反周期解与反鞍点的研究

丁 有 炳

（数学力学系）

摘　要

本文討論右边为周期項的非自治系統。§§1,2談次調和共振，建立反周期解的存在唯一定理；同时給出寻求这些反周期解的有效方法。在§3考虑具有反周期系数的綫性变換的某些特质，由此获得这系統的解集所定出的映射可有反鞍点存在的充分条件。

本文利用 Poincaré 的振动方法[1]，研究了一类重要的二級付調和共振（反周期解）的存在問題，幷具体地給出决定反周期解的有效方法，最后还基于反周期变换的某种特性，得到了一类突出的不振动情形——映象的反鞍点之存在条件。上述問題对具有周期右端的微分系統很有意义，頗值得探討。

§1　反周期解的存在定理

考虑实 n 維微分系統

$$dx/dt=f(x,t,\mu) \tag{1}$$

其中假設（下称条件 a）：x 为实 n 維 Euclid 空間 ξ 中的向量，t 为一維实变量，μ 为实小参数，$f(x,t,\mu)$ 为 n 維向量函数，其分量是所含变量的实連續函数、对 x 有一阶連續偏微商、幷且关于 x 为奇函数而对 t 有最小正周期 π，即有

$$f(-x,t,\mu)\equiv-f(x,t,\mu)\,,\quad f(x,t+\pi,\mu)\equiv f(x,t,\mu), \tag{2}$$

在条件 a 之下，組(1)滿足解的存在唯一性定理[2]，故对任一 $x^{\circ}\in\xi$，将存在唯一連續解 $x(t,x^{\circ},\mu)$ 适合初值条件 $x(o,x^{\circ},\mu)=x^{\circ}$。

我們称組(1)的解 $x(t,x^{\circ},\mu)$ 是关于 t 以 π 为反周期的（簡称反周期的），如果滿足条件：

本文于1965年5月21日收到。

$$x(t+\pi, x^{\circ}, \mu) \equiv -x(t, x^{\circ}, \mu)。\tag{3}$$

恒等于零的反周期解将称为平凡的。

容易驗明下面的断言是正确的：

引理 1　在条件 a 之下，反周期性条件（3）等价于

$$x(\pi, x^{\circ}, \mu) = -x^{\circ}。\tag{4}$$

今設$\mu=0$时組(1)存在反周期解$p(t)$，将称組

$$du/dt = f_x(p(t), t, o)u \tag{5}$$

为組(1)关于解 $p(t)$ 的变分方程，这里$f_x=(\partial f_i/\partial x_j)_{(i,j=1,\dots,n)}$是$n$阶陣（以下将沿用此种記号而不再加以說明）。在条件$a$之下，陣$f_x(x,t,\mu)$关于$x$是偶的，即

$$f_x(-x, t, \mu) \equiv f_x(x, t, \mu), \tag{6}$$

故組(5)是有π为周期的綫性齐次組。依这类組的一般理論[3]，若$U(t)$为其基解陣且$U(o)=E_n$（n阶么陣），則对它的每个解$u(t)$，必有n維常向量α，使

$$u(t) = U(t)\alpha。\tag{7}$$

常陣$U(\pi)$的特征根，即代数方程

$$det[U(\pi) - \lambda E_n] = 0 \tag{8}$$

的根λ将称为組(5)的乘子。易知，乘子λ的确定与$U(t)$的选取无关。

由引理 1 立刻可以推得

引理 2　組(5)存在非平凡反周期解的充要条件是它具有乘子$\lambda=-1$。

回到組(1)，可得如下反周期解的存在定理：

定理1. 若組(1)滿足条件a且当$\mu=0$时存在反周期解$p(t)$，而变分方程(5)沒有非平凡的反周期解，則对充分小的μ，組(1)存在唯一連續的反周期解 $q(t,\mu)$ 适合条件$q(t,o)\equiv p(t)$。

〔証〕. 由条件a，組(1)滿足解的存在唯一性定理。設$x(t,\alpha,\mu)$为它的适合初值条件

$$x(0, \alpha, \mu) = p(0) + \alpha \tag{9}$$

的唯一解，則$x(t,\alpha,\mu)$关于(t,α,μ)也是連續的，故

$$x(t, o, o) \equiv p(t)。\tag{10}$$

由引理 1 并計及(9)，解$x(t,\alpha,\mu)$具反周期性之充要条件可写成：

$$Q(\alpha, \mu) \equiv x(\pi, \alpha, \mu) + p(o) + \alpha = 0, \tag{11}$$

故对充分小的μ，若能唯一地确定(11)的連續解$\alpha(\mu)$适合条件$\alpha(o)=0$，則$q(t,\mu)=$

$x(t,\alpha(\mu),\mu)$将就是滿足定理要求的組(1)的唯一反周期解。

因$Q(\alpha,\mu)$是連續的，故为証明$\alpha(\mu)$的存在唯一性，依隐函数存在定理[4]，只需証明：

$$Q(0,0)=0 \text{ 与 } det[Q\alpha(0,0)]\neq 0, \tag{12}$$

(注意，本文中記号0表示零陣、零向量及数零，其具体意义視出現它的公式而定。)

条件(12)的前半之正确性是明显的(由等式(10)与$p(t)$的反周期性)，而其后半即是

$$det[x_{\alpha}(\pi,o,o)+E_n]\neq 0, \tag{13}$$

因$x(t,\alpha,\mu)$是組(1)的解，故有恒等式：

$$dx(t,\alpha,\mu)/dt=f(x(t,\alpha,\mu),t,\mu)。$$

对α之分量求微商幷調換微分次序之后得

$$dx_{\alpha}(t,\alpha,\mu)/dt=f_x(x(t,\alpha,\mu),t,\mu)\,x_{\alpha}(t,\alpha,\mu),$$

再令$\alpha=0$与$\mu=0$幷計及(10)最后便有：

$$dx_{\alpha}(t,0,0)/dt=f_x(p(t),t,0)x_{\alpha}(t,0,0),$$

此示$x_{\alpha}(t,0,0)$是(5)的矩陣解，又由初值条件(9)不难知道，$x_{\alpha}(t,0,0)$是(5)的基解陣且还滿足条件$x_{\alpha}(0,0,0)=E_n$，故可在(8)中取$x_{\alpha}(t,0,0)$作为$U(t)$；至此，注意定理中关于(5)沒有非平凡的反周期解之假設幷应用引理2，便可得証(13)的正确性。

进一步来考察(5)有非平凡反周期解的情况，因此时組(1)是退化的，故不失一般性地可轉而研究拟綫性組

$$dx/dt=Ax+\mu f(x,t,\mu), \tag{14}$$

其中A为实n阶常陣而余如条件a所規定。相应于組(14)的变分方程恒为

$$du/dt=Au, \tag{15}$$

这是常系数綫性齐次組，故借助矩陣函数e^{tA}，其一般解有形如(这里α为任意实n維常向量)：[5]

$$u(t)=e^{tA}\alpha, \tag{16}$$

将对陣A作如下規定(称条件b)：

$$A=diag[A_1,A_2,\cdots,A_k,B],$$

$$A_j=\begin{pmatrix} S_j & & & & \\ & S_j & & & \\ E_2 & & \ddots & & \\ & \ddots & & S_j & \\ & & & & E_2 \end{pmatrix},\qquad S_j=\begin{pmatrix} 0 & (2k_j+1) \\ -(2k_j+1) & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

这里A_j是$2n_j$阶陣（設写出的元素是 0 而k_j是整数，$j=1,2,\cdots,k$且 $0<2\sum_1^K n_j<n$,），而B是 $n'=n-2\sum_1^K n_j$ 阶陣且

$$det(e^{\pi B}+E_{n'})\neq 0 。\tag{18}$$

若用N、N_i与$\overline{N}_i(i=1,2)$来表示指标集：

$N=(1,2,\cdots,n)$，　$N_1=(1,2,2n_1+1,2n_1+2,\cdots,2\sum_1^{k-1}n_j+1,2\sum_1^{k-1}n_j+2)$，

$N_2=(2n_1-1,2n_1,2n_1+2n_2-1,2n_1+2n_2,\cdots,2\sum_1^K n_j-1,2\sum_1^K n_j)$，$\overline{N}_i=N\setminus N_i$，$(i=1,2)$，并对 n 阶陣 $c=(c_{ij})_{i,\ j\in N}$ 与 n 維向量 $\alpha=(\alpha_i)_{i\in N}$，記 $c_{AB}=(c_{ij})_{i\in A,\ j\in B}$ 与 $\alpha_A=(\alpha_i)_{i\in A}$，（这里$A$、$B$表 N 的子集）[6]，則在条件 b 之下，将有关系式：

$$\left[e^{\pi A}+E_n\right]_{N_1N}=0,\quad \left[e^{\pi A}+E_n\right]_{NN_2}=0, \tag{19}$$

$$det\left[e^{\pi A}+E_n\right]_{\overline{N}_1\overline{N}_2}\neq 0 。\tag{20}$$

称 n 維向量 α° 是例外的，如果它滿足条件

$$\alpha^\circ_{\overline{N}_2}=0 。\tag{21}$$

全体例外向量构成了 ξ 的 $2k$ 維子空間 ξ° 。

由引理 1 与等式(19)、(21)容易推得如下的

引理 3　若条件 b 成立且 $\alpha^\circ\in\xi^\circ$，則

$$p^{(\circ)}(t)=e^{tA}\alpha^\circ \tag{22}$$

是組(15)的反周期解。

这个結果表明：組(14)确是退化的，故定理 1 对它不适用，但此时我們却有如下的

定理 2　若組(14)滿足条件 a 且对陣 A 条件 b 成立，此外还存在 $\alpha^\circ\in\xi^\circ$ 适合如下两条件：

$$H_{N_1}(\alpha^\circ,0)\equiv\int_0^\pi e^{(\pi-s)A}_{N_1N}+(e^{sA}\alpha^\circ,s,0)ds=0, \tag{23}$$

$$D \equiv \det\left[\partial(H_{N_1})/\partial(\alpha^\circ_{N_2})\right] \neq 0 \tag{24}$$

則对充分小的μ，組(14)存在唯一連續的反周期解$q(t,\mu)$，适合条件$q(t,0)=p^\circ(t)$。

〔証〕 由假設知組(14)满足解的存在唯一性条件且其解关于初值与参数是連續的。今設$x(t,\alpha,\mu)$就是它的适合初值条件$x(0,\alpha,\mu)=\alpha$的唯一連續解，则由公式(16)并利用常数变易法可得：

$$x(t,\alpha,\mu) = e^{tA}\alpha + \mu\int_0^t e^{(t-s)A} f(x(s,\alpha,\mu),s,\mu)\,ds\text{。} \tag{25}$$

而依引理1，这时$x(t,\alpha,\mu)$的反周期性条件是：

$$\left[e^{\pi A}+E_n\right]\alpha + \mu\int_0^\pi e^{(\pi-s)A} f(x(s,\alpha,\mu),s,\mu)\,ds = 0\,. \tag{26}$$

故（也同定理1一样）为了得到我們定理的結果只需証明：从(26)可唯一地确定其連續解$\alpha(\mu)$适合条件$\alpha(0)=\alpha^\circ$。下面就来証明这断言是正确的。

为此，将(26)换成与其等价的（由于等式(19)）組：

$$H_A(\alpha,\mu) \equiv \begin{cases} \left[e^{\pi A}+E_n\right]_{\bar{N}_1\bar{N}_2}\alpha_{\bar{N}_2} + \mu\int_0^\pi e^{(\pi-s)A}_{\bar{N}_1 N} f(x(s,\alpha,\mu),s,\mu)\,ds = 0 \\ \qquad (A=\bar{N}_1), \\ \int_0^\pi e^{(\pi-s)A}_{N_1 N} f(x(s,\alpha,\mu),s,\mu)\,ds = 0 \qquad (A=N_1)\text{。} \end{cases} \tag{27}$$

注意到解$x(t,\alpha,\mu)$的連續性知$x(s,\alpha^\circ,0)=p^{(\circ)}(s)$，因此由$\alpha^\circ\in\xi^\circ$的定义(21)和(23)，从(27)立刻可以推得：

$$H(\alpha^\circ,0)=0\,;$$

而由于不等式(20)和(24)，我們还有

$$\det\left[\frac{\partial(H)}{\partial(\alpha)}(\alpha^\circ,0)\right] = \det\left[e^{\pi A}+E_n\right]_{\bar{N}_1\bar{N}_2} D \neq 0\,,$$

故也依隐函数存在定理可得：組(27)（因之也就是組(26)）确存在唯一連續解$\alpha(\mu)$适合条件$\alpha(0)=\alpha^\circ$。Ⅰ

§2　反周期解的决定方法

本节将闡明由前面定理保証存在的反周期解是可以具体决定的，但为簡单起见，只限于討論組(14)并考虑其右端为解析的情况。

定理3　在定理2的条件下，若$f(x,t,\mu)$关于(x,μ)是解析的，則反周期解

$q(t,\mu)$关于μ也是解析的且可展成μ的一致收斂的幂級数

$$q(t,\mu)=p^{(0)}(t)+\mu p^{(1)}(t)+\mu^2 p^{(2)}(t)+\cdots+\mu^l p^{(l)}(t)+\cdots, \qquad (28)$$

其中 $p^{(0)}(t)$如(22)所规定而其余諸 $p^{(l)}(t)$ （$l=1,2,\cdots$）皆为反周期的且可唯一地加以确定。

〔証〕 依通常的解析組的存在定理[2]，解 $q(t,\mu)$确是μ的解析函数且可展成幂級数形式(28)，而由它的唯一性也将不难得知这級数是一致收斂的。下面来証我們对諸 $p^{(l)}(t)$所作断言之正确性。为此，把(28)代入(14)中并比較所得恒等式两端μ的同次幂的系数，此时，对于諸 $p^{(l)}(t)$将得如下一系列的n維組：

$$dp^{(1)}/dt=Ap^{(1)}+f(p^{(0)}(t),t,0), \qquad (29_1)$$

$$dp^{(2)}/dt=Ap^{(2)}+f_x(p^{(0)}(t),t,0)p^{(1)}(t)+F^{(0)}, \qquad (29_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dp^{(l)}/dt=Ap^{(l)}+f_x(p^{(0)}(t),t,0)p^{(l-1)}(t)+F^{(l-2)}, \qquad (29_l)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这里$F^{(l-2)}$含有$p^{(0)}(t)$、$p^{(1)}(t)\cdots p^{(l-2)}(t)$ （$l=2,3\cdots$）且可由$f(q(t,\mu),t,\mu)$关于μ的Taylor 展式唯一地确定。

由于定理的假設，$f(x,t,\mu)$对t有周期π且关于x为奇的，而$p^{(0)}(t)$依定义是反周期的，故在(29_1)中$f(p^{(0)}(t),t,0)$作为t的函数来說是反周期的。更一般地，基于奇偶函数經微分运算之后的奇偶性輪換規律，通过对諸$F^{(l-2)}$$(l=2,3\cdots)$的具体分析之后不难推知，若已知道$p^{(1)}(t)$、$p^{(2)}(t)$、$\cdots p^{(l-1)}(t)$是(29)中前$l-1$組方程的反周期解，則組$(29_l)$ $(l=2,3,\cdots)$将具有这样的形式：

$$dv/dt=Av+F(t), \qquad (30)$$

其中$F(t)$是反周期的（即有$F(t+\pi)\equiv-F(t)$）。

具有上述性質之組(30)是极其有趣的，因为对于它来說，也有着同引理1所指出的类似的結果，即其解$v(t)$具有反周期性的充要条件是

$$v(\pi)=-v(0) 。\qquad (31)$$

这容易由直接驗証得知，更重要的是：由此結果可以推出如下的

引理4　若$F(t)$是反周期的且陣A滿足条件b，則組(30)有反周期解的充要条件是滿足关系式：

$$\int_0^{\pi} e^{(\pi-s)A}_{N_1N}\, F(s)ds=0, \qquad (32)$$

而且，在条件(32)之下，組(30)将有无穷多个反周期解，其一般形状为

$$v(t)=e^{tA}\alpha+\int_0^t e^{(t-s)A}F(s)ds, \qquad (33)$$

此地α是这样的一类n維向量，对于它来說，α_{N_2}可以是任意的而$\alpha_{\overline{N}_2}$由下面的方程唯一地确定：

$$[e^{\pi A}+E_n]_{\overline{N}_1\overline{N}_2}\alpha_{\overline{N}_2}+\int_0^{\pi}e^{(\pi-s)A}_{\overline{N}_1N}F(s)ds=0。\quad(34)$$

现在我們将不去証明引理4（因为这是不困难的）而回到組(29)，利用引理4的結果来闡明(28)中諸$p^{(l)}(t)$ $(l=1,2,\cdots)$的具体决定方法。

首先，由$p^{(0)}(t)$与α^0的定义立刻得知，对于組(29_1)来說，形如(32)的条件已被滿足（这就是(23)），故依引理4，它有无穷多个反周期解，其形如

$$\overline{p}^{(1)}(t)=e^{tA}\alpha^{(1)}+\int_0^t e^{(t-s)A}f(p^{(0)}(s),s,0)ds,\quad(35)$$

这里，对于$\alpha^{(1)}$来說，$\alpha^{(1)}_{\overline{N}_2}$由代数方程組

$$[e^{\pi A}+E_n]_{\overline{N}_1\overline{N}_2}\alpha^{(1)}_{\overline{N}_2}+\int_0^{\pi}e^{(\pi-s)A}_{\overline{N}_1N}f(p^{(0)}(s),s,0)ds=0\quad(36)$$

唯一地确定着而$\alpha^{(1)}_{N_2}$可以是任意的。

其次，我們来选取这样一个$\overline{p}^{(1)}(t)$作为$p^{(1)}(t)$：它使得組(29_2)存在反周期解。为此，再由引理4，令

$$\int_0^{\pi}e^{(\pi-s)A}_{N_1N}\Big\{f_x(p^{(0)}(s),s,0)[e^{sA}\alpha^{(1)}+\int_0^s e^{(s-\tau)A}f(p^{(0)}(\tau),\tau,0)d\tau]+$$
$$+F^{(0)}(s)\Big\}ds=0,$$

采用記号 $\overline{p}^{(1)}(s)=\int_0^t[e^{(t-s)A}f(p^{(0)}(s),s,o)ds$ 并将上式加以整理可得：

$$\Big[\int_0^{\pi}e^{(\pi-s)A}_{N_1N}f_x(p^{(0)}(s),s,o)e^{sA}_{NN_2}ds\Big]\alpha^{(1)}_{N_2}=-\int_0^{\pi}e^{(\pi-s)A}_{N_1N}\Big\{f_x(p(s),s,o)$$
$$\Big[e^{sA}_{N\overline{N}_2}\alpha^{(1)}_{\overline{N}_2}+\overline{p}^{(1)}_{(s)}\Big]+F^{(0)}_{(s)}\Big\}ds。\quad(37)$$

注意到 $$det\Big[\int_0^{\pi}e^{(\pi-s)A}_{N_1N}f_x(p^{(0)}(s),s,o)e^{sA}_{NN_2}ds\Big]=D,$$

故由条件(24)知，从(37)将可唯一地确定$\alpha^{(1)}_{N_2}$，这就証明了：在展式(28)中，$p^{(1)}_{(t)}$是反周期的且可以唯一地确定。

至此，对一般的自然数l，关于展式(28)中出现的$p^{(l)}(t)$的类似的断言，已

經可以运用数学归納法推得而毫无其它原則性的困难，因此，在这里我們将不贅述而仅指出：一般的 $p^{(l)}(t)(l=2,3,\cdots)$ 有形如

$$p^{(l)}(t)=e^{tA}\alpha^{(l)}+\bar{p}^{(l)}(t), \tag{38}$$

其中 $$\bar{p}^{(l)}(t)=\int_0^t e^{(t-s)A}\Big[f_x(p^{(0)}(s),s,o)p^{(l-1)}(s)+F^{(l-1)}(s)\Big]ds,$$

而 $\alpha^{(l)}$ 由代数方程組

$$\begin{cases}\Big[e^{\pi A}+E_n\Big]_{\bar{N}_1\bar{N}_2}\alpha^{(l)}_{\bar{N}_2}=-\tilde{p}^{(l)}(\pi) & (39)\\ \Big[\int_0^\pi e^{(\pi-s)A}_{N_1N} f_x(p^{(0)}(s),s,o)\,e^{SA}_{NN_2}ds\Big]\alpha^{(l)}_{N_2}=-\int_0^\pi e^{(\pi-s)A}_{N_1N}\Big\{f_x(p^{(0)}(s),s,o) & \\ \Big[e^{sA}_{N\bar{N}_2}\alpha^{(l)}_{\bar{N}_2}+\bar{p}^{(l)}_{(s)}\Big]+F^{(l)}_{(s)}\Big\}dS\text{。} & (40)\end{cases}$$

唯一地确定着。

(注)在非解析組的情况下，反周期解 $q(t,\mu)$ 也可利用逐次追近法来决定(同关于周期解的結果[7]类似)。

§3　反周期变换与反鞍点

上面已研究了在一般情形下非自治系統反周期解的存在問題，现在将来考察反周期变换的某些特性。

我們在組(14)中令 $n=2k$ 并設陣 A 有形如

$$A=diag[J_1,J_2,\cdots,J_k],\quad J_i=\begin{pmatrix}0 & 2kj+1\\ -(2kj+1) & 0\end{pmatrix}(kj\text{为整数而}i=1,\cdots,k) \tag{41}$$

这时組(14)将是完全退化的而矩陣函数 $U(t)=e^{tA}$ 与其逆陣 $U^{-1}(t)$ 皆为反周期的。

具有反周期系数陣的綫性变换

$$x=U(t)y \tag{42}$$

将称为反周期变换。易知，在(42)之下組(14)变成

$$dy/dt=\mu g(y,t,\mu),\quad (g(y,t,\mu)=U^{-1}(t)f(U(t)y,t,\mu)), \tag{43}$$

这仍是对 t 有周期为 π 的組。但原組(14)的反周期解的存在問題此时却变成了新組(43)的周期解的存在問題。因对后者已有相当完善的結果[8,9]，故我們的問題也已随之得到很好的解决了。

与此类似的結果我們也可对更一般的、不含小参数的、具有周期右端的組

$$dx/dt=B(t)x+f(x,t) \tag{44}$$

建立起来。在这种情况下，利用变换(42)可以得到一系列有关存在反周期解的命題。下面仅举其一以玆說明。

定理4 若对組(44)作如下假設：

1） x 为实的 $2k$ 維向量，$B(t)$ 为实的 $2k$ 阶連續陣且对 t 有周期 π，而 $2k$ 維的向量函数 $f(x,t)$ 的分量是其所含变量的实連續函数、对 t 有最小正周期 π 且关于 x 为奇的。

2） 相应的綫性齐次組 $du/dt=B(t)u$ 沒有形如 $-e^{ki}$ 的乘子（这里 k 为整数而 $i=\sqrt{-1}$）。

3） 对充分大的 $\|x\|$（此地 $\|\cdot\|$ 表向量的模），有不等式 $\|f(x,t)\|<M\|x\|$，这里 M 为某个充分大的正常数。

則組(44)至少存在一个反周期解。

上述断言的証明是不具任何困难的；只要注意变換(42)的反周期性，再利用一个关于周期解的存在定理[10]便可直接推得。

值得注意的是，反周期变換不仅适用于研究有关共振的問題，而且对于研究不振动情形的微分系統也很有帮助，于此，我們以建立存在映象的反鞍点之充分条件为例来作說明。

为簡单起見，只叙述在最簡单情况下得到的結果。我們考虑2維的微分系統

$$dx/dt=B(t)x, \tag{45}$$

这里 x 是实二維平面上的向量而 $B(t)$ 是实的二阶連續陣，其元素具有最小正周期 π。由解的存在唯一性定理，对 x 平面上的任意一个点 x°，組(45)必存在唯一解 $x(t,x^\circ)$ 适合条件 $x(o,x^\circ)=x^\circ$。由关系式 $x^\circ\longrightarrow x^1=x(\pi,x^\circ)$ 确定着一个从 x 平面到其自身的拓扑映象 T；类似地，由 $x^\circ\longrightarrow x^n=x(n\pi,x^\circ)$ 确定的映象 T^n（n 为任意整数）也是拓扑的。滿足条件 $x^\circ=T(x^\circ)$ 的点将称为 T 的不动点。比对 poincaré 的奇点理論，可以把 T 的不动点进行某种分类[11]。在所有得到的不动点类型中，最为突出的一种就是所謂反鞍点（这是通常的奇点理論中所沒有的！），其定义如下：

称映象 T 的不动点 x° 为反鞍点，如果：

1） 点 x° 在映象 T^2 之下是直接鞍点，（与奇点中的鞍点类似），卽存在两对不变方向或連續統 γ_1 与 γ_2，其中 $\gamma_1(\gamma_2)$ 这一对把 x° 附近的点分成两部分，使它們于 $T^2(T^{-2})$ 之下各朝相反的方向离开 x°，而在 $\gamma_1(\gamma_2)$ 上的点于 $T^2(T^{-2})$ 之下却朝向 x° 移动，但所有其他的点则当 n 充分大时在 $T^{2n}(T^{-2n})$ 之下最終远离 x°；2）在映象 T 之下，γ_1 与 γ_2 的每一分支上的点各走到其反向的另一分支上去，而在 γ_1 与 γ_1 的各一分支之間部分中的点則走到它們反向的另外两分支之間的部分去。

现在来指出：系統(45)存在反鞍点的条件。首先，注意到(45)是一个綫性齐次組，故 x 平面上的原点0就是映象 T 的不动点；其次，由反周期变換的定义和一

个几何上的明显的事实不难推知：若 $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$U(t)=e^{tJ}$，则变换

$$x=U(t)y \tag{46}$$

是反周期的，且当 $t=\pi$ 时，(50)还可視作平面上的一个旋轉变换，它把每个点变为与其关于原点形成中心对称的点。最后，我們便有如下的

定理 5　若系統(45)的乘子 λ_1 与 λ_2 皆为实的且滿足条件

$$-\infty<\lambda_1<-1<\lambda_2<0 \tag{47}$$

则原点 0 是映象 T 的反鞍点。

〔証〕　在变换(46)之下，組(45)化为

$$dy/dt=U^{-1}(t)[B(t)-J]U(t)y, \tag{48}$$

这仍是一个具周期系数的組，但由条件(47)知，它的乘子 μ_1 与 μ_2 将滿足条件

$$0<\mu_1<1<\mu_2<+\infty, \tag{49}$$

故依可化組的理論[12]，存在一个有周期为 π 的周期系数陣 $P(t)$ 的 Ляпунов 变换

$$y=P(t)z,\ (P(0)=E_2) \tag{50}$$

使(48)化为一个常系数的綫性齐次組

$$dz/dt=Cz \qquad (\det C<0)\cdot \tag{51}$$

容易察知，在 z 平面上，原点是組(51)在 Poincaré 意义下的鞍点，因之，由变换(50)的性質得：在 y 平面上，原点是由系統(48)的解所确定之映象$\widetilde{T}$(定义仿 T)的直接鞍点；故最后基于前面指出的反周期变换(46)的特性便可推知，在 x 平面上，原点 0 确是映象 T 的反鞍点。

例．具有反鞍点的系統(45)的最簡单例子是

$$\begin{cases} dx_1/dt=[a\cos^2t-b\sin^2t]x_1+[1-(a+b)\sin t\cos t]x_2\\ dx_2/dt=-[1+(a+b)\sin t\cos t]x_1+[a\sin^2t-b\cos^2t]x, \end{cases}$$

(其中 a 与 b 是正实数)，因为此时組有乘子 $\lambda_1=-e^{a\pi}$ 与 $\lambda_2=-e^{-b\pi}$ 滿足条件(47)。特別地，在这情况下，变换 T 的不变方向 γ_1 与 γ_2 就是直綫 $x_1=0$ 与 $x_2=0$ 。

順便指出这一事实將是有意义的；由定理 5 可以来闡明关于动力系統典型式之不稳定集的区分[13]的实質，因它有如下重要的

推論　若系統(45)是一动力系統的典型式(即于其中有 $B(t)=JH(t)$ 而 $H(t)$ 是实的二阶对称連續陣且有周期 π)，則当它不具有单位模的乘子时，映象 T 将以原点 0 为直接鞍点或反鞍点。

这結果表明：在动力系統典型式理論中，不稳定集 $\mathfrak{a}$ 之分成两个子集 $\mathfrak{a}^+$ 与 $\mathfrak{a}^-$，

实际上是依其系統存在直接鞍点($\mathscr{X}^+$)或反鞍点($\mathscr{X}^-$)而决定的。

这里我們也附带提及一下：上面关于不振动情形的討論可以对更广泛的一类微分系統（例如对具有非齐次右端的綫性組或者高維的組）来进行，特别的是，对于$2k$維（$k>1$）的型如(45)的組，我們也可以引进广义的直接鞍点和反鞍点的概念，而这时，利用一般的反周期变换(42)的性质便能够給出其相应的存在条件，并由此对胡金昌教授关于高維动力系統不稳定集的子集 $\mathscr{X}\setminus\Gamma$ 的区分[14]作出与上类似的注記。

最后，作者表示衷心感謝导师胡金昌教授的鼓励与指点。

参考文献

〔1〕 Poincayé H., Les méthodes nouvelles de mécanique céleste, vol. 1, Paris, (1892).

〔2〕 Coddington E.A. and Levinson N., Theory of Ordinary Differential Equations, New York, (1955).

〔3〕 Lefschetz S., Differential Equations: Geometric Theory, New York, (1957).

〔4〕 Фихтенгольц Г.М., Курс Дифференциального и интегрального исчислений, Гостехиздат., т.I, (1960).

〔5〕 Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, М., (1954).

〔6〕 Vejvoda O., Чех. Мат. Жун., том. 11(86), (1961), стр.62—75.

〔7〕 Малкин И.Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., (1956).

〔8〕 Coddington E.A. and Levinson N., Contributions to the Theory of Non-linear Oscillations, vol. 2, Princeton, (1952), pp. 19—35.

〔9〕 Cronin J., Duke. Math. J., vol. 26, № 2, (1959), pp. 251—262.

〔10〕 Плисс В.А., ДАН. 137, № 5, (1961), стр. 1060—1062.

〔11〕 Cartwright M.A., Contributions to the Theory of Non-linear Oscillations, vol. I. Princeton, (1950), pp. 149—242.

〔12〕 Ляпунов А.М., Общая задача об устойчивости движения, м.-л., (1950).

〔13〕 Якубович В.А., Матем. сб., 44 (86), №3, (1958), стр. 313—352.

〔14〕 胡金昌，中山大学学报（自然科学），1（1964），1—9頁。

On The Anti–periodic Solutions And Inverse Col

Ting You-bing

Abstract

In this paper certain non-autonomous systems with periodic right-hand members are cousidered. § § 1,2 deal with certain second-order subharmonic resonance, and by means of Poincaré's perturbation method several existence and uniqueness theorems on anti-periodic solutions are established. Meanwhile, we have an effective method for determining these anti-periodic solutions. In § 3 we consider certain characteristics of linear transformations with anti-periodic coefficients, and thereby, a sufficient condition for the existence of inverse col of the mapping defined by the totality of solutions of the considered systems is obtained.