(λ,k)型双解析函数的一些特征

林和曾

摘 要

本文主要是研究(λ,k)型双解析函数的微分与积分的特征性質，

一． 考察方程組：

$$\begin{cases} u_x-kv_y=k\theta \\ ku_y+v_x=k\omega \\ k\theta_x+\lambda\omega_y=0 \\ k\theta_y-\lambda\omega_x=0 \end{cases} \qquad (A)$$

其中：实数 $\lambda\neq0$，$0<k\leqslant1$，函数 $\theta(x,y)$ 与 $\omega(x,y)$ 都具有連續偏导数。設 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 是方程(A)的連續可微解，林伟与吳兹潛同志把 $f(z)=u+iv$ 称为$(\lambda，k)$型双解析函数[1]．

令 $\varphi(z)=k\theta-i\lambda\omega$，显然 $\varphi(z)$ 是一个解析函数，而且方程(A)可写成：

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z_1}}=\frac{\lambda-k}{4\lambda}\varphi(z)+\frac{\lambda+k}{4\lambda}\overline{\varphi(z)} \qquad (B)$$

其中：$z_1=x_1+iy_1=\frac{1+k}{2k}z-\frac{1-k}{2k}\bar{z}$，$\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z_1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+i\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)$．

当 $\lambda=-1$，$k=1$ 时，(λ,k)型双解析函数 $f(z)$ 是所謂面积单演函数；若再有 $\varphi(z)\equiv0$，則 $f(z)$ 便成为通常的解析函数了。

$(\lambda，k)$型双解析函数具有类似于解析函数的一系列重要性质[1]，本文主要是討論它的一些特征性质。

二． 首先，我們給出$(\lambda，k)$型双解析函数的一般形式及其微分形式的特征：

定理一：区域G內的$(\lambda，k)$型双解析函数$f(z)$具有如下两个等价条件：

1964年10月8日收到。

1° $f(z)$是方程(B)在G内的連續解，其中$\varphi(z)$是G内的解析函数。

2° 在区域G_1内有解析函数$g(z_1)$使

$$f(z)=\frac{\lambda-k}{2\lambda(1-k)}\Phi(z)+\frac{\lambda+k}{2\lambda(1+k)}\overline{\Phi(z)}+g(z_1)\qquad(k\neq1)(1)$$

$$f(z)=\frac{\lambda-1}{4\lambda}\bar{z}\varphi(z)+\frac{\lambda+1}{4\lambda}\overline{\Phi(z)}+g(z)\qquad(k=1)(1')$$

其中：$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z}\varphi(\zeta)d\zeta$，$\varphi(z)$是$G$内的解析函数；$G_1$是区域$G$經变换$z_1=\frac{1+k}{2k}z-\frac{1-k}{2k}\bar{z}$所得的象。

証明：

1°⟹2°：由方程(B)，当$k\neq1$时，有

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\left[f(z)-\frac{\lambda-k}{2\lambda(1-k)}\Phi(z)-\frac{\lambda+k}{2\lambda(1+k)}\overline{\Phi(z)}\right]=\frac{\partial f(z)}{\partial\bar{z}_1}-$$

$$-\frac{\lambda-k}{2\lambda(1-k)}\frac{1-k}{2}\varphi(z)-\frac{\lambda+k}{2\lambda(1+k)}\frac{1+k}{2}\overline{\varphi(z)}=0$$

于是；函数$f(z)-\frac{\lambda-k}{2\lambda(1-k)}\Phi(z)-\frac{\lambda+k}{2\lambda(1+k)}\overline{\Phi(z)}$在$z_1\in G_1$上解析，把它記作$g(z_1)$，便得式(1)。

若$k=1$，則$z_1=z$且$G_1=G$，仿上証明可得$(1')$。

若2°成立，則显然$f(z)$是G内的(λ,k)型双解析函数。証完。

利用解析函数的 Looman－Menchoff 定理，我們还有：

定理二：設$f(z)=u+iv$、u,v在G内具有連續的偏导数且在$G-E$（E是可数集）上滿足方程(B)，其中$\varphi(z)$在$G-E$上解析。則$f(z)$是G内的(λ,k)型双解析函数。

三．下面，我們給出(λ,k)型双解析函数的积分形式的特征。首先証明类似于解析函数的 Weierstrass 定理的如下命題：

定理三：設区域列$\{G_n\}$滿足$G_n\subset G_{n+1}\subset G(n=1,2\cdots)$，当$n\to\infty$时$G_n\to G$，而$f_n(z)$是$G_n$上的$(\lambda,k)$型双解析函数，且函数列$\{f_n(z)\}$在$G$内閉一致收斂于$f(z)$，則$f(z)$是$G$内的$(\lambda,k)$型双解析函数，而且$\frac{\delta f_n(z)}{\delta z}$在$G$内閉一致收斂于$\frac{\delta f}{\delta z}$，其中$\frac{\delta f}{\delta z}=\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial z}$称为$(\lambda,k)$型双解析函数$f(z)$的导数[1]。

証明：設G_n'与G'分别是区域G_n与G經变换$z_1=\frac{1+k}{2k}z-\frac{1-k}{2k}\bar{z}$所得的象。依定理一，区域$G_n$与$G_n'$上分别有解析函数$\varphi_n(z)$与$g_n(z_1)$使

$$f_n(z)=\frac{\lambda-k}{2\lambda(1-k)}\Phi_n(z)+\frac{\lambda+k}{2\lambda(1+k)}\overline{\Phi_n(z)}+g_n(z_1)\quad(k\neq1)\qquad(2)$$

其中 $\Phi_n(z)=\int_{z_0}^{z}\varphi_n(\zeta)d\zeta$.

对每一个正数r作$G_r=\{z|\ |\zeta-z|\leqslant r\subset G\}$，則对$G$内任一閉集$E$，可取$r$足够小使$E\subset Gr$，記$C(z,r)$表示$|\zeta-z|=r$；$D(z,r)$表示$|\zeta-z|\leqslant r$，而它們經变换 $\zeta_1=\frac{1+k}{2k}\zeta-\frac{1-k}{2k}\bar{\zeta}$ 所得的象分别記作$C(z_1,r,\frac{r}{k})$与$D(z_1,r,\frac{r}{k})$。对$z\in E$，取n足够大使$G_n\supset D(z,r)$，則有

$$\frac{1}{2\pi r^2 i}\int_{C(z_1,r,\frac{r}{k})}f_n(\zeta)d\zeta_1=\frac{1}{2\pi r^2 i}\int_{C(z_1,r,\frac{r}{k})}\left[\frac{\lambda-k}{2\lambda(1-k)}\Phi_n(\zeta)+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda+k}{2\lambda(1+k)}\overline{\Phi_n(\zeta)}\right]d\zeta_1=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{D(z_1,r,\frac{r}{k})}\left[\frac{\lambda-k}{4\lambda}\varphi_n(\zeta)+\frac{\lambda+k}{4\lambda}\overline{\varphi_n(\zeta)}\right]d\xi_1d\eta_1=$$

$$=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{D(z,r)}\left[\frac{\lambda-k}{4\lambda k}\varphi_n(\zeta)+\frac{\lambda+k}{4\lambda k}\overline{\varphi_n(\zeta)}\right]d\xi d\eta=\frac{\lambda-k}{4\lambda k}\varphi_n(z)+$$

$$+\frac{\lambda+k}{4\lambda k}\overline{\varphi_n(z)}$$

由于$\{f_n(\zeta)\}$在G内閉一致收斂，故从上式不难推知$\varphi_n(z)$在E上，从而在G内閉一致收斂。从式(2)又得$g_n(z_1)$在G'内閉一致收斂，記它們的极限函数分别为$\varphi(z)$与$g(z_1)$，依定理一便得証$f(z)$是G内的(λ,k)型双解析函数。

当$k=1$时，进行类似的討論仍可得到証明。

至于 $\frac{\delta f_n(z)}{\delta z}$ 在G内閉一致收斂于 $\frac{\delta f}{\delta z}$ 則是显然的了。証完。

定理四：区域G内的連續函数$f(z)$是G内的(λ,k)型双解析函数的充分必要条件是：G内有解析函数$\varphi(z)$使

$$\frac{1}{2\pi r^2 i}\int_{C(z_1,r,\frac{r}{k})}f(\zeta)d\zeta_1=\frac{\lambda-k}{4\lambda k}\varphi(z)+\frac{\lambda+k}{4\lambda k}\overline{\varphi(z)}\qquad(3)$$

对每个足够小的正数r都成立。

証明：必要性可在定理三的証明中見到。

充分性：首先設$f(z)$在G内有連續偏导数，則由式(3)得

$$\frac{\lambda-k}{4\lambda k}\varphi(z)+\frac{\lambda+k}{4\lambda k}\overline{\varphi(z)}=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D(z_1,r,\frac{r}{k})}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta_1}}d\xi_1 d\eta_1=$$

$$=\frac{1}{k\pi r^2}\iint\limits_{D(z,r)}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta_1}}d\xi d\eta=\frac{1}{2k}\Big[\Big((u_{\xi_1}(\zeta)-v_{\eta_1}(\zeta)\Big)\Big|_{\zeta=\zeta'}+i\Big(v_{\xi_1}(\zeta)$$

$$+u_{\eta_1}(\zeta)\Big)\Big|_{\zeta=\zeta''}\Big]$$

其中$\zeta',\zeta''\epsilon D(z,r)$，上式对每个足够小的正数$r$都成立，取$r\to 0$便得

$$\frac{\lambda-k}{4\lambda k}\varphi(z)+\frac{\lambda+k}{4\lambda k}\overline{\varphi(z)}=\frac{1}{k}\frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z_1}}$$

于是$f(z)$是G內的(λ,k)型双解析函数。

現若$f(z)$只是G內的連續函数，則作函数

$$F_\rho(z)=\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{D(z,\rho)}f(\zeta)d\xi\, d\eta=\frac{k}{\pi\rho^2}\iint\limits_{D(z_1,\rho,\frac{\rho}{k})}f(\zeta)d\xi_1 d\eta_1\quad(z\epsilon G_\rho)$$

其中$G_\rho=\{z\mid D(z,\rho)\subset G\}$。

因此，$F_\rho(z)$在G_ρ內有連續偏导数。而且，对每个足够小的ρ，有

$$\frac{1}{2\pi r^2 i}\int\limits_{C(z_1,r,\frac{r}{k})}F_\rho(\zeta)d\zeta_1=\frac{1}{2\pi r^2 i}\int\limits_{C(z_1,r,\frac{r}{k})}\frac{k}{\pi\rho^2}\iint\limits_{D(\zeta_1,\rho,\frac{\rho}{k})}f(w)du_1\,dv_1\,d\zeta_1=[\text{記}\,g(w_1)=$$

$$=f(w)]=\frac{1}{2\pi r^2 i}\int\limits_{C(0,r,\frac{r}{k})}\frac{k}{\pi\rho^2}\iint\limits_{D(0,\rho,\frac{\rho}{k})}g(w_1+\zeta_1+z_1)du_1\,dv_1\,d\zeta_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi r^2 i}\iint\limits_{D(0,\rho,\frac{\rho}{k})}\frac{k}{\pi\rho^2}\int\limits_{C(0,r,\frac{r}{k})}g(\zeta_1+w_1+z_1)d\zeta_1\,du_1\,dv_1=$$

$$=\frac{k}{\pi\rho^2}\iint\limits_{D(z_1,\rho,\frac{\rho}{k})}\frac{1}{2\pi r^2 i}\int\limits_{C(w_1,r,\frac{r}{k})}f(\zeta)d\zeta_1\,du_1\,dv_1=\frac{k}{\pi\rho^2}\iint\limits_{D(z,\rho)}\Big[\frac{\lambda-k}{4\lambda k^2}\varphi(w)$$

$$+\frac{\lambda+k}{4\lambda k^2}\overline{\varphi(w)}\Big]du dv=\frac{\lambda-k}{4\lambda k}\varphi(z)+\frac{\lambda+k}{4\lambda k}\overline{\varphi(z)}$$

于是 $F_\rho(z)$是G_ρ內的(λ,k)型双解析函数。

其次，易証当 $\rho\to 0$ 时 $F_\rho(z)$在 G 內閉一致收斂于$f(z)$，因此，$f(z)$是 G 內的(λ,k)型双解析函数，証完。

定理四可以演成更一般的形式，为此，設$\{C_n(z)\}$是可求长Jordan閉曲綫列，它們所圍的区域$D_n(z)$含有z，当$n\to\infty$时$C_n(z)$的直径趨于0，且$D_n(z)$縮为一点z，以$|D_n(z)|$表示$D_n(z)$的面积，則有：

定理五：区域G內的連續函数$f(z)$在G內是(λ, k)型双解析函数的充分必要条件是：对每个n，有区域$G_n=\{z\mid D_n(z)\subset G\}$上的解析函数$\varphi_n(z)$使

$$\frac{1}{2i\,|D_n(z)|}\int_{C_n'(z_1)} f(\zeta)d\zeta_1=\frac{\lambda-k}{4\lambda k}\varphi_n(z)+\frac{\lambda+k}{4\lambda k}\varphi_n(z) \qquad (4)$$

其中$C_n'(z_1)$是$C_n(z)$經变换$\zeta_1=\frac{1+k}{2k}\zeta-\frac{1-k}{2k}\bar{\zeta}$所得的象。

証明是仿定理四的，这里不再贅述。

志謝：本文得到林伟同志的帮助，謹致謝意。

参 考 文 献

〔1〕林伟，吳茲潛：(λ,k)型双解析函数。

〔2〕胡誠明：关于面积单演函数的一个平均性质　数学进展（1964）第一期

〔3〕Haskell, R.N. Areolar monogenic functions. Bull. Amer. Math. Soc. Vol.52(1946)pp.332—337.

〔4〕Reade. M. On areolar monogenic functions. Bull. Amer. Math. Soc Vol 53(1947)pp.98—103.

〔5〕Poor.V.C.On the two-dimensional derivative of a complex function. Proc. of Amer. Math. Soc. Vol. 1 (1950)pp.687—693.

〔6〕Bekya, И,H,一阶椭园型微分方程組与边值問題及其在薄壳理論上的应用，高教出版社（1960）

Some Characteristics of the Bi-analytic Functions of Type(λ,k)

Lin Ho-tseng

Abstract

In this paper. I wish to show that a class of bi-analytic functions have some characteristics which analytic functions possess.