中山大学学报 1966年 第1期

二元馬尔科夫鏈

戴永隆

（数学力学系）

摘要

本文提出的二元馬尔科夫鏈，直观上可以这样理解：一个质点的运动具有两个"時間"参数（非負整数）.在已知某时（s,t）〔現在〕质点所处的状态时，它在$s'>s$，$t'>t$〔将来〕的运动状况与$s'<s$，$t'<t$〔过去〕的运动状况无关。〔見§1第一段〕，这可以把这种过程理解为以半序参数为多数的馬氏鏈〔見定理2后的說明。〕

§1的結果主要是研究这种过程的結构，定理2基本上完成了它，那里說明二元馬氏鏈可看作一族具有某种相容性质的轉移矩陣組成。§2指出这种过程的一般性質。§3研究了与它相联系的所謂对角綫馬氏鏈的性质。

§1 定义与存在定理

1. 設（Ω,F,P）为基本概率空間。I_1,I_2为两可列集，$I=I_1\times I_2$为其乘积。設 $\{x_n^{(1)}, n\geqslant 0$ 为整数$\}$，$\{x_m^{(2)}, m\geqslant 0$ 为整数$\}$为定义在基本概率空間，分别取值于I_1及I_2上的两随机过程，如果对任意$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$，$0\leqslant u_1<u_2<\cdots<u_m$及任意$i_1^{(1)},\cdots,i_n^{(1)}\in I_1$，$i_1^{(2)},\cdots,i_m^{(2)}\in I_2$成立

$$
\begin{aligned}
&P\left(x_{t_n}^{(1)}=i_n^{(1)}\ ;\ x_{u_m}^{(2)}=i_m^{(2)}\ \middle|\ x_{t_v}^{(1)}=i_v^{(1)}\ 0\leqslant v\leqslant n-1\ ;\right.\\
&\qquad\left.x_{u_s}^{(2)}=i_s^{(2)}\ 0\leqslant s\leqslant m-1\right)\\
&=P\left(x_{t_n}^{(1)}=i_n^{(1)}\ ;\ x_{u_m}^{(2)}=i_m^{(2)}\ \middle|\ x_{t_{n-1}}^{(1)}=i_{n-1}^{(1)}\ ;\right.\\
&\qquad\left.x_{u_{m-1}}^{(2)}=i_{m-1}^{(2)}\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

本文于1965年10月26日收到。

（当然，这是指上述条件概率有意义的情形下。）则称$\left(x_n^{(1)}, x_m^{(2)}\right)$为二元馬尔科夫鏈，簡称为二元馬氏鏈。

条件（1）等价于，对任意$n, m \geqslant 0$

$$P\left(x_n^{(1)}=i_n^{(1)};\ x_m^{(2)}=i_m^{(2)} \middle| x_v^{(1)}=i_v^{(1)},\ 0\leqslant v\leqslant n-1;\right.$$
$$\left. x_s^{(2)}=i_s^{(2)},\ 0\leqslant s\leqslant m-1\right)$$
$$=P\left(x_n^{(1)}=i_n^{(1)};\ x_m^{(2)}=i_m^{(2)} \middle| x_{n-1}^{(1)}=i_{n-1}^{(1)};\right.$$
$$\left. x_{m-1}^{(1)}=i_{m-1}^{(2)}\right) \tag{2}$$

更一般地，設$M\in\mathcal{F}(C_{t_n u_m})$而

$$C_{t_n u_m}\equiv\{A\cap B:\ A\in\mathcal{F}\ (x_t^{(1)}(0t\geqslant t_n)B\in\mathcal{F}\ (x_n^{(2)}u\geqslant u_m)\}$$

（此处$\mathcal{F}\{\xi_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$表示随机族$\{\xi_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$产生的$\sigma$-代数。）則有

$$P\left(M \middle| x_{t_v}^{(1)}=i_v^{(1)},\ 0\leqslant V\leqslant n;\ x_{u_s}^{(2)}=i_s^{(2)},\ 0\leqslant s\leqslant m\right)$$
$$=P\left(M \middle| x_{t_n}^{(1)}=i_n^{(1)},\ x_{u_m}^{(2)}=i_m^{(2)}\right) \tag{3}$$

（1）（2）（3）的等价性是显而易見的。和（1）一样，（2）（3）均假定在条件概率有意义的时候才予以考虑，今后的类似表达式都附有这个說明。

2.今后常使用如下的記号，$i\in I$意味着$i^{(1)}\in I_1$，$i^{(2)}\in I_2$ $i=(i^{(1)}, i^{(2)})$。$x_{nm}=\left(x_n^{(1)}, x_m^{(2)}\right)=i$ 意味着 $x_n^{(1)}=i_n^{(1)}$ $x_m^{(2)}=i^{(2)}$ $i=\left(i^{(1)}, i^{(2)}\right)$。

显然当$\left\{x_n^{(1)}, x_m^{(2)},\ n\geqslant 0,\ m\geqslant 0\right\}$为二元馬氏鏈，則$\left\{x_n^{(1)},\ x_n^{(2)} n\geqslant 0\right\}$为相空間$I$上的馬氏鏈，記这个馬氏鏈为$\{x_n^D,\ n\geqslant 0\}$称为对角綫馬氏鏈。

今后恒設二元馬氏鏈滿足

$$P\left(x_{n+h}^{(1)}=j^{(1)};\ x_{m+h'}^{(2)}=j^{(2)} \middle| x_h^{(1)}=i^{(1)}\ x_{h'}^{(2)}=i^{(2)}\right)=P_{ij}(n, m)$$

与h, h'无关。此处$i=(i^{(1)}, i^{(2)})$　$j=(j^{(1)}, j^{(2)})$.

定理1. $P_{ij}(n+n', m+m')=\sum_{k\in I} P_{ik}(n, m)P_{kj}(n', m')$　$i, j\in I$.

証明　当$n'=m'=0$，結論显然成立。

固定$n'=0$，設已有

$$P_{ij}(n, m+m')=\sum_{k\in I} P_{ik}(n, m)P_{kj}(0, m')$$

則因

$$
\begin{aligned}
&P(x_{n,m+m'+1}=j\mid x_{0,0}=i)\\
&=\sum_{k\in\mathrm{I}}P(x_{n,m+m'}=k\mid x_{0,0}=i)P(x_{n,m+m'+1}=j\mid x_{n,m+m'}=k)\\
&=\sum_{k\in\mathrm{I}}P_{ik}(n,m+m')P_{kj}(0,1)\\
&=\sum_{k\in\mathrm{I}}\Big[\sum_{l\in\mathrm{I}}P_{il}(n,m)P_{lk}(0,m')\Big]P_{kj}(0,1)\\
&=\sum_{l\in\mathrm{I}}P_{il}(n,m)\sum_{k\in\mathrm{I}}P_{lk}(0,m')P_{kj}(0,1)\\
&=\sum_{l\in\mathrm{I}}P_{il}(n,m)P_{lj}(0,m'+1)
\end{aligned}
$$

即当$n'=0$时，对任意m'結論成立。

現固定$m'\geqslant 0$，由$n'=0$結論成立，再对n'行归納法，可知定理結論全成立，証完

3. 由定理1，我們得：

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(n,m)&=\sum_{k\in\mathrm{I}}P_{ik}(n,0)P_{kj}(0,m)\\
&=\sum_{k\in\mathrm{I}}P(x_n^{(1)}=k^{(1)};\ x_0^{(2)}=k^{(2)}\ \big|\ x_0^{(1)}=i^{(1)};\ x_0^{(2)}=i^{(2)})\\
&\quad\times P(x_0^{(1)}=j^{(1)};\ x_m^{(2)}=j^{(2)}\ \big|\ x_0^{(1)}=k^{(1)};\ x_0^{(2)}=k^{(2)})\\
&=P(x_n^{(1)}=j^{(1)};\ x_0^{(2)}=i^{(2)}\ \big|\ x_0^{(1)}=i^{(1)};\ x_0^{(2)}=i^{(2)})\\
&\quad\times P(x_0^{(1)}=j^{(1)};\ x_m^{(2)}=j^{(2)}\ \big|\ x_0^{(1)}=j^{(1)};\ x_0^{(2)}=i^{(2)})\\
&=P_{(i^{(1)},i^{(2)})(j^{(1)},i^{(2)})}(n,0)P_{(j^{(1)},i^{(2)})(j^{(1)},j^{(2)})}(0,m)
\end{aligned}\tag{4}
$$

完全同样計算得

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(n,m)&=\sum_{k\in\mathrm{I}}P_{ik}(0,m)P_{kj}(n,0)\\
&=P_{(i^{(1)},i^{(2)})(i^{(1)},j^{(2)})}(0,m)P_{(i^{(1)},j^{(2)})(j^{(1)},i^{(2)})}(n,0)
\end{aligned}\tag{5}
$$

固定 $i^{(2)}\in\mathrm{I}_2$ 引进

$$
P_{i_1^{(1)}j^{(1)}}(i^{(2)})=P_{(i_1^{(1)},i^{(2)})(j^{(1)},i^{(2)})}(1,0)\quad i_1^{(1)},j^{(1)}\in\mathrm{I}_1\tag{6}
$$

固定 $i^{(1)}\in\mathrm{I}_1$ 引进

$$
P_{i_1^{(2)}j^{(2)}}(i^{(1)})=P_{(i^{(1)},i_1^{(2)})(i^{(1)},j^{(2)})}(0,1)\quad i_1^{(2)},j^{(2)}\in\mathrm{I}_2\tag{7}
$$

当 $i=(i^{(1)},i^{(2)})$ 固定时，(6),(7)分别决定了 I_1,I_2 上的轉移矩陣，这两个轉移矩陣分别称作：在点 i 到 I_1,I_2 上的投影，它們的 n 步轉移概率記作

$$P_{i_1^{(1)}j^{(1)}}^{(n)}(i^{(2)})\ ;\quad P_{i_1^{(2)}j^{(2)}}^{(n)}(i^{(1)})$$

由(4)(5)的計算可知，对 $i,j\epsilon I$ 的投影存在关系，

$$\begin{aligned}P_{ij}(n,m)&=P_{i^{(1)}j^{(1)}}^{(n)}(i^{(2)})\ P_{i^{(2)}j^{(2)}}^{(m)}(j^{(1)})\\&=P_{i^{(2)}j^{(2)}}^{(m)}(i^{(1)})\ P_{i^{(1)}j^{(1)}}^{(n)}(j^{(2)})\end{aligned}\tag{8}$$

特別，令 $n=m=1$ 得

$$\begin{aligned}&P_{i^{(1)}j^{(1)}}\ (i^{(2)})P_{i^{(2)}j^{(2)}}\ (j^{(1)})\\&=P_{i^{(2)}j^{(2)}}\ (i^{(1)})P_{i^{(1)}j^{(1)}}\ (j^{(2)})\end{aligned}\tag{9}$$

关系式(8)(9)称为相容关系。

定理2. 若設 I_1,I_2 是可列集，$I=I_1\times I_2$ 为其乘积，設給定 $\{P_i,i\epsilon I\}$ $P_i\geqslant 0$ $\sum\limits_{i\epsilon I}Pi=1$. 而对每点 $i=(i^{(1)},i^{(2)})\epsilon I$ 存在

$$\begin{aligned}&P_{i_1^{(1)}j^{(1)}}(i^{(2)})(i_1{}^{(1)},j^{(1)}\epsilon I_1)\ ;\\&\quad P_{i_1^{(2)}j^{(2)}}(i^{(1)})(i_1^{(2)},\ j^{(2)}\epsilon I_2)\end{aligned}\tag{10}$$

分别为 I_1，及 I_2 上的轉移矩陣，而且对任意 $i,j\epsilon I$，它們滿足相容关系(9)

在这些条件下，可以找到概率空間 $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 和在它上面定义取值于 I 上的二元馬氏鏈 $\{x_n^{(1)},x_m^{(2)}\}$ 滿足：（称为初始分布）

$$P[(x_0^{(1)},x_0^{(2)})=i]=P_i$$

而且以(10)为点 i 到 I_1，I_2 上的投影。

証明．設取值于 I_1，I_2 上的无穷序列 $\{\xi_n n\geqslant 0\}$ $\{\eta_m,m\geqslant 0\}$ 全体組成空間 Ω_1，Ω_2，令 $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$，記：

$$Z^{(1)}(i_0^{(1)},\cdots i_n^{(1)})=\{\xi\epsilon\Omega_1:\ \xi_v=i_v^{(1)}\ \ 0\leqslant v\leqslant n\}$$

$$Z^{(2)}(i_0^{(2)},\cdots i_m^{(2)})=\{\eta\epsilon\Omega_2:\ \eta_v=i_v^{(2)}\ \ 0\leqslant v\leqslant m\}$$

称为柱集，此处 $\{i_v^{(1)}\ 0\leqslant v\leqslant n\}\subset I_1$ $\{i_v^{(2)}\ 0\leqslant v\leqslant m\}\subset I_2$，

令

$$P[Z^{(1)}(i_0^{(1)},\cdots i_n^{(1)})\times Z^{(2)}(i_0^{(2)},\cdots i_m^{(2)})]$$

$$= P_{(i_0^{(1)},\, i_0^{(2)})} \prod_{v=1}^{m} P_{i_{v-1}^{(2)} i_v^{(2)}} (i_0^{(1)}) \prod_{s=1}^{n} P_{i_{s-1}^{(1)} i_s^{(1)}} (i_m^{(2)}) \quad (11)$$

往証由(11)所定义的P能扩张成Ω上的概率测度，只須証相容性，而且显然只須証关系：

$$P[Z^{(1)}(i_0^{(1)},\cdots i_n^{(1)}) \times Z^{(2)}(i_0^{(2)},\cdots i_{m-1}^{(2)})]$$

$$= \sum_{i_m^{(2)} \in I_2} P[Z^{(1)}(i_0^{(1)},\cdots i_n^{(1)}) \times Z^{(2)}(i_0^{(2)},\cdots i_m^{(2)})]$$

事实上，我們有

$$\sum_{i_m^{(2)} \in I_2} P_{(i_0^{(1)},\, i_0^{(2)})} \prod_{v=1}^{m} P_{i_{v-1}^{(2)} i_v^{(2)}}(i_0^{(1)}) \prod_{s=1}^{n} P_{i_{s-1}^{(1)} i_s^{(1)}}(i_m^{(2)})$$

$$= P_{(i_0^{(1)}\, i_0^{(2)})} \prod_{v=1}^{m-1} P_{i_{v-1}^{(2)} i_v^{(2)}}(i_0^{(1)}) \left\{ \sum_{i_m^{(2)} \in I_2} \prod_{s=1}^{n} P_{i_{s-1}^{(1)} i_s^{(1)}}(i_m^{(2)}) \quad P_{i_{m-1}^{(2)} i_m^{(2)}}(i_0^{(1)}) \right\}$$

由相容关系(9)得

$$P_{i_{s-1}^{(1)} i_s^{(1)}}(i_m^{(2)}) = \frac{P_{i_{m-1}^{(2)} i_m^{(2)}}(i_s^{(1)})\, P i_{s-1}^{(1)} i_s^{(1)}(i_{m-1}^{(2)})}{P_{i_{m-1}^{(2)} i_m^{(2)}}(i_{s-1}^{(1)})}$$

故代入上式有

$$\sum_{i_m^{(2)} \in I_2} P[Z^{(1)}(i_0^{(1)},\cdots i_n^{(1)}) \times Z^{(2)}(i_0^{(2)},\cdots i_m^{(2)})]$$

$$= \sum_{i_m^{(2)} \in I_2} P_{(i_0^{(1)},\, i_0^{(2)})} \prod_{v=1}^{m} P_{i_{v-1}^{(2)} i_v^{(2)}}(i_0^{(1)}) \prod_{s=1}^{n} P_{i_{s-1}^{(1)} i_s^{(1)}}(i_m^{(2)})$$

$$= P_{(i_0^{(1)},\, i_0^{(2)})} \prod_{v-1}^{m-1} P_{i_{v-1}^{(2)} i_v^{(2)}}(i_0^{(1)})$$

$$\left\{ \sum_{i_m^{(2)} \in I_2} \prod_{s=1}^{n} \frac{P_{i_{m-1}^{(2)} i_m^{(2)}}(i_s^{(1)})\, P_{i_{s-1}^{(1)} i_s^{(1)}}(i_{m-1}^{(2)})}{P i_{m-1}^{(2)} i_m^{(2)}(i_{s-1}^{(1)})} P_{i_{m-1}^{(2)} i_m^{(2)}}(i_0^{(1)}) \right\}$$

$$= P_{(i_0^{(1)},\ i_0^{(2)})} \prod_{v=1}^{m-1} P_{i_{v-1}^{(2)} i_v^{(2)}}(i_0^{(2)})$$

$$\left\{ \sum_{i_m^{(2)} \in \mathrm{I}_2} \prod_{s=1}^{n} P_{i_s^{(1)}}(i_{m-1}^{(2)}) P_{i_{m-1}^{(2)} i_m^{(2)}}(i_n^{(1)}) \right\}$$

$$= P_{(i_0^{(1)} i_0^{(2)})} \prod_{v=1}^{m-1} P_{i_v^{(2)} i_v^{(2)}}(i_0^{(1)}) \prod_{s=1}^{n} P_{i_{s-1}^{(1)} i_s^{(1)}}(i_{m-1}^{(2)})$$

从而可以把 P 唯一扩张成 Ω 上由柱集产生的 σ 代数 $\mathscr{F}$ 上的测度，

設 $(\xi, \eta) \in \Omega$，令

$$x_n^{(1)}(\xi, \eta) = \xi_n \ , \ x_m^{(2)}(\xi, \eta) = \eta_m$$

經过一番計算之后，可以驗证 $\{ x_n^{(1)},\ x_m^{(2)} \}$ 为 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上的二元馬氏鏈，而且滿足定理中的条件，证完

从定理 2 可以看出，对于二元馬氏鏈关系式(9)起着重要作用。因为我們若把格子点 $(m, n)(m \geqslant 0, n \geqslant 0)$ 定义半序 $P_1(m_1 n_1) \leqslant P_2(m_2, n_2)$ 当且仅当 $m_1 \leqslant m_2,\ n_1 \leqslant n_2$，而等号成立当且仅当 $m_1 = m_2$ $n_1 = n_2$. 則二元馬氏鏈就是照这个半序参数为参数的馬氏鏈即若 $P_1 \leqslant P_2 \leqslant \cdots \leqslant P_n$ 則

$$P\left(x_{p_n} = k_n | x_{p_1} = k_1 \cdots x_{p_{n-1}} = k_{n-1}\right) = P\left(x_{p_n} = k_n | x_{p_{n-1}} = k_{n-1}\right)$$

此处 $k_1, k_2, \cdots k_n \in \mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2$，由于关系(9)，我們已經基本上弄清楚了这种半序参数馬氏鏈的結构。

不难想見，在定义好了“多元”馬氏鏈以后，关系式(9)将会起怎样的变化，本文的結果还可推广到这种情形

4. 設 I_1，I_2 为两可列集，对每 $i^{(1)} \in \mathrm{I}_1$，$i^{(2)} \in \mathrm{I}_2$ 分别給出了投影

$$\mathrm{I}\ .\ P_{i^{(2)} j^{(2)}}(i^{(1)})\ ; \qquad \mathrm{II}\ .\ P_{i^{(1)} j^{(1)}}(i^{(2)})$$

若投影Ⅰ与 $i^{(1)} \in \mathrm{I}_1$ 无关，投影Ⅱ.与 $i^{(2)} \in \mathrm{I}_2$ 无关，則称所給的投影是独立的。此时投影Ⅰ、Ⅱ簡記为 $P_{i^{(2)} j^{(2)}}$，$P_{i^{(1)} j^{(1)}}$。

定理3. 設 $(x_n^{(1)},\ x_m^{(2)})$ 为二元馬氏鏈，則随机过程 $\{ x_n^{(1)} n \geqslant 0 \}$ 与 $\{ x_m^{(2)},\ m \geqslant 0 \}$ 独立的充分而且必要条件是：二元馬氏鏈的投影独立，而且具有独立的初始分布。

证明：如果投影独立，而且有独立的初始分布 $P_i = P_{i^{(1)}}^{(1)} P_{i^{(2)}}^{(2)}$，則

$$P_{ij}(n, m) = P_{i^{(1)} j^{(1)}} P_{i^{(2)} j^{(2)}}$$

而且

$$P(x_n{}^{(1)}=j^{(1)};\ x_m{}^{(2)}=j^{(2)})=\sum_{i\in I}P_iP_{ij}(n,m)$$

$$=\sum_{i^{(1)}\in I_1}\sum_{i^{(2)}\in I_2}P_{i^{(1)}}^{(1)}P_{i^{(2)}}^{(2)}P_{i^{(1)}j^{(1)}}P_{i^{(2)}j^{(2)}}$$

$$=P(x_n^{(1)}=j^{(1)})(x_m^{(2)}=j^{(2)})$$

从而 $\{x_n^{(1)},\ n\geqslant 0\}$ 与 $\{x_m^{(2)},\ m\geqslant 0\}$ 独立。

反之，若二馬元鏈 $\{x_n^{(1)},\ x_m^{(2)}\}$ 中 $\{x_n^{(1)},\ n\geqslant 0\}$ 与 $\{x_m^{(2)}m\geqslant\}0$ 独立，显然它有独立的初始分布，而且

$$P(x_n^{(1)}=j^{(1)},\ x_m^{(2)}=j^{(2)}\,|\,x_0^{(1)}=i^{(1)},\ x_0^{(2)}=i^{(2)})$$

$$=P(x_n^{(1)}=j^{(1)}\,|\,x_0^{(1)}=i^{(1)})P(x_m^{(2)}=j^{(2)}\,|\,x_0^{(2)}=i^{(2)}$$

$$=P_{i^{(1)}j^{(1)}}\ P_{i^{(2)}j^{(2)}}$$

从而它們的投影独立。証完。

§2　二元馬氏鏈的基本性質

5.本节以二元馬氏鏈的投影为基础来考虑二元馬氏鏈的局部与全局性质。

固定 $i\in I$，考虑在 i 的投影

$$P_{i^{(1)}j^{(1)}}(i^{(2)})\ ;\qquad P_{i^{(2)}j^{(2)}}(i^{(1)})$$

（此处第一个下标的 $i^{(1)}$ 与第二个投影括号的 $i^{(1)}$ 不同，后者是固定的，而前者是变动的，在§1，（6）（7）式中以 $i_1^{(1)},i^{(1)}$ 区别記之，但以后为了方便起見，就如上述記法亦不会混乱，对 $i^{(2)}$ 的記法亦附有同样解释。）

如果对在点 i 到 I_1 上的投影說来 $i^{(1)}$ 常返，对到 I_2 上的投影說来 $i^{(2)}$ 常返，則称 i 对二元馬氏鏈說来是常返的。

如果在点 i，对 I_1 上的投影 $i^{(1)}$ 有周期 $d^{(1)}$，对 I_2 上的投影 $i^{(2)}$ 有周期 $d^{(2)}$，則称二元馬氏鏈有周期偶（$d^{(1)},d^{(2)}$）。

下面开始来叙述二元馬氏鏈在一点的局部性质。

性質1.　i 对 $\{x_n^{(1)},\ x_m^{(2)}\}$ 为常返，当且仅当

$$P(x_{nm}=i\quad \text{存在某 } n,m\geqslant 1\,|\,x_{0\ 0}=i)=1$$

要証明这个性质，先証明如下的引理。这个引理对我們今后尚有用处。

引理1.　固定 $i=(i^{(1)}i^{(2)})\in I$，設 $\mathcal{F}_1$ 为全体集合 $\{x_n{}^{(1)}=i^{(1)}\}\,n\geqslant 1$ 所产生的 σ 代数。$\mathcal{F}_2$ 为全体集合 $\{x_m{}^{(2)}=i^{(2)}\}\,m\geqslant 1$ 所产生的 σ 代数，則对任意 $A\in\mathcal{F}_1$，

$B\in\mathscr{F}_2$ 有

$$P(AB|x_0^{(1)}=i^{(1)},\ x_0^{(2)}=i^{(2)})=P(A|x_0^{(1)}=i^{(1)},$$

$$x_0^{(2)}=i^{(2)})P(B|x_0^{(1)}=i^{(1)},\ x_0^{(2)}=i^{(2)})$$

即$\mathscr{F}_1$与$\mathscr{F}_2$对集合$\{x_{00}=i\}$条件独立。

証明. 設 $1\leqslant n_1<\cdots<n_k$　　$1\leqslant m_1<\cdots<m_s$ 则

$$P(x_{n_u}^{(1)}=i^{(1)}\quad 1\leqslant u\leqslant k;\ x_{m_v}^{(2)}=i^{(2)}\quad 1\leqslant v\leqslant s|x_0^{(1)}=i^{(1)},\ x_0^{(2)}=i^{(2)})$$

$$=\frac{P(x_{00}=i)\prod_{h=1}^{k}P_{i^{(1)}i^{(1)}}^{n_h-n_{h-1}}(i^{(2)})\prod_{h'=1}^{s}P_{i^{(2)}i^{(2)}}^{m_{h'}-m_{h'-1}}(i^{(1)})}{P(x_{00}=i)}$$

$$=P(x_{n_u}^{(1)}=i^{(1)}\quad 1\leqslant u\leqslant k;\ x_0^{(2)}=i^{(2)}|x_{00}=i)$$

$$\times P(x_{m_v}^{(2)}=i^{(2)}\,1\leqslant v\leqslant s;\ x_0^{(1)}=i^{(1)}|x_{00}=i)$$

$$=P(x_{n_u}^{(1)}=i^{(1)}\,1\leqslant u\leqslant k|x_{00}=i)P(x_{m_v}^{(2)}=i^{(2)}\,1\leqslant v\leqslant s|x_{00}=i)$$

从而当$A=\{x_{n_u}^{(1)}=i^{(1)}\,1\leqslant u\leqslant k\}$；　$B=\{x_{n_v}^{(2)}=i^{(2)}\,1\leqslant v\leqslant s\}$时引理的結論成立，从而很容易証明对任意$A\in\mathscr{F}_1$，$B\in\mathscr{F}_2$引理的結論是成立的。

性質1的証明． 由引理1显然有

$$P(x_{nm}=i\ \text{存在某}\ n\geqslant 1,\ m\geqslant 1|x_{00}=i)$$

$$=P(x_n^{(1)}=i^{(1)}\text{存在某}\ n\geqslant 1|x_{00}=i)P(x_m^{(2)}=i\ \text{存在某}\ m\geqslant 1|x_{00}=i)$$

如果i常返，由定义当且仅当$i^{(1)}$，$i^{(2)}$在点i的投影上是常返的，容易看出当且仅当上面的概率为1．証完．

下面令

$$f_{ij}(n,m)=P(x_{nm}=j;\ x_{uv}\neq j\ 1\leqslant u<n,\ 1\leqslant v<m|x_{00}=i)\tag{12}$$
$$i,\ j\in I\qquad n\geqslant 1\qquad m\geqslant 1$$

$$f_{ij}^{*}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f_{ij}(n,m)\tag{13}$$

以$f_{i^{(1)}j^{(1)}}^{n}i^{(2)}$ $\left(f_{i^{(2)}j^{(2)}}^{m}i^{(1)}\right)$記到$I_1$上的投影（到$I_2$上的投影），由$i^{(1)}(i^{(2)})$出发，$n(m)$步首次到$j^{(1)}(j^{(2)})$的概率，由引理1看出

性質2． 对任意$i\in I$，成立关系式

$$f_{ii}(n,m)=f_{i^{(1)}i^{(1)}}^{n}(i^{(2)})f_{i^{(2)}i^{(2)}}^{m}(i^{(1)})\tag{14}$$

从而又得到

$$f_{ii}^{*}=f_{i^{(1)}i^{(1)}}^{*}(i^{(2)})f_{i^{(2)}i^{(2)}}^{*}(i^{(1)})$$

性質3. i 常返，当且仅当 $f_{ii}^{*}=1$，.

这直接由上面的关系式得出。

令

$$m_{ii}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}nmf_{ii}(n,m)\qquad i\epsilon \mathrm{I}$$

当右边級数发散，令 $m_{ii}=\infty$

性質4. 当 i 非常返，則

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}P_{ii}(n,m)=0$$

当 i 常返时，則

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}P_{ii}(nd^{(1)},md^{(2)})=\frac{d^{(1)}d^{(2)}}{m_{ii}}$$

此处 $(d^{(1)},\ d^{(2)})$ 为 i 的周期偶，

証明. 由于 $P_{ii}(n,m)=P_{i^{(1)}i^{(1)}}^{n}(i^{(2)})P_{i^{(2)}i^{(2)}}^{m}(i^{(1)})$，当 i 非常返，則由定义或者 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{i^{(1)}i^{(1)}}(i^{(2)})=0$，者或 $\lim\limits_{m\to\infty}P_{i^{(2)}i^{(2)}}(i^{(1)})=0$，无論那种情形均有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}P_{ii}(n,m)=0$$

当 i 常返时，則

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}P_{ii}(nd^{(1)},md^{(2)})=\lim_{n\to\infty}P_{i^{(1)}i^{(1)}}^{nd^{(1)}}(i^{(2)})\lim_{m\to\infty}P_{i^{(2)}i^{(2)}}^{md^{(2)}}(i^{(1)})$$

$$=\frac{d^{(1)}}{m_{i^{(1)}i^{(1)}}(i^{(2)})}\cdot\frac{d^{(2)}}{m_{i^{(2)}i^{(2)}}(i^{(1)})}$$

此处

$$m_{i^{(1)}i^{(1)}}(i^{(2)})=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{i^{(1)}i^{(1)}}^{n}(i^{(2)})$$

$$m_{i^{(2)}i^{(2)}}(i^{(1)})=\sum_{m=1}^{\infty}mf_{i^{(2)}i^{(2)}}^{m}(i^{(1)})$$

故显然有$m_{ii}=m_{i^{(1)}i^{(1)}}(i^{(2)})m_{i^{(2)}i^{(2)}}(i^{(1)})$，代入上面的等式就得性质的4第二个結論。

附記：由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}P_{ii}(n,m)=\sum_{n=1}^{\infty}P_{i^{(1)}i^{(1)}}^{n}(i^{(2)})\sum_{m=1}^{\infty}P_{i^{(2)}i^{(2)}}^{m}(i^{(1)})$$

故i非常返，并不保证$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}P_{ii}(n,m)<\infty$，但当$i$常返則必有$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}P_{ii}(n,m)=\infty$。

6．上一段以一点的投影来考虑二元馬氏鏈的性质，結果得到在i点的局部性质，要得到二元馬氏鏈的全局性质，我們必須考虑在两点以上的投影。

考虑在i，j的投影

$$P_{i^{(1)}j^{(1)}}(i^{(2)});\ P_{i^{(2)}j^{(2)}}(j^{(1)});\ P_{i^{(1)}j^{(1)}}(j^{(2)});\ P_{i^{(2)}j^{(2)}}(i^{(1)});$$

它們滿足相容关系（9），称i可以到j（記作$i\rightsquigarrow j$），如果对投影$P_{i^{(1)}j^{(1)}}(i^{(2)})$ $i^{(1)}\rightsquigarrow j^{(1)}$，而且对投影$P_{i^{(2)}j^{(2)}}(j^{(1)})$ $i^{(2)}\rightsquigarrow j^{(2)}$．利用相容关系（9），得到得到完全对称的定义：称$i\rightsquigarrow j$，如果对投影$P_{i^{(2)}j^{(2)}}(i^{(1)})$有$i^{(2)}\rightsquigarrow j^{(2)}$，而且对投影$P_{i^{(1)}j^{(1)}}(j^{(2)})$ $i^{(1)}\rightsquigarrow j^{(1)}$，两种定义等价．

性質5． $i\rightsquigarrow j$，$j\quad k\Longrightarrow i\quad k$。

证明．如$i\rightsquigarrow j$ $j\quad k$由定义

对投影$P_{i^{(2)}j^{(2)}}(i^{(1)})$；$i^{(2)}\rightsquigarrow j^{(2)}$，故存在$n_1>0$ $P_{i^{(2)}j^{(2)}}^{n_1}(i^{(1)})>0$

对投影$P_{i^{(1)}j^{(1)}}(j^{(2)})$；$i^{(1)}\rightsquigarrow j^{(1)}$，故存在$n_2>0$ $P_{i^{(1)}j^{(1)}}^{n_2}(j^{(2)})>0$

对投影$P_{j^{(2)}k^{(2)}}(j^{(1)})$；$j^{(2)}\rightsquigarrow k^{(2)}$，故存在$n_3>0$ $P_{j^{(2)}k^{(2)}}^{n_3}(j^{(1)})>0$

对投影$P_{j^{(1)}k^{(1)}}(k^{(2)})$ $j^{(1)}\rightsquigarrow k^{(1)}$，故存在$n_4>0$ $P_{j^{(1)}k^{(1)}}^{n_4}(k^{(2)})>0$

从而

$$P_{i^{(2)}j^{(2)}}^{n_1}(i^{(1)})\ P_{i^{(1)}j^{(1)}}^{n_2}(j^{(2)})\ P_{j^{(2)}k^{(2)}}^{n_3}(j^{(1)})\ P_{j^{(1)}k^{(1)}}^{n_4}(k^{(2)})>0 \tag{15}$$

由相容关系（8）有

$$P_{i^{(1)}j^{(1)}}^{n_2}(j^{(2)})\ P_{j^{(2)}k^{(2)}}^{n_3}(j^{(1)})=P_{j^{(2)}k^{(2)}}^{n_3}(i^{(1)})\ P_{i^{(1)}j^{(1)}}^{n_2}(k^{(2)})$$

代入(15)得

$$P_{i^{(2)}j^{(2)}}^{n_1}(i^{(1)})\ P_{j^{(2)}k^{(2)}}^{n_3}(i^{(1)})\ P_{i^{(1)}j^{(1)}}^{n_2}(k^{(2)})\ P_{j^{(1)}k^{(1)}}^{n_4}(k^{(2)})>0$$

但由于上式左边的乘积，前面两个因子在同一投影上，后面两个因子在同一投影上，而且由于

$$P_{i^{(2)}k^{(2)}}^{n_1+n_3}(i^{(1)})>P_{i^{(2)}j^{(2)}}^{n_1}(i^{(1)})\ P_{j^{(2)}k^{(2)}}^{n_3}(i^{(1)})>0 \tag{16}$$

$$P_{i^{(1)}k^{(1)}}^{n_2+n_4}(k^{(2)})>P_{i^{(1)}j^{(1)}}^{n_2}(k^{(2)})\ P_{j^{(1)}k^{(1)}}^{n_4}(k^{(2)})>0 \tag{17}$$

故对投影 $P_{i^{(2)}k^{(2)}}(i^{(1)})$ 由(16)$i^{(2)}\rightsquigarrow k^{(2)}$，对投影 $P_{i^{(1)}k^{(1)}}(k^{(2)})$ 由(17)$i^{(1)}\rightsquigarrow k^{(1)}$. 从而由定义 $i\rightsquigarrow k$. 证完

性質6. $i\rightsquigarrow j\Longleftrightarrow$存在正整数組$(n,m)$，使$P_{ij}(n,m)>0$，

(此处$\Longleftrightarrow$表示左右两边的命題等价，)

性质 6 可由定义直接算出，性质 5 本可以由性质 6 证出，但如上面的直接证明也很有趣。

如果 $i\rightsquigarrow j$，$j\rightsquigarrow i$ 則称 i,j 在同一組，如果从 $i\rightsquigarrow j$ 推出 $j\rightsquigarrow i$ 則称 i 是基本状态. 利用性质 5 与性质 6 容易证明，i,j 若在同一組，則有相同的周期偶，而且若 i 是基本的，則 j 亦是基本的，这样的組称为基本組。

設 C 是二元馬氏鏈的一基本組，周期偶为$(d^{(1)},d^{(2)})$，考虑表达式

$$P_{ij}(n,m)=P_{i^{(1)}j^{(1)}}^{n}(i^{(2)})\ P_{i^{(2)}j^{(2)}}^{m}(j^{(1)})\quad i,j\in C$$

容易見出 $i^{(1)},j^{(1)}$ 在投影 $P_{i^{(1)}j^{(1)}}(i^{(2)})$中的周期是$d^{(1)}$，而且是在同一基本組里，$i^{(2)},j^{(2)}$在投影 $P_{i^{(2)}j^{(2)}}(j^{(1)})$中的周期是 $d^{(2)}$ 而且是在同一基本組里，

依照这种推理方法，可得$C=C_1\times C_2$ 其中$C_1\subset \mathrm{I}_1$，$C_2\subset \mathrm{I}_2$，而且 C_1 中的元滿足条件：对任意 $i\in C$，对在点 i 到 I_1 上的投影而言，C_1 是周期为 $d^{(1)}$ 的基本組。C_2具有对偶的性质。

固定$i\in C$，考虑在 i 的投影。对在 i 到 I_1 上的投影而言，C_1又分成了$d^{(1)}$个子組 $C_1^{(\gamma)}(i^{(2)})\ 1\leqslant\gamma\leqslant d^{(1)}$滿足：

若 $j^{(1)}\in C_1^{(\gamma)}(i^{(1)})$則 $P_{i^{(1)}j^{(1)}}^{n}(i^{(2)})>0\Longrightarrow n\equiv\gamma(\mathrm{mod}\,d^{(1)})$

对于 C_2 具有完全对偶的性质。

从而我們把 C 分成了 $d^{(1)}d^{(2)}$ 个子組，記作 $C_{\gamma s}$ $1\leqslant\gamma\leqslant d^{(1)}$ $1\leqslant s\leqslant d^{(2)}$，而且由我們的分析显然可以使得 $C_{\gamma s}$ 具有如上的性质：

如果 $j\in C_{\gamma s}$，則

$$P_{ij}(n,m)>0 \Longrightarrow n\equiv\gamma\,(mod\,d^{(1)})\;m\equiv s\,(mod\,d^{(2)}) \tag{18}$$

对于包含 i 的組記作 $C(i)$，如 i 基本，則由点 i 的投影所分成的滿足关系式(18)的子組記作 $C_{\gamma s}(i)$ $1\leqslant\gamma\leqslant d^{(1)}$ $1\leqslant s\leqslant d^{(2)}$，$(d^{(1)},d^{(2)})$为 i 的周期偶。

容易看出，常返状态是基本状态。

利用上述投影的分析方法，我們实际上証明了如下的定理，这个定理包含了性质4的結論，它全面地考察了 $P_{ij}(n,m)$ 当 $n\to\infty$ $m\to\infty$的极限性质。

定理1. (Ⅰ)如 j 非常返，則

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} P_{ij}(n,m)=0$$

(Ⅱ)如 j 是常返的，周期偶为$(d^{(1)},d^{(2)})$則

a)．如 i 是不同于 j 的基本类，則 $P_{ij}(n,m)=0$

b)．如 $j\in C_{\gamma s}(i)$則

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} P_{ij}(nd^{(1)}+\gamma,\,md^{(2)}+s)=\frac{d^{(1)}d^{(2)}}{m_{jj}}$$

及

$P_{ij}(n,m)=0$，当 $n\not\equiv\gamma(mod\,d^{(1)})$或 $m\not\equiv s(mod\,d^{(2)})$

c)．如 i 非基本，則对 $l\leqslant\gamma\leqslant d^{(1)}$ $l\leqslant s\leqslant d^{(2)}$有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} P_{ij}(nd^{(1)}+\gamma,md^{(2)}+s)=f^*_{ij}(\gamma,s)\frac{d^{(1)}d^{(2)}}{m_{jj}}$$

此处

$$f^*_{ij}(\gamma,s)=\sum_{\substack{n=l\\ n\equiv\gamma\,(mod\,d^{(1)})}}^{\infty}\;\sum_{\substack{m=l\\ m\equiv s\,(mod\,d^{(2)})}}^{\infty} f_{ij}(n,m)$$

推論，对任意 $i,j\in I$ 存在极限

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\frac{1}{nm}\sum_{v=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}P_{ij}(v,s)=\pi_{ij}$$

此处 $\pi_{ij}=\dfrac{f^*_{ij}}{m_{jj}}$，$\pi_i=\pi_{ii}=\dfrac{f^*_{ii}}{m_{ii}}$，当 i 常返，$\pi_i=\dfrac{1}{m_{ii}}$，在 $\pi_i>0$时称 i 是正常返。

§3　对角綫馬氏鏈的某些性質

7. 設 $\left(x_n^{(1)}, x_m^{(2)}\right)$ 为二元馬氏鏈，本节考虑对角綫馬氏鏈 $\left\{x_n^D=(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})\, n\geqslant o\right\}$ 的性质。

显然，$\left(x_n^D n\geqslant 0\right)$ 的 n 步轉移槪率是 $P_{ij}(n,n)\, i, j\in \mathrm{I}$，它的轉移矩陣卽为 $\{P_{ij}(1,1)\, i, j\in \mathrm{I}\}$。

本节要用到的几个符号先作說明。$a|b$ 表示 a 除尽 b；$d_L=[d^{(1)}, d^{(2)}]$ 表示 $d^{(1)}, d^{(2)}$ 的最小公倍数。$d_H=(d^{(1)}, d^{(2)})$ 表示 $d^{(1)}, d^{(2)}$ 的最大公約数。

設 $i\in \mathrm{I}$，对二元馬氏鏈有周期偶 $(d^{(1)}, d^{(2)})$，令 d 为 i 在馬氏鏈 $(x_n^D, n\geqslant o)$ 的周期，則因：

$$P_{ii}(n,n)>0 \Longrightarrow d^{(1)}|n, d^{(2)}|n$$

故亦有

$$P_{ii}(n,n)>0 \Longrightarrow d_L=[d^{(1)}, d^{(2)}]|n$$

从而 $d_L=[d^{(1)}, d^{(2)}]|d$，事实上还有 $d=d_L$，因为由二元馬氏鏈周期偶的定义，容易推出当 n，m 充分大时，恒有

$$P_{ii}(nd^{(1)}, md^{(2)})>0$$

从而对于充分大的 $N=nd^{(1)}=md^{(2)}$

$$P_{ii}(N,N)>0$$

所有这样的 N 的最大公約数显然是 $d_L=[d^{(1)}, d^{(2)}]$，結合已有的 $[d^{(1)}, d^{(2)}]=d_L|d$　得　$d=d_L$　故有

性質 1　如果 $i\in \mathrm{I}$　对二元馬氏鏈 $\{x_n^{(1)}, x_m^{(2)}\}$ 有周期偶 $(d^{(1)}, d^{(2)})$ 則 i 对对角綫馬氏鏈而言有周期 $d=d_L=[d^{(1)}, d^{(2)}]$。

現設 C 为二元馬氏鏈的一基本組，周期偶为 $(d^{(1)}, d^{(2)})$，已知 C 中的元在对角綫馬氏鏈中有周期 $d_L=[d^{(1)}, d^{(2)}]$（性质1!），在二元馬氏鏈中 C 分为 $d^{(1)}d^{(2)}$ 个子組，記为 $C_{\gamma s}(i)$ 滿足关系(18)，設 $j\in C_{\gamma s}(i)$ 則由(18)

$$P_{ij}(n,m)>0 \Longrightarrow n\equiv \gamma(mod\, d^{(1)})\, m\equiv s(mod\, d^{(2)})$$

取

$$n=k^{(1)}d^{(1)}+\gamma \qquad m=k^{(2)}d^{(2)}+s$$

要使 j 在对角綫馬氏鏈中仍与 i 同組，必須而且只須存在充分大的 $k^{(1)}, k^{(2)}$ 使

$$n=k^{(1)}d^{(1)}+\gamma=k^{(2)}d^{(2)}+s=m \qquad P_{ii}(n,n)>0$$

即必須

$$k^{(1)}d^{(1)}-k^{(2)}d^{(2)}=s-\gamma \tag{19}$$

由于 $d^{(1)},d^{(2)}$ 的最小公倍数为 $d_L=[d^{(1)},d^{(2)}]$，故 $d^{(1)},d^{(2)}$ 的最大公約数 d_H 为

$$d_H=\frac{d^{(1)}d^{(2)}}{d_L}$$

由(19)得

$$k^{(1)}\frac{d^{(1)}}{d_H}-k^{(2)}\frac{d^{(2)}}{d_H}=\frac{s-\gamma}{d_H}$$

从而 $s-\gamma$ 必須被 d_H 除尽，依照簡单的数論知識尚可証其逆，当 $j\in C_{\gamma s}(i)$ 如果 $s-\gamma$ 被 d_H 除尽則 i,j 在对角綫馬氏鏈中是处在同一組，于是 C 在对角綫馬氏鏈中被分成了 d_H 个組，显然每个組仍是基本組。

上面的分組法，对非基本組也是对的，只不过它們仍对应非基本組，故得

性質 2 若 C 是二元馬氏鏈中一組，周期偶为 $(d^{(1)},d^{(2)})$，則 C 在对对角綫馬氏鏈中被分成 $d_H=(d^{(1)},d^{(2)})$ 个組，它們的周期都是 $d_L=[d^{(1)},d^{(2)}]$，而且这些組在对角綫馬氏鏈中为基本組，当且仅当 C 在二元馬氏鏈中是基本組。

8. 現設 i 在二元馬氏鏈中是常返的，則它在对角綫馬氏鏈中是否还是常返的？

首先考虑 i 是正常返的情形，此时由定理 3 得：

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}(n,n)=\frac{d^{(1)}d^{(2)}}{m_{ii}} \tag{20}$$

此处 $(d^{(1)},d^{(2)})$ 为 i 的周期偶，$\frac{1}{m_{ii}}=\pi_i>0$

由此看出，i 在对角綫馬氏鏈中仍然是正常返的。

設 $P_{ij}^{(n)}$ 为 $\{x_n^D,n\geqslant 0\}$ 从 i 到 j 的 n 步轉移概率，$f_{ij}^{(n)}$ 为从 i 出发 n 步首次到 j 的概率，当 i 正常返时，由馬氏鏈已有的結論：

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd_L)}=\frac{d_L}{m_{ii}^D} \tag{21}$$

此处 $d_L(d^{(1)},d^{(2)})$ 的最小公倍数，$m_{ii}^D=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$，

上面的式子之所以成立是因为在对角綫馬氏鏈中 i 有周期 d_L。

比較(20)与(21)得到

$$\frac{d_L}{m_{ii}^D}=\frac{d^{(1)}d^{(2)}}{m_{ii}}$$

从而得到 $m_{ii}^D=\frac{m_{ii}}{d_H}$

总結上述結果，得到：

性質 3　如 i 对二元馬氏鏈是正常返，則 i 对对角綫馬氏鏈仍是正常返，而且若 $m_{ii}^D(d)$ 为对角綫馬氏鏈从 i 出发首次返回 i 的时間的数学期望，則 $m_{ii}^D=\frac{m_{ii}}{d_H}$，（此处 d_H，m_{ii} 的意义依照第5.6段）

当 i 在二元馬氏鏈中是非常返的，則：

$$P\left(x_n^{(1)}=i^{(1)},\ x_m^{(2)}=i^{(2)}\text{存在某 } n>0, m>0 \mid x_{\circ\circ}=i\right)<1$$

更有

$$P\left(x_n^D=i\quad \text{存在某 } n>0 \mid x_0^D=i\right)<1$$

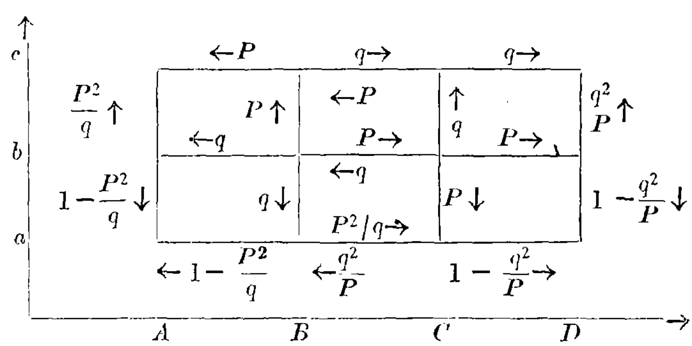
故 i 在对角綫馬氏鏈中仍然是非常返的。

最后，当 i 是零常返时，下面将举例說明 i 在对角綫馬氏鏈中可能是零常常返，也可能是非常返的。

9.例1.定理 3 說明，任意两个馬氏鏈的“乘积”就是一独立的二元馬氏鏈，例如設 $\left\{x_n^{(1)},\ n\geqslant 0\right\}$，$\left\{x_m^{(2)} m\geqslant 0\right\}$ 为直綫上的簡单自由随机游动，則 $\left\{x_n^{(1)}, x_m^{(2)}\right\}$ 形成一独立的二元馬氏鏈，此时对角綫馬氏鏈即平面上的簡单随机游动。由上一段可推得这个随机游动的一些簡单性质：有周期 2，且分成两个基本組。熟知，这个随机游动是零常返的。

把平面上的簡单随机游动再自相“乘”，則得到零常返的二元馬氏鏈，但那时对角綫馬氏鏈則是非常返的了。因为那时 $P_{ii}^{(2n)}\sim\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2$。

因此我們可作結論如下：若 i 在二元馬氏鏈中是非常返或者正常返，則它在对角綫馬氏鏈中亦然。若 i 在二元馬氏鏈中是零常返則它在对角綫馬氏鏈中可能是零常返，也可能是非常返。



例2.設 $0<P<1$ 　$q^2<P$. 　$q>0$. 　$P^2<qP+q=1$
如右图，設$I_1=(a,b,c)I_2=(A,B,C,D)$，每一横行与直行都給定了一轉移矩陣（依箭头的方向。）例如，固定a有

$$P^a_{AA}=1, P^a_{BA}=1-\frac{P^2}{q},\quad P^a_{BC}=\frac{P^2}{q},$$

$$P^a_{CB}=\frac{P^2}{q}, \quad P^a_{CD}=1-\frac{q^2}{P}, \quad P^a_{DD}=1$$

而固定A有

$$P^A_{aa}=1, P^A_{ba}=1-\frac{P^2}{q} \quad P^A_{bc}=\frac{P^2}{q} \quad P^A_{cc}=1$$

余此类似。

容易驗算，这一族轉移矩陣滿足定理2中的相容条件，这个二元馬氏鏈不一定是独立的（只要$P\neq q$）

由于这些例子的繁复性，不拟多举，它只是对我們研究对象提供一个說明。

参 考 文 献

〔1〕 Kai Lai Chung, Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, 1960

Markov Chains with Two Parameters of Time

Di Yung-lung

Abstract

Let (Ω,F,P) be a probability space and let I_1 and I_2 be two denumerable sets.

Suppose $\left\{ x_n^{(1)}, \geqslant 0 \right\}$ ard $\left\{ x_m^{(2)} \quad m\geqslant 0 \right\}$ are two sequences of discrete random variables with state spaces I_1 and I_2 respectively. Then $\left(x_n^{(1)}, x_m^{(2)}\right)$ is called markov chain with two parameters of time, if it has the property that for any

$0 \leqslant t_1 < \cdots\cdots < t_n, 0 \leqslant u_1 < \cdots\cdots < u_m$ and $i^{(1)}, \cdots\cdots, i_n^{(1)} \in I_1$, $i_1^{(2)}, \cdots,$ $i_m^{(2)} \in I_2$ we have

$$P\left(x_{t_n}^{(1)} = i_n^{(1)}, \ x_{u_m}^{(2)} = i_m^{(2)} \Big/ x_{t_v}^{(1)} = i_v^{(1)}, 0 \leqslant v \leqslant n-1, \ x_{u_s}^{(2)} = i_s^{(2)} \ 0 \leqslant s \leqslant m-1 \right) = P\left(x_{t_x}^{(1)} = i_m^{(1)}, \ x_{u_m}^{(2)} = i_m^{(2)} \Big/ x_{t_{n-1}}^{(1)} = i_{n-1}^{(1)}, \ x_{u_{m-1}}^{(2)} = i_{m-1}^{(2)} \right)$$

whenever the left member is defined.

In section 1 of this paper we have studied the structures of markov chains with two parameters of time. In section 2 and section 3 we have obtained some general properties of them.