非綫性微分方程組的解的有界性和稳定性

周 之 銘

（数学力学系）

摘　要

本文討論n維方程組（1.1）。在假設（1.4）与（1.5）之下，得基本定理——若方程（2.7）的最大解可延拓，則方程組（1.1）的解的模不超过它，且也可延拓。由此給出（1.1）的解的有界性和稳定性的判别法，这概括了一系列的有关結果，如文献〔1〕、〔2〕、〔3〕、〔6〕、〔16〕、从而看出这些結果的相互关系。

§1 引 言

本文討論 n 維微分方程組

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x) \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

的解的有界性和稳定性，其中 $A(t)$ 是 $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ 的 $n \times n$ 連續矩陣，$f(t, x)$ 是 $t \geqslant t_0$，$D = \left\{ x \,\middle|\, |x| < H \right\} \subset E^n$ 上的連續向量函数，这里 $|\cdot|$ 代表 n 維空間的任意一种模。

关于(1.1)的解的有界性和稳定性，Bellman[2] Coddington[1] 李否生[6] 等人应用积分不等式获得了很多結果，但对 $f(t, x)$ 都附加了不少特殊的限制；Lakshmikanth[9] Brauer[12] 等人应用微分不等式也得到了若干結果，可惜一般只能在 $A(t) \equiv 0$ 的情况下得到；Brauer[13] 应用 V 函数和微分不等式相結合的办法，克服了单純应用微分不等式所存在的局限性，使得討論的方程范圍有所扩大，但由于 V 函数的引進

本文于1965年8月4日收到。

* 本文得到胡金昌教授經常的热情的鼓励和指导，并承审閱原稿。作者在此表示衷心的感謝。

又出现了新的局限。本文所用方法避免了应用Г函数及微分不等式的某些局限性，并且将积分不等式方法加以統一和推广，使討論方程范围扩大。

本文在§2中首先証明一个引理(基本不等式)，然后利用之証明基本定理，它是本文的主要工具。跟着应用基本定理在§3，§4中給出解的有界性和稳定性的相当广泛的判別法，它概括了一系列的有关結果[1][2][3][6]，从而看出这些結果之間的内部联系。本文也获得了Stokes[6]应用局部凸拓扑綫性空間的Tychonoff不动点原理得到的类似結果，細心的讀者不难看出两文結果的差別。

方程(1.1)的解可以写成

$$x(t)=Y(t_0,t)x_0+\int_{t_0}^{t}Y(t_0,t)[Y(t_0,\tau)]^{-1}f(\tau,x(\tau))d\tau \tag{1.2}$$

其中$Y(t_0,t)$是(1.1)所对应的綫性微分方程組

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y \tag{1.3}$$

的标准基解矩陣。

我們假設

$$|Y(t_0,t)[Y(t_0,\tau)]^{-1}|\leqslant Ke^{\int_\tau^t\lambda(t)dt}\qquad t\geqslant\tau\geqslant t_0 \tag{1.4}$$

这里$K\geqslant1$是常数，$\lambda(t)$是$t\geqslant t_0$的連續函数。

关于条件(1.4)，我們可以引进如下附注：

附注1.[7]　若向量x的模分別取成

$$|x|_1=\max_i|x_i|,\quad |x|_2=\sum_i|x_i|\quad |x|_3=(\sum_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

則方程(1.2)的标准基解矩陣$Y(t_0,t)$满足

$$|Y(t_0,t)[Y(t_0,\tau)]^{-1}|_i\leqslant e^{\int_\tau^t\lambda_i(t)dt}\qquad(i=1,2,3,)\quad t\geqslant\tau\geqslant t_0$$

其中
$$\lambda_1(t)=\max_i\left\{Re a_{ii}(t)+\sum_{j\neq i}|a_{ij}(t)|\right\}$$

$$\lambda_2(t)=\max_j\left\{Re a_{jj}(t)+\sum_{i\neq j}|a_{ij}(t)|\right\}$$

$\lambda_3(t)=\frac{1}{2}(A(t)+A^T(t))$的最大特征数，$A^T(t)$是$A(t)$的轉置矩陣。

附注2.　若$A(t)\equiv A$——常矩陣，則(1.4)中的$\lambda(t)$可以取为常数，特别当A的特征根的实部全为負时，$\lambda(t)$可以取为某一負常数λ；当(1.2)的解有界时，$\lambda(t)$可

以取为0。

附注3. (1.4)中，$\lambda(t)=0$的充分条件，[3]中有一系列的討論，例如(1.2)的解有界叉 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t} trA(t)dt>-\infty$

我們假設$f(t,x)$滿足条件

$$|f(t,x)|\leqslant G(t,|x|) \qquad t\geqslant t_0 \qquad x\in D\subset R^n \tag{1.5}$$

其中$G(t,\gamma)$在$t\geqslant t_0$，$0\leqslant\gamma<H$上連續，且对固定的t是γ单調不降函数。

当$x_0\in D$时，由(1.2)，(1.4)和(1.5)，在$x(t)$存在的区間上有不等式

$$|x(t)|\leqslant K|x_0|e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt}+K\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\lambda(\xi)d\xi}G\left(\tau,|x(\tau)|\right)d\tau \tag{1.6}$$

§2 基本定理的建立

我們首先証明如下

引理(基本不等式)

設 $$\gamma(t)\leqslant\gamma_0 e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt}+\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\lambda(\xi)d\xi}G(\tau,\gamma(\tau))d\tau \tag{2.1}$$

其中$\gamma(t)$，$\lambda(t)$是$[t_0,t_0+a]$上的連續函数，$G(t,\gamma)$連續于閉域

$$\Omega=\left\{t_0\leqslant t\leqslant t_0+a,\quad \left|\gamma-\gamma_0 e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt}\right|\leqslant b\right\}$$

$a,b>0$是常数。当$t\in[t_0,t_0+a]$时，$(t,\gamma(t))\in\Omega$，G对固定的t是γ的单調不降函数，則在$t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$上

$$\gamma(t)\leqslant y(t)$$

这里$y(t)$是方程

$$\frac{dy}{dt}=\lambda(t)y+G(t,y) \tag{2.2}$$

經过点(t_0,γ_0)的最大解，$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$，

$$M=\max_{t\in[t_0,t_0+a]}e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt}\cdot\max_{(\tau,\gamma)\in\Omega}e^{\int_{\tau}^{t_0}\lambda(\xi)d\xi}|G(\tau,\gamma(\tau))|$$

証明. 令

$$y_0(t)=\gamma(t) \tag{2.3}$$

$$y_n(t)=\gamma_0 e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt}+\int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t}\lambda(\xi)d\xi} G(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau \qquad n=1,2\cdots$$

用数学归納法容易证明：对一切 n，$y_n(t)$ 在 $[t_0, t_0+h]$ 上存在、連續且

$$\left|y_n(t)-\gamma_0 e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt}\right|\leqslant b$$

由于 G 的单調性及(2.1)，应用归納法得

$$\gamma(t)=y_0(t)\leqslant y_1(t)\leqslant y_2(t)\leqslant\cdots \tag{2.4}$$

注意到：

$$y'_n(t)=\lambda(t)e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt}\left[\gamma_0+\int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t_0}\lambda(\xi)d\xi} G(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau\right]+G(t, y_{n-1}(t))$$

因为在 $[t_0, t_0+h]$ 上

$$|y_n'(t)|\leqslant C \qquad \text{其中}C\text{是某一常数}$$

这样在 $[t_0, t_0+h]$ 上

$$|y_n(t)-y_n(\tilde{t})|=|y_n'(\bar{t})|\,|t-\tilde{t}|\leqslant C|t-\tilde{t}| \tag{2.5}$$

其中 $\bar{t}$ 介于 t 与 $\tilde{t}$ 之間；

$$|y_n(t)|\leqslant\gamma_0 e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt}+b \tag{2.6}$$

由(2.5),(2.6)推知 $\{y_n(t)\}$ 在 $[t_0, t_0+h]$ 上等度連續，一致有界。根据Arzela定理及(2.4)就知

$$y_n(t)\rightarrow\rightarrow y^*(t)\in c \qquad \text{当}t\in[t_0, t_0+h]$$

对(2.3)两边取极限，就有

$$y^*(t)=\gamma_0 e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt}+\int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t}\lambda(\xi)d\xi} G(\tau, y^*(\tau))d\tau$$

即 $y^*(t)$ 是(2.2)的过点 (t_0, γ_0) 的解，由此及(2.4)，再注意到 $y(t)$ 是(2.2)的过点 (t_0, γ_0) 的最大解，就有

$$\gamma(t)\leqslant y(t) \qquad t\in[t_0, t_0+h]$$

引理得证。

附注1. 引理也可以利用微分不等式[4]证明，不过我們还是利用逐次逼近法

直接給出证明。

附注2. 令$\lambda(t)=0$，就得Viswanatham[11]的結果。适当选取$G(t,\gamma)$可以得到Bellman[1] Bihari[8] Langenhop[10]及李岳生[5]等一系列的积分不等式。因而引理可以看作是花样繁多的各种积分不等式的統一形式，从而使我們看出了它們之間的內部联系。

附注3. 关于$G(t,\gamma)$的連續性假設可以放寬，只要G对固定的t是γ的連續函数，对固定的γ是t的可測函数，且$|G(t,\gamma)|\leqslant m(t)$其中$m(t)$Lebesque可积。自然，这时对(2.2)的解应理解为在Caratheódory意义下的广义解[1]。

附注4. 应用同样的方法，引理中的不等号可以改变方向，不过这时最大解要改为最小解。

现在我們建立

基本定理.

假設 1) 方程(1.1)滿足条件(1.4)及(1.5)

2) 方程

$$\frac{dy}{dt}=\lambda(t)y+KG(t,y) \tag{2.7}$$

的經过点$(t_0, K|x_0|)$的最大解$y(t)$可以延拓到$t_0\leqslant t<t_0+\alpha$，其中 $K|x_0|<H$，$\alpha>0$是某常数或$+\infty$。

則 方程(1.1)的經过点(t_0,x_0)的解$x(t)$可以延拓到$t_0\leqslant t<t_0+\alpha$，且

$$|x(t)|\leqslant y(t) \qquad t_0\leqslant t<t_0+\alpha$$

証明. 1)首先证明：如果$x(t)$，$y(t)$都可以延拓到$t_0\leqslant t\leqslant t_0+\beta$，$(\beta<\alpha)$，則在$[t_0,t_0+\beta]$上，有$|x(t)|\leqslant y(t)$。事实上，由于$x_0\in D$在$t_0$的某一右邻域上(1.6)成立，根据引理，必然存在$h>0$，使得在$[t_0,t_0+h]$上有$|x(t)|\leqslant y(t)$。我們断言$h=\beta$。否則，如果$h<\beta$，必有某一常数$\delta>0$存在，使得

$$\begin{aligned}&|x(t)|\leqslant y(t) && t_0\leqslant t\leqslant t_0+h\\ &|x(t)|>y(t) && t_0+h<t<t_0+h+\delta\end{aligned} \tag{2.8}$$

此时，在$[t_0+h, t_0+\beta)$上仍有

$$\begin{aligned}|x(t)|&\leqslant K|x_0|e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt}+K\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\lambda(\xi)d\xi}G(\tau,|x(\tau)|)d\tau\\
&=Ke^{\int_{t_0+h}^{t}\lambda(t)dt}\Big\{|x_0|e^{\int_{t_0}^{t_0+h}\lambda(t)dt}+\int_{t_0}^{t_0+h}e^{\int_{\tau}^{t_0+h}\lambda(\xi)d\xi}\\
&\quad G(\tau,|x(\tau)|)d\tau\Big\}+K\int_{t_0+h}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\lambda(\xi)d(\xi)}G(\tau,|x(\tau)|)d\tau\end{aligned}$$

但

$$y(t_0+h)=K|x_0|e^{\int_{t_0}^{t_0+h}\lambda(t)dt}+K\int_{t_0}^{t_0+h}e^{\int_{\tau}^{t_0+h}\lambda(\xi)d\xi}G\Big(\tau,y(\tau)\Big)\,d\tau\geqslant$$

$$\geqslant K|x_0|e^{\int_{t_0}^{t_0+h}\lambda(t)dt}+K\int_{t_0}^{t_0+h}e^{\int_{\tau}^{t_0+h}\lambda(\xi)d\xi}G\Big(\tau,|x(\tau)|\Big)d\tau$$

因而，

$$|x(t)|\leqslant y(t_0+h)e^{\int_{t_0+h}^{t}\lambda(t)dt}+K\int_{t_0+h}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\lambda(\xi)d\xi}G\Big(\tau,|x(\tau)|\Big)d\tau$$

应用引理，存在 $h_1>0$，使得

$$|x(t)|\leqslant y^*(t)\qquad\qquad t\in[t_0+h,\ t_0+h+h_1]$$

其中 $y^*(t)$是(2.7)的过点$(t_0+h,\ y(t_0+h))$的最大解。由最大解的唯一性，$y(t)\equiv y^*(t)$，所以

$$|x(t)|\leqslant y(t)\qquad\qquad t_0+h\leqslant t\leqslant t_0+h+h_1$$

这就与(2.8)矛盾。

2） 現設 $x(t)$只能延拓到 $t_0\leqslant t<t_0+\alpha^*<t_0+\alpha$，由刚才証明的1)，得

$$|x(t)|\leqslant y(t)\qquad\qquad t_0\leqslant t<t_0+\alpha^*$$

因为 $y(t)$可以延拓到 $t_0\leqslant t<t_0+\alpha^*$之外，因而，$|x(t)|\leqslant\max\limits_{[t_0,t_0+\alpha^*]}y(t)<H$。由此 $x(t)$也可以延拓到 $t_0\leqslant t<t_0+\alpha^*$ 之外，这就得到矛盾。这样，就証明了 $x(t)$也可以延拓到 $t_0\leqslant t<t_0+\alpha$。再由1)即得

$$|x(t)|\leqslant y(t)\qquad\qquad t_0\leqslant t<t_0+\alpha$$

基本定理証毕。

附注1． 如果 $\lambda(t)\leqslant\mu(t)$，　$t\geqslant t_0$，則方程(2.7)可以代以方程

$$\frac{dy}{dt}=\mu(t)y+KG(t,y)\qquad\qquad (2.7)'$$

事实上，这时(1.4)可以代以

$$\left|Y(t_0,t)\big[Y(t_0\tau)\big]^{-1}\right|\leqslant Ke^{\int_{\tau}^{t}\mu(t)dt}\qquad\qquad t\geqslant\tau\geqslant t_0$$

附注2. 关于 $G(t,\gamma)$ 的連續假設参看引理的附注3，更且，我們还可以将 $G(t,\gamma)$ 对 γ 的連續性代以 $G(t,\gamma)$ 对 γ 的片段連續性，这点附注对以后是有用的。

附注3. 适当选取 $\lambda(t)$ 及 $G(t,\gamma)$ 可以得到解的界的各种估計定理。例如取 $G(t,\gamma)=P(t)\gamma+Q(t)\gamma^{\alpha}$，其中 $P(t)$，$Q(t)$ 是 $t\geqslant t_0$ 的片段連續函数，$\alpha>0$ 是常数，即得[6]中的定理1（界的估計定理）。

基本定理是研究方程（1.1）的解的延拓性、有界性和稳定性的有力工具。关于延拓性，我們容易利用之推得 Wintner[14][15] 的結果，为了节省篇幅，玆不贅述。本文后面将只利用之討論有界性和稳定性。

§3 解的有界性

我們建立（1.1）的解的有界性的判别法，在本节中恒假設方程（1.1）滿足条件（1.4）和（1.5）且 $D=R^n$。

除了考察一般的有界性概念，我們引进（1.1）的解最終有界（ultimate bounbedness）的概念[16]：如果（1.1）的所有解有界，且当 $t\to+\infty$ 时，所有解都进入某一与初值无关的有界域，則称（1.1）的解最終有界。

定理1. 如果方程（2.7）在域 $t\geqslant t_0$，$\gamma\geqslant\gamma_0$（其中 γ_0 为某一非負常数）的所有解有界、最終有界，則方程（1.1）的所有解有界、最終有界。

証明. 注意一阶方程（2.7）的最大解有如下性质：

$$y_1(t)\leqslant y_2(t)$$

其中 $y_i(t)$ $(i=1,2)$ 是經过点 (t_0,γ_i) 的最大解，$\gamma_1\leqslant\gamma_2$。再根据基本定理，即得定理1。

附注. 适当选取 $\lambda(t)$，$G(t,\gamma)$ 可以得到具体的有界性的判别法，例如：

推論1. 設 1) $\lambda(t)=0$， $t\geq t_0$

2) $|f(t,x)|\leqslant M(t)L(|x|)$ $t\geqslant t_0$， $x\in R^n$

其中 M，L 是片段連續函数，L 单調不降。

3) $$\int_{\gamma_0}^{\infty}\frac{ds}{L(s)}=\infty \quad \text{对某 } \gamma_0>0 \text{ 且 } \int_{t_0}^{\infty}M(s)ds<\infty$$

則（1.1）的所有解有界。

証明. 根据定理1，只需証明方程

$$\frac{d\gamma}{dt}=KM(t)L(\gamma)$$

的經过点 $(t_0,\overline{\gamma}_0)$ $\overline{\gamma}_0\geqslant\gamma_0$ 的解有界。事实上，由

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{ds}{L(s)} = K \int_{t_0}^{t} M(s)ds$$

及条件 3 ）知道这是对的。推論得証。

附注． 当 $L(\gamma)=\gamma$ 时，就得 Bellman[2] 的結果，这說明 L 的綫性条件是不必要的。如果条件 1 ）改为 1′） $\lambda(t)\leqslant 0$，$t\geqslant t_0$，結論仍然成立。

推論2． 設 1 ） $\lambda(t)=-\lambda$，　$\lambda\geqslant 0$ 是常数

2 ） 任給 $\varepsilon>0$，　存在 $R(\varepsilon)>0$，使得

$$|f(t,x)|\leqslant\begin{cases} N & \text{当 } |x|\leqslant R, \quad t\geqslant t_0 \\ \varepsilon|x| & \text{当 } |x|>R, \quad t\geqslant t_0 \end{cases}$$

其中 N 为常数。

則(1.1)的解最終有界。

証明． 选取 $\varepsilon<\frac{\lambda}{k}$，又由条件2)总可以取 $R(\varepsilon)>\frac{NK}{\lambda}$

令

$$G(t,y)=\begin{cases} N & \text{当 } y\leqslant R, \quad t\geqslant t_0 \\ \varepsilon y & \text{当 } y>R, \quad t\geqslant t_0 \end{cases}$$

根据定理1，只需证明(2.7)的过点 (t_0,γ_0)　$\gamma_0>R$ 的解最終有界。

方程(2,7)的过点 $(t_0,\gamma_0)\gamma_0>R$ 的解为

$$y(t)=\begin{cases} \gamma_0 e^{(-\lambda+K\varepsilon)(t-t_0)} & \text{当 } t_0\leqslant t<t_1 \\ \left(R-\frac{NK}{\lambda}\right)e^{-\lambda(t-t_1)}+\frac{NK}{\lambda} & \text{当 } t\geqslant t_1 \end{cases}$$

其中 t_1 由方程　$R=\gamma_0 e^{(-\gamma+K\varepsilon)(t_1-t_0)}$ 决定。

显然，当 $t\to+\infty$ 时，所有这些解都趋于 $\frac{NK}{\lambda}$，因而(2.7)的解最終有界，推論得証。

附注． 条件1) 改为1′) $\lambda(t)\leqslant-\lambda$，$\lambda>0$，結論仍然成立。如果 $f(t,x)=0(|x|)$，$|x|\to\infty$ 时，对 t 一致成立，推論的条件2)可以得到滿足。

讀者不难看出，关于有界性的其他的更細致的概念[17]，同样可以利用基本定理得到相应的結果。

§4　解的稳定性

在本节中，假設(1.1)存在零解，即假設 $f(t,0)\equiv 0$，$t\geqslant t_0$。我們研究(1.1)的零解的稳定性。由于所研究問題的局部性质，我們假設 $D=\{x \mid |x|<H\}$

是原点的某一邻域，H 是給定的正常数。我們假設(1.1)滿足(1.4)和(1.5)且 $G(t,0)=0$，$t\geqslant t_0$。

定理2. 如果方程(2.7)的零解(对 $\gamma_0>0$)稳定、渐近稳定，則方程(1.1)的零解也稳定、渐近稳定。

証明. 由定理条件，任給$\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得只要 $0<\gamma_0\leqslant\delta$ 則方程(2.7)的經过点$(t_0,\ \gamma_0)$的解 $y(t)$ 滿足

$$y(t)<\varepsilon \qquad t\geqslant t_0 \tag{4.1}$$

应用基本定理，取 $\delta'=\dfrac{\delta}{K}$，則只要 $|x_0|\leqslant\delta'$，(1.1)的經过点(t_0,x_0)的解 $x(t)$ 滿足

$$|x(t)|\leqslant y^*(t) \qquad t\geqslant t_0$$

其中 $y^*(t)$是(2.7)經过点$(t_0,K|x_0|)$的最大解，由此及(4.1)

$$|x(t)|<\varepsilon \qquad t\geqslant t_0$$

因而(1.1)的零解稳定。应用基本定理，同样可以証明渐近稳定性。

附注. 适当选取 $\lambda(t)$，$G(t,\gamma)$就可以得到[1][2][3][6]的一系列关于稳定性的結果。例如取 $G(t,\gamma)=P(t)\gamma+Q(t)\gamma^{1+a}$，就得[6]中的結果。

推論1[6]. 設1) $|f(t,x)|\leqslant P(t)|x|+Q(t)|x|^{1+a}$，$t\geqslant t_0$，$|x|<\eta\leqslant H$ 其中 $P(t)$，$Q(t)$是 $t\geqslant t_0$ 的片段連續函数，$a>0$，$\eta>0$ 为常数

$$2)\int_{t_0}^{\infty}[\lambda(t)+KP(t)]dt<+\infty$$

$$3)\int_{t_0}^{\infty}Q(\tau)e^{a\int_{t_0}^{\tau}[\lambda(\xi)+KP(\xi)]d\xi}d\tau<+\infty$$

則(1.1)的零解稳定。

如将2)改为

$$2')\int_{t_0}^{\infty}[\lambda(t)+KP(t)]dt=-\infty$$

則(1.1)的零解渐近稳定。

証明. 根据定理2，只要証明方程

$$\frac{dy}{dt}=[\lambda(t)+KP(t)]y+KQ(t)y^{1+a} \tag{4.2}$$

的零解对 $\gamma_0>0$ 在推論的条件下分别为稳定、渐近稳定。

但(4.2)是 Bernoulli 方程。解之得

$$y(t)=\gamma_0 e^{\int_{t_0}^{t}[\lambda(t)+KP(t)]dt}\left\{1-\alpha\gamma_0^{\alpha}K\int_{t_0}^{t}Q(\tau)e^{\alpha\int_{t_0}^{\tau}[\lambda(\xi)+KP(\xi)]d\xi}d\tau\right\}^{-\frac{1}{\alpha}}$$

由此可見，只要取 $\gamma_0>0$ 足够小，卽知在推論的条件下，(4.2)的零解分别为稳定、渐近稳定。

附注. 再选定 $\lambda(t)$，$P(t)$，$Q(t)$ 就可以得到很多熟知的結果，我們不一一列出，只举[1]中的一条定理(p.318)为例：

設　1）$A(t)\equiv A$ 的特征根的实部全为負，

2）任給 $\varepsilon>0$，存在 $T\geqslant t_0$ 使得

$$|f(t,x)|\leqslant\begin{cases}k|x|+t^b|x|^{1+a} & t\leqslant T,\ |x|<\eta\\ \varepsilon|x|+t^b|x|^{1+a} & t>T,\ |x|<\eta\end{cases}$$

其中 k,a,b,η 为正常数，

則(1.1)的零解渐近稳定。

証明. 取 $\lambda(t)=-\lambda$，$\lambda>0$ 又 $\varepsilon>\frac{\lambda}{K}$

$$P(t)=\begin{cases}k & t\leqslant T\\ \varepsilon & t>T\end{cases}\qquad Q(t)=t^b$$

一眼看出，推論1的条件完全满足，故(1.1)的零解渐近稳定。

推論2. 設　1）$\lambda(t)=0$，　$t\geqslant t_0$

2）$|f(t,x)|\leqslant M(t)L(|x|)$　　$t\geqslant t_0$，$|x|<\eta\leqslant H$

其中 η 为常数，M，L 是片段連續函数，L 对 $\gamma>0$ 单調不降。

3）$L(0)=0$，　$\lim\limits_{\gamma_0\to 0^+}\int_{\gamma_0}^{\gamma}\frac{ds}{L(s)}=\infty$　对 $\gamma>0$，$\int_{t_0}^{\infty}M(s)ds<\infty$

則(1.1)的零解稳定。

証明. 应用定理2，只要证明方程

$$\frac{d\gamma}{dt}=KM(t)L(\gamma)\tag{4.3}$$

的零解对 $\gamma_0>0$ 稳定。

任給 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$\int_{\delta}^{\varepsilon}\frac{ds}{L(s)}>K\int_{t_0}^{\infty}M(s)ds$$

选取 $0<\gamma_0\leqslant\delta$，由

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma}\frac{ds}{L(s)}=K\int_{t_0}^{t}M(s)ds$$

得知(4.3)的經过点$(t_0,\ \gamma_0)$的解$\gamma(t)$滿足

$$\gamma(t)<\varepsilon \qquad t\geqslant t_0$$

因而(4.3)的零解对$\gamma_0>0$稳定。

附注. 令$L(\gamma)=\gamma$，又得〔2〕中的結果，說明L的綫性条件是不必要的。条件1)改为1′) $\lambda(t)\leqslant 0,\ t\geqslant t_0$。結論仍然成立。

讀者不难看出，关于稳定性的更細致的概念〔17〕，同样可以利用基本定理获得相应的結果。

最后指出，如果注意到§1中的附注，应用本文的各个定理可以判别相当广泛类型的微分方程的解的有界性和稳定性。

参 考 文 献

〔1〕 E. A Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. 1955.

〔2〕 R. Bellman, 微分方程的解的稳定性理論 科学出版社 1957.

〔3〕 L. Cesari, Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. 1959.

〔4〕 G. Sansone, Обыкновенные Дифференциальных Уравнения. Москва 1954.

〔5〕 李岳生 基本不等式与微分方程解的唯一性(Ⅰ) 吉林大学自然科学学报 1 (1960) 7—34.

〔6〕 李岳生 非綫性微分方程的解的界，稳定性和誤差估計《数学学报》12 (1962) 32—39.

〔7〕 С.М.Лозинский, Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенные дифференциальнные уравнения, Изв. Высших Завебений. Математика 5 (1958) 52—90.

〔8〕 I.Bilari, A Generalization of a Lemma of Bellman and its Application to Uniqueness Problems of Differential Equations. Acta Math.

Acad. Sci Hungar. 7 (1956) 81--94.

〔9〕 V. Lakshmikanth, On the Boundedness of Solutions of Nonlinear Differential Equations. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 1044—1048.

〔10〕 C. E. Langenhop, Bounds on the Norm of a Solution of a General Differential Equation. Ibid. 11 (1960) 795—799.

〔11〕 B. Viswanatham, A Generalization of Bellman's Lemma. Ibid. 14 (1963) 15—18.

〔12〕 F. Brauer, Bounds for Solutions of Ordinary Differential Equations. Ibid. 14 (1963) 36—43.

〔13〕 F. Brauer, Global Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations. J. Math. Anal. App. 2 (1961) 145—159.

〔14〕 A. Wintner, The Nonlocal Existence Problems of Ordinary Differential Equations. Amer. J. Math. 67 (1945) 277—284.

〔15〕 A. Wintnes, Ordinary Differential Equations and Laplace Transforms (appendix). Ibid. 79 (1957) 265—294.

〔16〕 A. Stokes, The Applications of a Fixed Point Theorem to a Variety of Nonlinear Stability Problems. Contrib. Theory Nonlinear Oscillations 5 (1960) 173—184.

〔17〕 H. A. Antosiewicz, A Survey of Lyapunov's Second Method. Ibid. 4 (1958) 141—166.

Boundedness and Stability of Solutions of Nonlinear Systems of Differential Equations

Chow Chi-ming

Abstract

In the present paper, we study the boundedness and stability of solutions of the following n-dimensional system of differential equations:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x) \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

where $A(t)$ is a continuous $n\times n$ matrix for $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ and $f(t,x)$ is a con-

tinuous vector function for $t\geqslant t_0$, $x\in D=\{x\,|\,|x|<H\}\subset R^n$.

Let

$$|Y(t_0,t)[Y(t_0,\tau)]^{-1}|\leqslant Ke^{\int_\tau^t \lambda(t)dt} \qquad t\geqslant\tau\geqslant t_0 \tag{1.4}$$

where $Y(t_0,t)$ is a standard fundamental matrix of the linear system

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y \tag{1.3}$$

$K\geqslant 1$ is a constant and $\lambda(t)$ is continuons for $t\geqslant t_0$

$$|f(t,x)|\leqslant G(t,|x|) \qquad t\geqslant t_0, \quad x\in D \tag{1.5}$$

where $G(t,\gamma)$ is continuous for $t\geqslant t_0$, $0\leqslant\gamma<H$ and nondecreasing in γ for fixed t.

In §2, we prove a fundamental inequality with which we obtain the following fundamental theorem.

FUNDAMENTAL THEOREM. Assume 1) (1.1) satisfies the conditions (1.4) and (1.5); 2) the maximum solution $y(t)$ of the equation

$$\frac{dy}{dt}=\lambda(t)y+KG(t,y) \tag{2.7}$$

passing through $(t_0,K|x_0|)$ can be continued to the interval $[t_0,t_0+\alpha)$, where $K|x_0|<H$ and $\alpha>0$ is a certain constant or $+\infty$. Then the solution of (1.1) passing through (t_0,x_0) can be continued to the interval $[t_0,t_0+\alpha)$ and

$$|x(t)|\leqslant y(t) \qquad \text{for} \qquad t\in[t_0,t_0+\alpha)$$

In §3, §4, we use the fundamental theorem to obtain some rather general criteria for boundedness and stability of solutions of (1.1) which include a series of results concerned [1] [2] [3] [6], and in this manner one may see the internal relation between these results. In this paper we also come to a similar result obtained by Stokes [16] which relies on a fixed point theorem for locally convex topological linear space due to Tychonoff.