rightarrow W_0 - 0$), $G^J(W)$ 中表示(6.3)中, 因子 $[W - (M + \mu)]$ 要換成 $[W - (M + \mu)]e^{-\pi i}$, 然后才能令 $W \rightarrow W_0$ (其他因子照旧), 这时(6.6)式变为

$$Y(J, W) + |G^J(W)| = 0 \quad (6.15)$$

由此可以完全重复上面的分析, 我們概述結果如下,

$$(1) \quad \alpha(W_0) > 0$$

$$\begin{aligned} \alpha(W) &\simeq \alpha(W_0) - \frac{Y_m}{Y_J} (W - W_0) - \frac{1}{Y_J} |q^2(W)| \pm \alpha(W_0) \\ \operatorname{Im} \alpha(W_1) &\simeq 0 \\ \operatorname{Re} \alpha(W_1) &\simeq \alpha(W_0) - \frac{Y_w}{Y_J} (W - W_0) - |q^2(W)| \pm \alpha(W_0) \end{aligned} \quad (6.16)$$

可見 Regge 极迹在閾下是实数, 上式当 $\alpha(W_0) < 0$ Y_w, Y_J 要換成 $(Y^{-1})_w, (Y^{-1})_J$

$$(2) \quad \alpha(W_0) = 0$$

这时

$$Y(\alpha(W), W) + |q^2(W)| q(W) = 0$$

展开 $\ln Y(\alpha, W)$, 并取到 $K_1(W)\alpha^2$ 項, 因 $\operatorname{Re} \alpha$ 比 $\operatorname{Im} \alpha$ 小一个数量級, 略去 $(\operatorname{Re} \alpha)^2 << (\operatorname{Im} \alpha)^2$, 得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \alpha(W) &\simeq - \frac{(\operatorname{Im} \alpha(W))^2 (K_1(W))^2}{\ln |q^2| - K(W)} \\ &= - \frac{4m^2 \pi^2 (K_1(w))^2}{[\ln |q^2| - K(W)]^3} \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\operatorname{Im} \alpha(W) \simeq \frac{2m\pi}{\ln |q^2| - K(W)}$$

可見当 $W \rightarrow W_0 - 0$ 时也有无穷多个极点向 $\operatorname{Re} J = 0$ 趋近。这些极点也是成对的, 但与 $W \rightarrow W_0 + 0$ 时不同, 现在是共軛地成对, 因 $\operatorname{Re} \alpha \sim m^2$, 它們是从左半平面共同成对地趋于 $\operatorname{Re} J$, 最后凝聚于原点。

以上討論的是 $\alpha_-(J, W)$ 的极点 $J_-(W) = \alpha(W)$, 并省去了 J -字称記号, 事实上 J -字称只有 $Y(J, W)$ 的数值有关系, 閾行为的性質是一样的。并且类此 $\alpha_+(J, W)$ 的极迹 $J_+(W) = \alpha(-W)$, 也有相似的閾行为。

至此, 我們可把費米 Regge 极迹的閾行为图象概括一下, 在閾附近有两类极点, 第一类极点 $\alpha(W_0) \neq 0$, 它們同系統的共振态有密切关系, 在閾下附近, 它們在 J 平面沿实軸, 在閾开始进入上半平面。它們在閾上下对能量的依賴式子是 (6.10) (6.16) 等。第二类极点 $\alpha(W_0) = 0$, 它們是 S 矩陣在閾的普遍性質的反映, 它們与系統动力性質无关。它們的运动是能量从閾下趋近閾时, 有无穷多对极点, 共軛成对地由左半平面趋向 $\operatorname{Re} J = 0$, 极点的实数部分趋于 0 比虚数部分快一数量級, 最后均聚于原点。能量从閾向閾上增大时, 极点从原

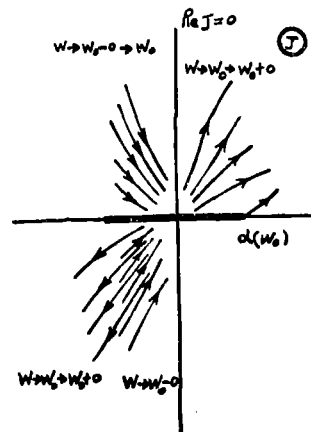


图 8

点出发, 自虚轴 $\text{Re}J = 0$ 溢出趋向第一第三象限。

图 8 是一个简化的示意图象。

× × ×

作者感谢郭慎鸿、罗蓓玲同志的讨论, 感谢数学系许毅然同志讨论有关复变函数的一些问题, 感谢全志义同志帮助绘制本文的图。

1963年11月

参 考 文 献

- [1] Regge, T. *Nuovo Ciments* 14(1959), 951, 18(1959), 947.
- [2] Chew, G. F., Frauschi, S. C., Mandelstam, S. *Phys. Rev.* 126(1962), 1201.
Frauschi, S. C., Gell-Mann, M., Zachariasen, F. *Phys. Rev* 126 (1962), 2204.
Blankenbecler, R., Goldberger, M. L. *Phys. Rev*, 126(1962), 766.
- [3] Грибов, В. Н. *ЖЭТФ* 41(1961), 1962;
42(1962), 1260.
- [4] Bardakci, K. *Phys. Rev.* 127(1962), 1832.
Prosperi, G. M. *Nuovo Ciments* 26 (1962), 541.
- [5] Barut, A. O., Zwanyiger, D. E., *Phys. Rev.* 127(1962) 674.
- [6] Грибов, В. Н., Померанчук, И. Я. *ЖЭТФ* 43 (1962), 108.
- [7] Грибов, В. Н., Померанчук, И. Я. *ЖЭТФ* 43 (1962), 1970.
或 *Phys. Rev. Letters* 9(1962), 238.
- [8] Грибов, В. Н. *ЖЭТФ* 43(1962), 1529.
- [9] Singh, V. *Phys. Rev.* 129 (1963), 1889.
- [10] Frazer, W. R., Fulco, J. R. *Phys. Rev.* 119 (1960), 1420.
Frauschi, S. C., Walecha, J. D. *Phys. Rev.* 120 (1960), 1486.
- [11] Mac Dowell, S. W. *phys. Rev.* 116(1959), 774.
- [12] Squires, E. J. *Nuovo Cimento* 25(1962) 242.
- [13] Erdelyi, A. *Higher Transcendental Functions Vol. I.* (1953)
- [14] Taylor, J. R. *Phys. Rev.* 127 (1962), 2257.
- [15] Desai, B. R., Newton, R. G. *Phys. Rev*, 130 (1963), 2109.
- [后记]:

在本文完成之后, 作者注意到 Ya. I. Azimov, *Phys. Letter* 3, 195(1963).

曾讨论了自旋对 Regge 极点凝聚的影响。本文结果之一, 极点凝聚于

$\text{Re}J = 0$, 同他的结论一致。但是所用的方法全不相同。Hung Cheng, D.

Sharp Ann. of Phys. 22, 481(1963)的文章中在主要討論了玻色子-Regge 極迹的解析性之後, 附帶写出了費米子-Regge 極迹的色散關係, 其結論與本文之 § 4 所得一致。但沒有詳細的論證。他們討論玻色子時所用的方法, 同本文 § 4 的方法有點相似, 但也不全一樣。

Analyticity and Threshold Behavior of Fermion

Regge Trajectories

Lee Hwa-chung

Abstract

Starting from π -N scattering amplitude and basing on the Mandelstam's representation and unitary condition, analyticity and threshold properties of fermion Regge trajectories of baryon quantum number 1 and strangeness 0 are investigated. The following preliminary results are obtained: (1) The position parameters of Regge trajectories $\alpha(s)$ have right-hand physical cut, and no left-hand dynamical cut; but have a kinematical left-hand cut at $s=0$. (2) $\alpha(s)$ in the region $J < 0$ are complex and $\alpha_+(s)$, $\alpha_-(s)$, being of opposite space parity are complex conjugate to each other. In the region $0 < s < (M+\mu)^2$ $\alpha_{\pm}(s)$ are real but the dependence on s may be different. (3) The energy dependences of $\alpha(s)$ at threshold are obtained. Two kinds of Regge poles are distinguished. Those Regge trajectories with $\alpha(W_0) \neq 0$ (W_0 -threshold energy) are responsible for dynamical resonance and bounded states. (4) While there are another kinds of Regge trajectories for which $\alpha(W_0) = 0$ whose threshold behaviors are also investigated. As energy approaches threshold from energy below threshold, there are infinite pairs of poles approach $\text{Re} J = 0$ from left half J -plane, each pair contains a couple of conjugate complex poles. While as energy approach from above, there are also infinite pairs of poles approaches $\text{Re} J = 0$, each pair contains poles of first and third quadrant of J -plane. For all these poles, $\text{Re} \alpha(s) \rightarrow 0$ faster than $\text{Im} \alpha(s) \rightarrow 0$ by one or two order. The poles condense at the origin of J -plane. We thus obtained the Gribov-Pomeranchuk condensation of Regge poles in the case of fermion trajectories. This kind of poles has purely kinematical origin. They reflect the general properties of S-matrix at threshold.