变刚度样条函数

数力系　李岳生

摘　要

本文研究作为变刚度撓度方程 $(p(x)y)'' = \sum_i \sum_j \beta_{ij} \delta^{(j)}(x-x_i)$ 在集中荷載和集中弯矩作用下的解的样条函数，特别容許 $p(x)$ 分段連續的情形。通过格林函数构造了样条函数空間的基底，分析了插值样条的基本性质，推广了三弯矩插值法，并估計了一类插值的誤差界。

引　言

现在常用的三次样条函数，是在梁的抗弯刚度EJ为常数的条件下导出的，但实际上常遇到$EJ=p(x)$是变化的情况，特别是$p(x)$分段为常数及分段为线性这两种情况。本文研究了这类样条函数，包括构造这类样条函数空间的基底，分析它们作为插值样条函数的基本性质，并估计插值余项的界。

本文研究的样条函数，也是一类算子样条，但我们容许相应微分算子的系数为间断函数，从而引起样条函数的光滑性和结点联接方式也不同，这是区别于〔1－3〕中所研究的光滑系数算子样条的主要之点。

1. 样条函数空間的基底

对区间$[a,b]$的任一给定分画

$$\pi: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \tag{1.1}$$

及给定函数 $p(x)$，我们总假定：除了$\{x_i\}_{i=1}^{N-1}$可能是$p(x)$的第一类不连续点外，它是$[a,b]$上的分片连续函数，又假定存在正数p_0，使

$$p(x) \geqslant p_0 \quad 于\ x \in [a,b] \tag{1.2}$$

积分 $\int \frac{dx}{p(x)}$ 存在．

本文于1978年3月6日收到

还假定给了一组正数$\{r_i\}_{i=1}^{N-1}$，

其中

$$r_i=1 \text{ 或 } r_i=2 \tag{1.3}$$

现在定义变刚度样条函数如下，我们称满足下列条件的函数$S(x)$为变刚度样条函数：

(1) $(p(x)S''(x))''\equiv 0$ 当 $x\in[a,b]-\{x_1\cdots,x_{N-1}\}$；

(2) 于x_i处，如果$r_i=1$，则$p(x)S''(x)$连续，即

$p(x)S''(x)\Big|_{x=x_i+}=p(x)S''(x)\Big|_{x=x_i-}$，如果$r_i=2$，则$S'(x)$连续，但

$p(x)S''(x)\Big|_{x=x_i+}-p(x)S''(x)\Big|_{x=x_i-}\neq 0$，$r_i$称为"光滑亏损度"，

这类样条函数的全体作成的集合，我们记为$Sp(L,\pi,r)$，其中r表示$(r_1,\cdots r_{N-1})$，L表示微分算子：

$$LS=(pS'')''=\frac{d^2}{dx^2}\left(p(x)\frac{d^2S(x)}{dx^2}\right) \tag{1.4}$$

由定义易见，如果$p(x)\in C[a,b]$且$r_i=1$ $(i=1,2,\cdots N-1)$则$S(x)\in C^2[a,b]$，特别，当$p(x)$为常数时，它们变成通常的三次样条函数，

上述样条函数的力学意义是：它们是变刚度梁在集中荷载和集中弯矩作用下的挠度曲线，

熟知，梁的挠度曲线微分方程是

$$(p(x)S''(x))''=q(x) \tag{1.5}$$

其中$q(x)$表示外荷载强度，即单位长度梁上的外荷载。如果我们采用$\delta irac$-δ的函数，则作用在梁内结点$\{x_i\}_{i=1}^{N-1}$上的集中荷载和集中弯矩可以表示为

$$q(x)=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}\delta^{(j)}(x-x_i) \tag{1.6}$$

其中β_{i0}表示x_i处集中荷载的强度，β_{i1}(当$r_i=2$时)表示x_i处集中弯矩的强度。

将(1.5),(1.6)合起来，我们得到所定义的样条函数$S(x)$所满足的微分方程式

$$(p(x)S'')''=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}\delta^{(j)}(x-x_i) \tag{1.7}$$

如果承认(1.7)作为我们的出发点(下面的结果是严格证明的，δ函数不过提示一种方便的看法和算法)，将(1.7)积分两次得

$$p(x)S''(x)=\alpha_3+\alpha_4x+\sum_i\beta_{i0}(x-x_i)_++\sum_i\beta_{i1}(x-x_i)_+^0 \tag{1.8}$$

满足(1.8)的$S(x)$显然有性质(1)，(2)，也就是我们所说的变刚度样条。

将(1.8)两端除以$p(x)$，再积分两次，则得

$$S(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_3\iint\frac{dx}{p(x)}+\alpha_4\iint\frac{x}{p(x)}dx$$

$$+\sum_i\beta_{i0}\iiint\frac{(x-x_i)_+}{p(x)}dx+\sum_i\iiint\frac{(x-x_i)_+^0}{p(x)}dx \qquad (1.9)$$

记 $n=4+\sum_{i=1}^{\nu-1}r_i$，则(1.9)中的任意常数有$n$个，下面将证明：$Sp(L,\pi,r)$作成$n$维函数空间，并通过构造相应微分算子的格林函数而得到它的基底。

对参数$t(a<t<b)$，我们来求下列微分方程式

$$\Big(p(x)y''(x)\Big)''=\delta(x-t) \qquad (1.10)$$

的解，将它记为$G(x,t)$，并称为算子L的格林函数，它满足什么边界条件，暂不加限制。

记

$$\phi_0(x)=\frac{1}{p(x)},\quad \phi_\nu(x)=\int_a^x\phi_{\nu-1}(x)dx\ (\nu=1,2,3)$$

将(1.10)对x积分，不计积分常数，可求得其一格林函数为

$$G(x,t)=\Big\{(x-t)\Big(\phi_2(x)+\phi_2(t)\Big)-2\Big(\phi_3(x)-\phi_3(t)\Big)\Big\}(x-t)_+^0 \qquad (1.11)$$

格林函数$G(x,t)$(1.11)的特征性质如下：

(1) 如果$p(x)$在$[a,b]$上分段连续，则$G(x,t)$在$[a,b]\times[a,b]$上关于x和t分别一次连续可微，在$[x_i,x_{i+1}]\times[x_j,x_{j+1}]$上，则二阶偏导数连续，如果$p(x)\epsilon C[a,b]$，则$G(x,t)$在$[a,b]\times[a,b]$上关于$x$和$t$分别二次连续可微，在$[x_i,x_{i+1}]\times[x_j,x_{j+1}]$上则三阶偏导数连续；

(2) 对任意固定$t(a<t<b)$，在$[a,t)$和$(t,b]$上，$G(x,t)$作为x的函数，是齐方程的解，即

$$LG(x,t)=0$$

对任意固定$x(a<x<b)$，在$[a,x)$和$(x,b]$上$G(x,t)$作为t的函数也满足相应齐方程；

(3) 有下列间断性

$$\frac{d}{dx}\Big(p(x)G^{(2,0)}(x,t)\Big)\Big|_{x=t_+}-\frac{d}{dx}\Big(p(x)G^{(2,0)}(x,t)\Big)\Big|_{x=t_-}=1 \qquad (1.12)$$

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)G^{(0,2)}(x,t)\right|_{t=x_-}-\frac{d}{dt}\left(p(t)G^{(0,2)}(x,t)\right)\Big|_{t=x_+}=1$$

其中$G^{(\alpha,\beta)}(x,t)$表示对x的α阶和对t的β阶偏导数。

定理 1 对于给定分划$\pi(1.1)$，函数$p(x)(1.2)$，及数组$r(1.3)$和微分算子$L(1.4)$，样条函数集合$Sp(L,\pi,r)$为一n维函数空间，其一组基底可由格林函数$G(x,t)$产生，它们是

$$\begin{aligned}&\varphi_{00}(x)=1,\quad \varphi_{01}(x)=x,\quad \varphi_{02}(x)=\phi_2(x)\\&\varphi_{03}(x)=x\phi_2(x)-2\phi_3(x)\\&\varphi_{i,r_i-1-j}(x)=(-1)^iG^{(0,j)}(x,x_i)\\&j=r_i-1(-1)0,\quad i=1(1)N-1\end{aligned}\tag{1.13}$$

证明：直接代入知　$\varphi_{0j}(x)$　$(j=0,1,2,3)$是齐方程式

$$(p(x)y'')''=0\qquad(a\leqslant x\leqslant b)\tag{1.14}$$

的解，而且是线性无关的，因此是基础解。

当$r_i=1$时：

$$\varphi_{i,0}(x)=G^{(0,0)}(x,x_i)=\Big\{(x-x_i)\Big(\phi_2(x)+\phi_2(x_i)\Big)-$$

$$-2\left(\phi_3(x)-\phi_3(t)\right)\Big\}(x-x_i)_+^0$$

因此

$$\varphi'_{i0}(x)=\Big\{\phi_2(x)+\phi_2(x_i)+(x-x_i)\phi'_2(x)-2\phi'_3(x)\Big\}(x-x_i)_+^0$$

$$=\begin{cases}\phi_2(x_i)-\phi_2(x)+(x-x_i)\phi_1(x) & 当\ x>x_i\\ 0 & 当\ x<x_i\end{cases}$$

$$\varphi''_{i0}(x)=\begin{cases}(x-x_i)\phi_0(x) & 当\ x>x_i\\ 0 & 当\ x<0\end{cases}$$

$$p(x)\varphi''_{i0}(x)=\begin{cases}x-x_i & 当\ x>x_i\\ 0 & 当\ x<x_i\end{cases}$$

$$\Big(p(x)\varphi''_{i0}(x)\Big)''=0\quad 当\ x\in[a,b]-\{x_i\},$$

又

$$\Big[p(x)\varphi''_{i0}(x)\Big]_{x_i}=0$$

其中$[f(x)]_{x_i}$表示$f(x_i+0)-f(x_i-0)$

可见　$\varphi_{i0}(x)$确具有变刚度样条函数性质(1)、(2)即$\varphi_{i0}(x)\in Sp(L,\pi,r)$。

类似地，当 $r_i=2$时，除$\varphi_{i1}(x)=G^{(0,0)}(x,x_i)\in Sp(L,\pi,r)$外，还有 $\varphi_{i0}(x)\in Sp(L,\pi,r)$，事实上，

$$\begin{aligned}\varphi_{i0}(x)&=-G^{(0,1)}(x,x_i)\\&=\left\{\phi_2(x)+\phi_2(t)-(x-t)\phi_2'(t)-2\phi_3'(t)\right\}(x-t)_+^0\Big|_{t=x_i}\\&=\left\{\phi_2(x)-\phi_2(x_i)-(x-x_i)\phi_1(x_i)\right\}(x-x_i)_+^0,\end{aligned}$$

$$\varphi_{i0}''(x)=\phi_2''(x)(x-x_i)_+^0$$

$$\begin{cases}\phi_0(x) & \text{当 } x>x_i\\ 0 & \text{当 } x<x_i\end{cases}$$

$$p(x)\varphi_{i0}''(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x>x_i\\ 1 & \text{当 } x<x_i\end{cases}$$

可见

$$p(x)\varphi_{i0}''(x)''=0 \qquad \text{当} x\in[a,b]-\{x_i\}$$

$$\left[p(x)\varphi_{i0}''(x)\right]_{x_i}=1 \quad \neq 0$$

因此，对$r_{ii}=2$的情形，$\varphi_{i0}(x)$也具有变刚度样条性质(1)、(2)，即$\varphi_{i0}(x)\in Sp(L,\pi,r)$

再证函数系$\{\varphi_{ij}(x)\}$ (1.13)是线性无关的，用反证法，设存在不全为0的常数c_{ij}使

$$S(x)=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{r_i-1}c_{ij}\ \varphi_{ij}(x)\equiv 0 \quad \text{于 } a\leqslant x\leqslant b \tag{1.15}$$

在(1.14)中，补充规定$r_0=4$

(1.15)在 $a\leqslant x\leqslant x_1$上 变成

$$\sum_{j=0}^{3}c_{0j}\ \varphi_{0j}(x)\equiv 0 \tag{1.16}$$

由于$\left\{\varphi_{0j}(x)\right\}_{j=0}^{3}$为齐方程(1.14)的基础解，因此 由(1.16)推知

$$c_{00}=c_{01}=c_{02}=c_{03}=0$$

对任一内部结点 x_v $(v=1,2,\cdots,N-1)$，如果$r_v=1$，则由(1.15) 有

$$\left[\left(p(x)S''(x)\right)'\right]_{x_v}=c_{v0}\left[\left(p(x)\varphi_{v0}''(x)\right)'\right]_{x_v}=c_{v0}=0,$$

如果 $r_v=2$，则

$$[p(x)S''(x)]_{x_\nu}=c_{\nu0}[p(x)\varphi_{\nu0}''(x)]_{x_\nu}=c_{\nu0}=0\ ,$$
$$[(p(x)S''(x))']x_\nu=c_{\nu1}[(p(x)\varphi_{\nu1}''(x))']_{x_\nu}=c_{\nu1}=0\ .$$

总之，推出(1.15)中诸系数 c_{ij} 全部为零，这与原设矛盾，这就证明了函数系 $\{\varphi_{ij}(x)\}$ 的线性无关性。

又我们所定义的任一变刚度样条函数$S(x)$，皆可由$\{\varphi_{ij}(x)\}$函数系线性表示出来，也是容易说明的，这就证明了$\{\varphi_{ij}(x)\}$构成 $Sp(L,\pi,r)$空间的基底，维数是n。

注：$\varphi_{0j}(x)$也可由$G(x\ t)$产生，不难验明

$$-(p(x)G^{(0,2)}(x,t))'_t|_{t=a}=1=\varphi_{00}(x)$$
$$p(a)G^{(0,2)}(x,a)=x=\varphi_{01}(x)$$
$$-G^{(0,1)}(x,a)=\phi_2(x)=\varphi_{02}(x)$$
$$G(x,o)=x\phi_2(x)-2\phi_3(x)=\varphi_{03}(x)$$

推论 1　当$p(x)=1$ 时

$$\phi(x)=x^\nu/\nu!\,(\nu=0,1,2,3),\ G(x,t)=(x-t)^3(x-t)^0_+/3!=(x-t)^3_+/6$$

其相应的基函数系统$\{\varphi_{ij}(x)\}$为

$1,x-a,(x-a)^2/2,(x-a)^3/6$, $(x-x_i)^3_+/6$当$r_i=1$时，$(x-x_i)^2_+/2$, $(x-x_i)^3_+/6$ 当 $r_i=2$ 时 $(i=1,2,\cdots,N-1)$

它们构成通常熟知的三次样条函数空间。

下面研究$p(x)$为阶梯函数和折线函数这两种实际上有用的情形。

引理 1　设$p(x)$为阶梯函数：

$$p(x)=p_{i+1/2}>0,\ 当x_i<x<x_{i+1}\quad(i=0,1,\cdots,N-1)$$

又规定　$p_i=\frac{1}{2}(p_{i-1/2}+p_{i+1/2})$，则有

$$\phi_\nu(x)=\sum_{i=0}^{N-1}\gamma_i(x-x_i))^\nu_+/\nu!\quad(\nu=1,2,3)\tag{1.17}$$

其中

$$\gamma_0=\frac{1}{p_{1/2}},\ \gamma_i=\frac{1}{p_{i+1/2}}-\frac{1}{p_{i-1/2}}\quad(i=1,2,\cdots,N-1)$$

证明：显然 $\phi_1(x)$为分段线性函数，故可表成

$$\phi_1(x)=\int_a^x\frac{dx}{p(x)}=\sum_{j=0}^{N-1}\alpha_j(x-x_j)_+\tag{1.18}$$

在$a<x<x_1$上，$\phi_1'(x)=1/p_{(x)}=1/p_{1/2}$，另一方面，由(1.18) $\phi_1'(x)=\alpha_0$

$\therefore\alpha_0=\gamma_0$ 而在 $x_i<x<x_{i+1}$上，一方面，$\phi_1'(x)=1/p_{(x)}=1/p_{i+1/2}$，而另一方面由(1.18)又有

$$\phi_1'(x)=\sum_{j=0}^{i}\alpha_j=1/p_{i+1/2}$$

由此推出

$$\alpha_i=\frac{1}{p_{i+1/2}}-\frac{1}{p_{i-1/2}}=\gamma_i$$

将$\phi_1(x)$逐次积分，便得到$\phi_\nu(x)$的表达式(1.17)．

推论 2　当$p(x)$为引理 1 中的阶梯函数时其相应算子L的格林函数为

$$G(x,t)=\sum_{j=0}^{N-1}\gamma_j\{(x-t)[(x-x_j)_+^2+(t-x_j)_+^2]/2-[(x-x_j)_+^3$$

$$-(t-x_j)_+^3]/6\}(x-t)_+^0 \tag{1.19}$$

引理 2　设$p(x)$为分段线性函数：

$$p(x)=p_i+\frac{p_{i+1}-p_i}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)\quad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1} \tag{1.20}$$

$$(i=0,1,\cdots,N-1)$$

则

$$\phi_1(x)=B_{1,i}+\frac{h_i}{p_i\alpha_i}ln(1+\alpha_i(x-x_i)/h_i)$$

$$\phi_2(x)=B_{2,i}+\frac{h_i^2}{p_i\alpha_i^2}\left\{\left(1+\alpha_i\frac{(x-x_i)}{h_i}\right)ln\left(1+\alpha_i\frac{x-x_i}{h_i}\right)\right.$$

$$\left.-\alpha_i\frac{x-x_i}{h_i}\right\}$$

$$\phi_{3,i}(x)=B_{3,i}+\frac{h_i^3}{2p_i\alpha_i^3}\left\{\left(1+\alpha_i\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2ln\left(1+\alpha_i\frac{x-x_i}{h_i}\right)\right.$$

$$\left.-\alpha_i\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)-\frac{3}{2}\alpha_i^2\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2\right\} \tag{1.21}$$

于　$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$

其中

$$h_i=x_{i+1}-x_i,\quad \alpha_i=(p_{i+1}-p_i)/p_i=\frac{p_{i+1}}{p_i}-1,$$

$$B_{1,i}=\sum_{j=0}^{i-1}\frac{h_j}{p_j\alpha_j}ln(1+\alpha_j)=\phi_1(x_i)$$

$$B_{2,i}=\sum_{j=0}^{i-1}\frac{h_j^2}{p_j\alpha_j^2}\left\{(1+\alpha_j)ln(1+\alpha_j)-\alpha_j\right\}=\phi_2(x_i) \tag{1.22}$$

$$B_{3,i}=\sum_{j=0}^{i-1}\frac{h_j^3}{2p_j\alpha_j^3}\left\{\left(1+\alpha_j\right)^2 ln\left(1+\alpha_j\right)-\alpha_j-\frac{3}{2}\alpha_j^2\right\}=\phi_3(x_i)$$

$$B_{1,0}=B_{1,0}=B_{3,0}=0 \qquad (i=0,1,\cdots N-1)$$

注意到，可能 $p_{i+1}=p_i$ 即 $\alpha_i=0$，此时，在(1.21)各式中，令 $\alpha_i\to 0$，可得到

$$\phi_1(x)=B_{1,i}+(x-x_i)/p_i \qquad \phi_2(x)=B_{2,i}+(x-x_i)^2/2p_i, \tag{1.23}$$
$$\phi_3(x)=B_{3,i}+(x-x_i)^3/6p_i \qquad 于\ x\leqslant x_i\leqslant x_{i+1}$$

一般说来，当 h_j 甚小时，可认为诸 $\alpha_j\approx 0(j=0,1,\cdots,N-1)$，于是将 $ln(1+\alpha_j)$展开，取其主要部分，则(1.23)中各计算公式可简化如下：

$$B_{1i}\approx\sum_{j=0}^{i-1}h_j/p_j, \qquad B_{2i}\approx\sum_{j=0}^{i-1}h_j^2/2p_j, \qquad B_{3i}\approx\sum_{j=0}^{i-1}h_j^3/6p_j \tag{1.24}$$

以上 $\phi_\nu(x)\in C^\nu[a,b]$ $(\nu=1,2,3)$

引理2的结果可以通过计算得到，证明略。

推论3 当 $p(x)$为引理2中的折线函数时，其相应算子L的格林函数为

$$G(x,t)=\left\{(x-t)(\phi_2(x)+\phi_2(t))-2(\phi_3(x)-\phi_3(t))\right\}(x-t)_+^0$$

其中 $\phi_2(x)$，$\phi_3(x)$ 按(1.23)决定。

在 $p(x)=const$（常数）的情形，对 $G(x,t)$ 关于t作四阶差商，可以得到局部基底，对变系数 $p(x)$作类似处理，可得到“几乎是局部”的基底，也就是说，在局部区间之外，虽然一般说来，相应δ－山形样条函数不恒为零，但绝对值很小[4]。

2．插值样条函数的基本性质

对于$[a,b]$的给定分划π数组r及相应给定数据$\{y_i^{(j)}\}$，和α_0,α_N我们研究和[4]中同样的五类插值问题：求$S(x)\in Sp(L,\pi,r)$，使满足内点插值条件：

$$S^{(j)}(x_i)=y_i^{(j)} \quad (j=0,\cdots,r_i-1,\ i=1,2,\cdots,N-1) \tag{2.1}$$

并分别满足以下五类不同的边界插值条件：

(Ⅰ) $S(x_i)=y_i$, $S'(x_i)=\alpha_i$ $(i=0,N)$ (2.2)

(Ⅱ) $S(x_i)=y_i$, $S'(x_i)=\alpha_i$ $(i=0,N)$ (2.3)

(Ⅲ) $S(x_0)=y_0$, $S^{(\nu)}(x_N)=S^{(\nu)}(x_0)$ $(\nu=0,1,2)$ (2.4)

对情形(Ⅲ)，自然假定原给数据$y_N=y_0$

(Ⅳ) $S(x_0)=y_0$, $S'(x_0)=\alpha_0$, $S''(x_N)=S'''(x_N)=0$ (2.5)

(Ⅴ) $S''(x_0)=S''(x_N)=0$

$(P(x_0)S''(x_0))'=-k_aS(x_0),(p(x_N)S''(x_N))'=k_bS(x_N)$ (2.6)

$(k_a>0,\ k_b>0)$ 情形(V)是摸拟弹性支撑条件，以往样条插值中未见研究。其它几类边界条件的力学意义是明显的。以后我们分别称它们为(Ⅰ)型…到(V)型插值问题。

定理2 (Ⅰ)型到(V)型插值问题的解均存在而且唯一。

证明：必须而且只须证明相应齐插值问题只有恒为零的解。下面针对(Ⅴ)型插值问题来证明，其它情形类似。设(V)型插值的内点条件(2.1)的右端数据全为零，$S(x)\epsilon Sp(L,\pi,r)$ 满足(2.1)和(2.6)，于是

$$(p(x)S''(x))''=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}\delta^{(j)}(x-x_i) \tag{2.7}$$

从而据(2.7)和内点插值条件(2.1)有

$$\int_a^b(p(x)S''(x))''S(x)dx=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}S^{(j)}(x_i)=0 \tag{2.8}$$

另一方面，由分部积分法又有

$$\int_a^b(p(x)S''(x))''S(x)dx=\Big[(pS'')'S(x)-(pS'')S'\Big]\Big|_a^b+\int_a^b p(x)(S''(x))^2dx \tag{2.9}$$

对问题(V)有

$$\Big[(pS'')'S(x)-(pS'')S'\Big]\Big|_a^b=K_b(S(b))^2+K_a(S(a))^2\geqslant0 \tag{2.10}$$

从而由(2.8)、(2.9)、(2.10)推出

$$\int_a^b p(x)(S''(x))^2dx=-\Big\{K_a(S(a))^2+K_b(S(b))^2\Big\}\leqslant0 \tag{2.11}$$

而由于$p(x)\geqslant p_0>0$且分段连续，故由(2.11)推得

$$(S''(x))^2\leqslant0 \tag{2.12}$$

故 $S''(x)\equiv0$ 于$[a,b]$，即$S(x)=C_0+C_1x$. 再据端点条件(2.6)，此时其左部为零，从而

$$(p(x_0)S''(x_0))'=-K_aS(a)=0,$$
$$(p(x_N)S''(x_N))'=K_bS(b)=0$$

而$K_a>0,K_b>0$,故必须$S(a)=S(b)=0$,因此$S(x)\equiv0$ 于$[a,b]$,定理证完。

注：证明中自然可以迴避δ-函数，只是作分部积分时，这样处理要简洁些。

下面我们采用[5]中的记号，用$pc^{r,2}(a,b)$ 表示$[a,b]$上具有下列性质的函数$\varphi(x)$的集合：

(1) $\varphi(x)\epsilon C^{r-1}(a,b)$,

(2) 在$[a,b]$的每一子区间$[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots N-1)$ 上，$\varphi(x)\epsilon C^r(x_i,x_{i+1})$,

(3) $\varphi^{(r)}(x)$ 的L^2模有界，即

$$\|\varphi^{(r)}\| = \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi^{(r)}(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

定理3 设$f(x)$为任一被插函数，$S(f;x)\in Sp(L,\pi,r)$为其插值样条函数．$S(x)\in Sp(L,\pi,r)$为任一样条函数，且设(Ⅱ)型插值的边界条件(2.3)中的$\alpha_0=\alpha_N=0$，即$S''(f;x_0)=f''(x_0)=0$，$S''(f;x_N)=f''(x_N)=0$，则有下列事实成立：

当$f(x)\in C^{2,2}(a,b)$时有

(1)第一积分关系

$$\int_a^b p(x)(f''(x))^2dx = \int_a^b p(x)(S''(f;x))^2dx + \int_a^b p(x)(f''(x) - S''(f;x))^2dx \qquad \text{(对(Ⅰ)-(Ⅳ)型插值)}$$

$$\int_a^b p(x)(f''(x))^2dx + K_a(f(a))^2 + K_b(f(b))^2$$
$$\geqslant \int_a^b p(x)(S''(f;x))^2dx + \int_a^b p(x)(f''(x)-S''(f;x))^2dx$$
$$+K_a(S(f;a))^2 + K_b(S(f;b))^2 \qquad \text{(对第(Ⅴ)型插值)；}$$

(2) 最小模性质

$$\int_a^b p(x)(S''(f;x))^2dx \leqslant \int_a^b p(x)(f''(x))^2dx \quad \text{(对(Ⅰ)-(Ⅳ)型插值)}$$

$$\int_a^b p(x)(S''(f;x))^2dx + K_aS(f;a)^2 + K_bS(f;b)^2$$
$$\leqslant \int_a^b p(x)(f''(x))^2dx + K_a(f(a))^2 + K_b(f(b))^2 \quad \text{(对(Ⅴ)型插值)，}$$

且当且仅当$S(f;x)=f(x)$时取等号；

(3) 最佳逼近性质

$$\int_a^b p(x)(f''(x)-S''(f;x))^2dx \leqslant \int_a^b p(x)(f''(x)-S''(x))^2dx$$
$$\text{(对(Ⅰ)-(Ⅳ)型插值)}$$

$$\int_a^b p(x)(f''(x)-S''(f;x))^2dx + K_a(f(a)-S(f;a))^2 + K_b(f(b) - S(f;b))^2 \leqslant \int_a^b p(x)(f''(x)-S''(u))^2dx + K_a(f(a)-S(a))^2$$
$$+K_b(f(b)-S(b))^2 \qquad \text{(对(Ⅴ)型插值)}$$

(4) 当$f(x)\in C^{4,2}(a,b)$，且$p(x)f''\in C^2(a,b)$时，有第二积分关系，

$$\int_a^b p(x)(R''(f;x))^2dx = \int_a^b (p(x)f''(x))''R(f;x)dx$$
$$\text{(对(Ⅰ)-(Ⅳ)型插值)}$$

$$\int_a^b p(x)(R''(f;x))^2dx + K_a(R(f;a))^2 + K_b(R(f;b))^2$$

$$=\int_a^b (p(x)f''(x))''R(f;x)dx \qquad (\text{对}(V)\text{型插值问题})$$

其中$R(f;x)=f(x)-S(f;x)$. 如果$f(x)$不是作为被插函数，而是看作某插值问题的任一插值函数，$S(f;x)\epsilon Sp(L,\pi,r)$是同一插值问题的插值样条函数，则定理3仍真。

证明：性质(2)是性质(1)的推论，性质(3)和性质(1)证法类似，因此选择性质(1)作扼要证明，令$g(x)=f(x)-S(f;x)$，则$g(x)$满足齐插值条件，

由于 $f''(x)=S''(f;x)+g''(x)$ 故

$$\int_a^b p(x)\left(f''(x)\right)^2 dx=\int_a^b p(x)\left(S''(f;x)\right)^2 dx+\int_a^b p(x)\left(g''(x)\right)^2 dx+2\int_a^b p(x)\left(S''(f;x)\right)g''(x)dx \qquad (2.13)$$

由分部积分法

$$\int_a^b p(x)\left(S''(f;x)\right)g''(x)dx=\left[p(x)S''(f;x)g'(x)-\left(p(x)S''(f;x)\right)'g(x)\right]\Big|_a^b+\int_a^b\left(p(x)S''(f;x)\right)''g(x)dx \qquad (2.14)$$

但 $$\left(p(x)S''(f;x)\right)''=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}\delta^{(j)}(x-x_i),$$

而 $g(x)$ 为齐插值问题的解，故

$$\int_a^b\left(p(x)S''(f;x)\right)''g(x)dx=\sum_i\sum_j\beta_{ij}g^{(j)}(x_i)=0 \qquad (2.15)$$

又根据插值的边界条件有

$$\left[p(x)S''(f;x)g'(x)-\left(p(x)S''(f;x)\right)'g(x)\right]\Big|_a^b=$$
$$=\begin{cases}0 & \text{对}(1)-(1V)\text{型插值}\\ -K_bS(f;b)g(b)-K_aS(f;a)g(a) & \text{对}(V)\text{型插值}\end{cases} \qquad (2.16)$$

而

$$\begin{aligned}&-K_bS(f;b)g(b)-K_aS(f;a)g(a)=K_b\left(S(f;b)\right)^2+K_a\left(S(f;a)\right)^2\\&-K_bS(f;b)f(b)-KaS(f;a)f(a)\geqslant K_b\left(S(f;b)\right)^2+K_a\left(S(f;a)\right)^2\\&-\frac{1}{2}K_b\left(\left(S(f;b)\right)^2+\left(f(b)\right)^2\right)-\frac{1}{2}K_a\left(\left(S(f;a)\right)^2+\left(f(a)\right)^2\right)\\&\geqslant-\frac{1}{2}K_a\left(\left(f(a)\right)^2-\left(S(f;a)\right)^2\right)-\frac{1}{2}K_b\left(\left(f(b)\right)^2\right.\\&\left.-\left(S(f;b)\right)^2\right)\end{aligned} \qquad (2.17)$$

将(2.17)代入(2.16)，将(2.15)，(2.16)代入(2.14)，再将(2.14)代入(2.13)，便得到了性质(1)的证明。

再证第二积分关系，同样利用分部积分法得

$$\int_a^b p(x)\left(R''(f;x)\right)^2 dx = \left[p(x)R''(f;x),R'(f;x) - \left(p(x)R''(f;x)\right)'R(x)\right]\Bigg|_a^b + \int_a^b \left(x(x)R''(f;x)\right)''R(x)dx \qquad (2.18)$$

由于

$$\left(p(x)R''(f;x)\right)'' = \left(R(x)f''(x)\right)'' - \left(p(x)S''(f;x)\right)'' = $$

$$= \left(p(x)f''(x)\right)'' - \sum_i\sum_j \beta_{ij}\delta^{(j)}(x-x_i) \qquad (2.19)$$

将(2.19)代入(2.18)右端得

$$\int_a^b \left(p(x)R''(f;x)\right)''R(x)dx = \int_a^b \left(p(x)f''(x)\right)''R(x)dx \qquad (2.20)$$

将(2.20)代入(2.18)，再注意插值边界条件，便完成第二积分关系的证明。至此定理全部证完。

3. 三弯矩插值方法

由于$(p(x)S''(x))''=0$于$(x_i, x_{i+1})(i=0,1\cdots,N-1)$，故$M(x)=p(x)S''(x)$为分段线性函数。令$M_i=p(x_i)S''(x_i)$，则

$$M(x)=\{M_i(x_{i+1}-x)+M_{i+1}(x-x_i)\}/h_i,\quad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$$

$$S''(x)=\frac{1}{p(x)}\{M_i(x_{i+1}-x)+M_{i+1}(x-x_i)\}/h_i,\quad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1} \qquad (3.1)$$

对$p(x)$为阶梯函数的情形，将(3.1)积分两次，并要求其满足插值条件(相当$r_1=\cdots=r_{N-1}=1$)：

$$S(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,\cdots,N) \qquad (3.2)$$

得到

$$S(x)=[(x-x_i)^3M_{i+1}+(x_{i+1}-x)^3M_i]/6h_i\,p_{i+1/2} + \left(y_{i+1}-h_i^2M_{i+1}/6P_{i+1/2}\right)\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + \left(y_i-h_i^2M_i/6p_{i+1/2}\right)\left(\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\right) \quad (x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}) \qquad (3.3)$$

对(3.3)求导数得

$$S'(x)=[(x-x_i)^2M_{i+1}-(x_{i+1}-x)^2M_i]/2h_ip_{i+1/2}$$
$$+(y_{i+1}-y_i)/h_i-(M_{i+1}-M_i)h_i/6p_{i+1/2} \quad (3\cdot4)$$
$$(x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1})$$

要求

$$S'(x_i-0)=S'(x_i+0) \qquad (i=1,2,\cdots,N-1)$$

导至下列三弯矩方程组：

$$\mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=d_i$$
$$\lambda_i=\xi_i/(\xi_{i-1}+\xi_i) \qquad \mu_i=1-\lambda_i \quad (3.5)$$
$$\xi_i=h_i/p_{i+1/2}$$
$$d_i=6[(y_{i+1}-y_i)/h_i-(y_i-y_{i-1})/h_{i-1}]/(\xi_{i-1}+\xi_i)$$
$$(i=1,2,\cdots,N-1)$$

(3.5)是关于基本未知量M_i $(i=0,1,\cdots,N)$的三对角带状方程组，尚缺两个方程，由各类插值问题中尚未用到的两个边界条件来补充。

边界条件

(I)型：

$$2M_0+\lambda_0M_1=d_0 \quad (3.6)$$
$$\mu_NM_{N-1}+2M_N=d_N$$
$$\lambda_0=\mu_N=1$$
$$d_0=6\left[(y_1-y_0)/h_0-y_0'\right]p_{\frac{1}{2}}/h_0$$
$$d_N=6\left[y_N'-(y_N-y_{N-1})/h_{N-1}\right]\cdot p_{N-1/2}/h_{N-1}$$

(Ⅱ)型：

$$M_0=p_{1/2}y_0'', \qquad M_N=p_{N-1/2}y_N''$$

(Ⅲ)型：这是周期性边界条件，此时我们要求(3.5)对$i=N$也成立，但指定其中

$y_N=y_0$，$y_{N+1}=y_1$，$M_N=M_0$，$M_{N+1}=M_1$.从而得到关于$M_1\cdots,M_N$的方程组 (3.5)

进一步研究任意变刚度$p(x)$的情形。

仍对(3.1)积分两次得

$$S(x)=M_i\int_{x_{i+1}}^{x}\int_{x_{i+1}}^{x}\left(\frac{x_{i+1}-t}{h_i}\right)\frac{dtdx}{p(t)}+M_{i+1}\int_{x_i}^{x}\int_{x_i}^{x}\left(\frac{t-x_i}{h_i}\right)$$
$$\frac{dtdx}{p(t)}+a_i\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+a_{i+1}\frac{x-x_i}{h_i} \quad (3.8)$$

作变数替换，$t-x_i=\tau(x-x_i)$，则积分

$$\int_{x_i}^{x}\int_{x_i}^{x}\left(\frac{t-x_i}{h_i}\right)\frac{dt\,dx}{p(t)}=\int_{x_i}^{x}(x-t)(t-x_i)\frac{dt}{h_i\,p(t)}$$

$$=\frac{(x-x_i)^3}{h_i}\int_0^1\tau(1-\tau)\frac{d\tau}{p(x_i+\tau(x-x_i))} \tag{3.9}$$

$$\int_{x_{i+1}}^{x}\int_{x_{i+1}}^{x}\left(\frac{x_{i+1}-t}{h_i}\right)\frac{dt}{p(t)}=\int_{x_{i+1}}^{x}(x-t)\left(\frac{x_{i+1}-t}{h_i}\right)\frac{dt}{p(t)}$$

$$=\frac{(x_{i+1}-x)^3}{h_i}\int_0^1\tau(1-\tau)\frac{d\tau}{p(x_{i+1}+\tau(x-x_{i+1}))} \tag{3.10}$$

要求$S(x)$满足插值条件(3.2)得

$$a_i=y_i-h_i^2\int_0^1\tau(1-\tau)\frac{d\tau}{p(x_{i+1}-\tau h_i)}M_i=y_i-\beta_i h_i^2 M_i \tag{3.11}$$

$$a_{i+1}=y_{i+1}-h_i^2\int_0^1\tau(1-\tau)\frac{d\tau}{p(x_i+\tau h_i)}M_{i+1}=y_{i+1}-\beta_i h_i^2 M_{i+1} \tag{3.12}$$

其中

$$\beta_i=\int_0^1\tau(1-\tau)\frac{d\tau}{p(x_i+\tau h_i)}=\int_0^1\tau(1-\tau)\frac{d\tau}{p(x_{i+1}-\tau h_i)} \tag{3.13}$$

将(3.11)、(3.12)代入(3.8)得

$$S(x)=M_i\left(\int_{x_{i+1}}^{x}\int_{x_{i+1}}^{x}\left(\frac{x_{i+1}-t}{h_i}\right)\frac{dt\,dx}{p(t)}-\beta_i h_i^2(x_{i+1}-x)\right)+$$

$$M_{i+1}\left(\int_{x_i}^{x}\int_{x_i}^{x}\left(\frac{t-x_i}{h_i}\right)\frac{dt\,dx}{p(t)}-\beta_i h_i^2(x-x_i)\right)+$$

$$+y_i\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{h_i} \tag{3.14}$$

对(3.14)求导数

$$S'(x)=M_i\left(\int_{x_{i+1}}^{x}\left(-\frac{x_{i+1}-t}{h_i}\right)\frac{dt}{p(t)}+\beta_i h_i\right)+$$

$$M_{i+1}\left(\int_{x_i}^{x}\left(\frac{t-x_i}{h_i}\right)\frac{dt}{p(t)}-\beta_i h_i\right)+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} \tag{3.15}$$

$$S'(x+0)=M_i h_i(\beta_i-\alpha)-M_{i+1}h_i\beta_i+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} \tag{3.16}$$

$$S'(x_{i+1}-0)=M_i h_i\beta_i+M_{i+1}\left(\widetilde{a}-\beta_i\right)h_i+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} \tag{3.17}$$

其中

$$a_i=\int_0^1\frac{\tau d\tau}{p(x_{i+1}-\tau h_i)},\qquad \widetilde{a}=\int_0^1\frac{\tau d\tau}{p(x_i+h\tau_i)} \tag{3.18}$$

要求$S'(x_i+0)=S'(x_i-0)$，利用(3.16)，(3.17)导出三变矩方程

$$M_{i-1}h_{i-1}\beta_{i-1}+M_i\left(\widetilde{a}_{i-1}-\beta_{i-1}\right)h_{i-1}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}=M_i h_i\left(\beta_i-a_i\right)-$$

$$M_{i+1}h\beta+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} \tag{3.19}$$

整理之，得

$$\mu_i M_{i-1}+\nu_i M_i+M_{i+1}=d_i \tag{3.20}$$

其中

$$\mu_i=\frac{\beta_{i-1}h_{i-1}}{\beta_{i-1}h_{i-1}+\beta_i h_i},\quad \lambda=1-\mu_i,\quad \nu_i=\frac{\widetilde{a}_{i-1}h_{i-1}+a_i h_i}{\beta_{i-1}h_{i-1}+\beta_i h_i}-1 \tag{3.21}$$

$$d_i=\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)\Big/(\beta_{i-1}h_{i-1}+\beta_i h_i)\quad (i=1,2,\cdots N-1)$$

边界条件处理同上，不再赘述。

对$p(x)$为分段线性函数，以至分段多项式，系数β_i，a_i，$\widetilde{a}_i$均可精确积分出来。为了计算简便而通用，我们建议采用下列带权求积公式

$$\int_0^1\tau f(\tau)d\tau=\frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{6}f(1) \tag{3.22}$$

$$\int_0^1\tau(1-\tau)f(\tau)d\tau=\frac{1}{12}(f(0)+f(1))$$

去求系数，这两个公式分别以τ和$\tau(1-\tau)$为权函数，对$f(\tau)$为一次多项式时精确。

而且按(3.22)还有$a_i=\widetilde{a}_i$。

注意到这里的三弯矩方程的系数矩阵具有严格的对角优势，因此仿〔6〕中的代数方法，对变刚度样条插值，可以得到和通常三次样条插值的同样阶的误差界，而这里只要求被插函数分片光滑就可以了。

4. H—变刚度样条插值的误差界

定理 4　对$[a,b]$上给定分划$\pi(1.1)$，设$p(x)$在每一子区间$[x_i,x_{i+1}]$上连续，在分划结点x_i上容许不连续，且$p(x)>p_0$，$1/p(x)$在$[a,b]$上的积分存在，又设被插函数$f(x)$和pf''在分划子区间上分段二次连续可微，则上述$I-V$型插值余项$R_x(f)$可表成

$$R_x(f)=\int_a^b K(x,t)L(f(t))dt \tag{4.1}$$

其中$L(f)=(Pf'')''$，$K(x,t)=R_x\{G(x,t)\}$，$G(x,t)$为算子L的任一格林函数．特别可取(1.11)。

$K(x,t)$当固定t，作为x的函数，它满足相应齐插值条件，固定x作为t的函数，也满足内点齐插值条件和相应'共轭'* 齐插值边界条件，唯Ⅰ、Ⅱ型插值是自共轭的，$K(x,t)=R_x\{(x,t)\}=R_t\{G(x,t)\}$为对称正定核，因此关于$t$满足关于$x$的同样的齐插值边界条件。

这一定理是$Peano$核定理对变刚度样条插值余项的推广。

证明：利用格林函数，可表$f(x)$为

$$f(x)=S(x)+\int_a^b G(x,t)L(f)dt \tag{4.2}$$

其中$L(S)=0$从而$S(x)\in Sp(L\,\pi,r)$，根据插值问题解的唯一性有$R_x(s)=0$，用插值余项算子R_x作用到(4.2)的两端即得(4.1)。

另一方面，余项$R(x)=R_x(f)$又可表成

$$R(x)=\int_a^b K(x,t)L(R)dt \tag{4.3}$$

而$L(R)=L(f)-L(S(f))$，$S(f)$为f的插值样条函数。根据插值样条函数的定义知

$$L(S(f))=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{r-1}\beta_{ij}\delta^{(j)}(x-x_i)$$

于是

* 共轭插值問題將另文研究

$$\int_a^b K(x,t)L_t(S(f))dt=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}\frac{\partial^j K(x,t)}{\partial t^j} \tag{4.4}$$

由(4.3)，(4.4)得

$$R(x)=\int_a^b K(x\,t)L(f)dt+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}\frac{\partial^j K(x,t)}{\partial t^j}\bigg|_{t=x_i} \tag{4.5}$$

比较(4.5)和(4.1)知

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}\frac{\partial^j K(x,t)}{\partial t^j}\bigg|_{t=x_i}=0 \tag{4.6}$$

由于f的任意性，因此(4.6)中的β_{ij}是任意的，
于是由(4.6)得

$$\frac{\partial^j K(x,t)}{\partial t^j}\bigg|_{t=x}=0\quad(i=1,\cdots N-1\ j=0,\cdots Y_i-1) \tag{4.7}$$

这就证明了$K(x\,t)$ 关于t满足关于x的同样的齐插值条件。

用Ⅰ表示插值算子，则$R_x\{G(x\,t)\}=G(x\,t)-I_x\{G(x\,t)\}$．$R_t\{G(x\,t)\}=G(x\,t)-I_t\{G(x\,t)\}$，但是，$I_x\{G(x\,t)\}\epsilon Sp_t(L\,\pi\,r)$从而据插值问题解的唯一性有$I_x\{G(x\,t)\}=I_tI_x\{G\}$，同理$I_t\{G(x\,t)\}=I_xI_t\{G\}$，但对Ⅰ，Ⅱ型插值$I_xI_t=I_tI_x$　从而$I_x\{G\}=I_t\{G\}$　即$R_x\{G(x,t)\}=R_t\{G(x,t)\}$．再注意(1.11)得　$G(x\,t)-G(t\,x)=\{(x-t)(\phi_2(x)+\phi_2(t))-2(\phi_3(x)-\phi_3(t))\}\epsilon Sp_t(L\,\pi,r)$，故$R_t\{G(x,t)-G(t,x)\}=0$　即$R_t\{G(x,t)\}=R_t\{G(t,x)\}$　于是

$K(x\,t)=R_x\{G(x,t)\}=R_t\{G(x,t)\}=R_t\{G(t,x)\}=K(t,x)$ 即 $K(x,t)$ 的对称性得证，其正定性则是根据微分算子L的相应边值问题的正定性。（关于微分算子理论可参考〔9〕）定理证完。

下面特别讨论埃尔米特分段样条插值（$H-Spline$ 插值，即 $r_1=r_2\cdots=r_{N-1}=2$ 的情形）的余项，这类样条函数空间用$Sp(L,\pi,2)$表示．

引理1　设$p(x)\epsilon C^2(o\,h)$，$h>0$为任一正数，又设$p(x)>0$，$1/p(x)$可积，若$H_0(x)$，$H_{01}(x)$分别满足

$$(p(x)\,H_0''(x))''\equiv 0,\ H_0(0)=1,\ H_0'(0)=H_0(h)=H_0'(h)=0 \tag{4.8}$$

$$(p(x)\,H_{01}''(x))''\equiv 0,\ H_{01}(0)=H_{01}(h)=H_{01}'(h)=0,\ H_{01}'(0)=1 \tag{4.9}$$

则

$$0\leqslant H_0(x)\leqslant 1,\ 0\leqslant H_{01}(x)\leqslant x\ \text{于}\ x\epsilon[0\,h] \tag{4.10}$$

证明：令 $\varphi_0(x)=1$，$\varphi_2(x)=x$，$\varphi_3(x)=\int_0^x\int_0^x\frac{dx}{p(x)}$，

$\omega_4(x)=\int_0^x\int_0^x \frac{xdx}{p(x)}$，则可求得

$$H_0(x)=1-\omega(x)/\omega(h) \tag{4.11}$$

$$H_{01}(x)=x-\lambda(x) \tag{4.12}$$

其中

$$\omega(x)=\varphi_3(x)\varphi_4'(h)-\varphi_4(x)\varphi_3'(h)$$

$$\lambda(x)=h\omega(x)/\omega(h)+(\varphi_3(h)\varphi_4(x)-\varphi_4(h)\varphi_3(x))/\omega(x) \tag{4.13}$$

必须而且只须证明

$$0\leqslant\omega(x)\leqslant\omega(h),\quad 0\leqslant\lambda(x)\leqslant x \tag{4.14}$$

注意 $p(x)\omega''(x)=\varphi_4'(h)-\varphi_3'(h)x$ 是线性函数，故在 $[0,h]$ 上最多一个根，而 $p(x)>0$，从而 $\omega''(x)$ 最多一个根，据罗尔定理，$\omega'(x)$ 在 $[0\ h]$ 上最多两个根，而已知 $\omega'(0)=\omega'(h)=0$，故 $\omega'(x)>0$ 于 $(0\ h)$ 于是 $\omega(x)$ 为单调上升函数，而 $\omega(0)=0$，故 $0\leqslant\omega(x)\leqslant\omega(h)$，即 $0\leqslant H_0(x)\leqslant 1$ 得证。同理 $\lambda''(x)$ 在 $[0\ h]$ 上最多一个根，设为 $\xi(0<\xi<h)$，由于 $\lambda''(0)=\left(\int_0^1\frac{dt}{p(t)}-\int_0^1\tau(1-\tau)/p(\tau)d\tau\right)/p(0)\omega(h)>0$. $\lambda'(0)=0$，故在 $0\leqslant x\leqslant\xi$ 上必 $\lambda''(x)\geqslant 0$，从而 $\lambda'(x)\geqslant 0$，$\lambda(x)\geqslant\lambda(0)=0$；而在 $\xi\leqslant x\leqslant h$ 上，由于 $\lambda''(x)\leqslant 0$，故 $\lambda'(x)\geqslant\lambda'(1)=1$，因此 $\lambda(\xi)\leqslant\lambda(x)\leqslant\lambda(h)=h$，再根据 $y=x$ 的斜率为1，故 $y=\lambda(x)$ 与 $y=x$ 在 $\xi\leqslant x\leqslant h$ 上不能相交，从而 $\lambda(\xi)\leqslant\xi$，在 $0\leqslant x\leqslant\xi$ 上 $y=\lambda(x)$ 与 $y=x$ 也不能有交点，否则至少交于两点，这与 $\lambda''(x)\geqslant 0$ 于 $0\leqslant x\leqslant\xi$ 上相矛盾。总之(4.14)得证，引理证完。

引理2 (1.11) 中的 $G(x\ t)$ 可以表成下列形式

$$\begin{aligned}
&G(x\ t)=(x-t)^3\int_0^1\xi(1-\xi)/p(t+\xi(x-t))d\xi\\
&G^{(0,1)}(x\ t)=-(x-t)^2\int_0^1(1-\xi)/p(t+\xi(x-t))d\xi\\
&G^{(1,0)}(x\ t)=(x-t)^2\int_0^1\xi/p(t+\xi(x-t))d\xi\\
&G^{(0,2)}(x\ t)=(x-t)/p(t)\\
&G^{(2,0)}(x\ t)=(x-t)/p(x)\qquad (x\geqslant t)\\
&G^{(1,1)}(x\ t)=\int_x^t dt/p(t)\\
&G^{(2,1)}(x\ t)=\phi_0(x)
\end{aligned}\tag{4.15}$$

证明，当 $x\geqslant t$ 时对(1.11) $G(x\ t)$ 关于 t 求导数得

$$G^{(0,1)}(x\ t)=(x-t)\phi_1(t)-(\phi_2(x)-\phi_2(t))=(x-t)\phi_1(t)-\\-\int_t^x\phi_1(\tau)d\tau \tag{4.16}$$

可见(4.16)右端可视为在$[t\ x]$上对$\Psi_1(\tau)$的积分采用左矩形求积公式的余项，理同

$$G(x,t)=(x-t)(\phi_2(x)+\phi_2(t))-2(\phi_3(x)-\phi_3(t))=$$

$$=2\left\{(x-t)\frac{\phi_2(x)+\phi_2(t)}{2}-\int_t^x\phi_2(\tau)d\tau\right\}$$

乃是梯形求积公式的余项。采用积分形式的余项公式，并作变数替换，就可得到(4.15)中的积分公式。(4.15)中其它公式，直接求导数便可得到。

定理 5 在定理 4 的条件下，I 型$H-Spline$插值的余项的界为

$$\|R^{(\alpha)}\|_\infty\leqslant C_\alpha h^{4-\alpha}\|L(f)\|_\infty/p_0\quad(\alpha=0,1,2)\tag{4.15}$$

$$C_0=11/24,\quad C_1=7/6',\quad C_2=2$$

$$\|(pR'')'\|_\infty\leqslant 2h\|L(f)\|_\infty\tag{4.16}$$

其中 $h=Max|x_{i+1}-x_i|:i=0,1,\cdots,N-1;$

$$\|g\|_\infty=Sup|g(x)|:\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

证明：　由定理4.

$$R^{(\alpha)}(x)=\int_a^b K^{(\alpha,0)}(x,t)L(f)dt\tag{4.17}$$

其中

$$K^{(\alpha,0)}(x,t)=R_t\{G^{(d,0)}(x\ t)\}\tag{4.18}$$

因此

$$\|R^{(\alpha)}\|_\infty\leqslant(\underset{x}{Sup}\int_a^b\left|K^{(d,0)}x,t\right|dt)\|L(f)\|_\infty\tag{4.19}$$

$$\|(pR'')\|_\infty\leqslant\underset{x}{Sup}\int_a^b p(x)|K^{(2,)}(x,t)|dt\|L(f)\|_\infty$$

任意固定一x，设$x\epsilon(x_\mu,x_{\mu+1})$，造一辅助函数

$$g_\mu(x\ t)=\begin{cases}G(x\ t) & \text{当 } t\ \bar{\epsilon}(x_\mu,x_{\mu+1})\\ G(x\ t)\text{关于 } t \text{ 的}H\text{插值}, & \text{当 } t\epsilon(x_\mu,x_{\mu+1})\end{cases}$$

显然

$$g_\mu(x\ t)=G(x,x_\mu)H_0(t-x_\mu)+G^{(0,1)}(x,x_\mu)H_{01}(t-x_\mu)\tag{4.20}$$

通过这样定义的$g_\mu(x,t)\epsilon Sp_t(L,\pi,2)$，于是$R_t\{g_\mu(x,t)\}=0$　从而

$$K(x,t)=R_t\{G(x,t)-g_\mu(x,t)\}=G(x,t)-g_\mu(x,t)\tag{4.21}$$

(4.21)是由于$I_t\{G(x,t)-g_\mu(x,t)\}=0$由(4.21)可见$K(x,t)=0$当$x\epsilon(x_\mu x_{\mu+1})$而$t\bar{\epsilon}(x_\mu x_{\mu+1})$时，于是

$$K^{(\alpha,0)}(x,t)=G^{(\alpha,0)}(x,t)-g_\mu^{(\alpha,0)}(x,t)$$

$$|K^{(\alpha,0)}(x,t)|\leqslant|G^{(\alpha,0)}(x,t)|+|G^{(\alpha,0)}(x,x_\mu)|\cdot|H_0(t-x_\mu)|+$$

$$+|G^{(\alpha,1)}(x,x_\mu)|\cdot|H_{01}(t-x_\mu)|\tag{4.22}$$

根据引理1,2.可对(4.22)右端各项的界作出估计，例如，对 $\alpha=0$

$$\int_a^b |K(x,t)|dt=\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|K(x,t)|dt\leqslant\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|G(x,t)|dt+$$

$$+|G(x,x_\nu)|\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|H_0(t-x_\nu)|dt+$$

$$+|G^{(0,1)}(x,x_\nu)|\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|H_{01}(t-x_\nu)|dt$$

$$\leqslant\frac{h^4}{p_0}\cdot\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)=\frac{11h^4}{24p_0}\qquad(4.23)$$

其它估计，都可类似得到。将(4.23)代入(4.19)即完成了定理的证明。

定理5的估计关于h的阶不能提高，但是系数还可以改进。并且同样阶的估计对其它几型插值也可得到。

关于多项式样条的H—插值的误差界的研究参考〔5〕,〔6〕。

5. 2m阶广义变刚度样条

本文上述结果，可以推广到$2m$阶广义变刚度样条函数上去。此时微分算子L推广为

$$Ly=(p(x)y^{(m)}(x))^{(m)}=\frac{d^m}{dx^m}\left(p(x)\frac{d^m}{dx^m}y\right)\qquad(5.1)$$

m为正整数，$p(x)$分片连续且$p(x)\geqslant p_0>0$.

我们定义满足下列关系

$$LS(x)=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}\delta^{(j)}(x-x_i)\qquad(5.2)$$

的函数$S(x)$为$2m$阶广义变刚度样条函数，其全体所成的集合记为$Sp(L,\pi,r)$。

定理6 对给定分划$\pi(1.1)$及亏度矢$r=(r_1,\cdots,r_i,\cdots,r_{N-1})$，若$1\leqslant r_i\leqslant m$ $(i=1,\cdots,N-1)$则有

(1) $Sp(L,\pi,r)$为一个$n=2m+\sum_{i=1}^{N-1}r_i$维函数空间，其一组基函数系统为

$$\{\varphi_i(x)\ (i=1,2,\cdots,2m),$$
$$(-1)^jG^{(0,j)}(x,t)|_{t=x_i}(j=0,1\cdots,r_i-1,i=1,\cdots,N-1)\}\qquad(5.3)$$

其中

$$\varphi_i(x)=x^{i-1}/(i-1)!,\ (i=1,\cdots,m),$$
$$\varphi_{m+i}(x)=\frac{1}{(m-1)!}\int(x-t)^{m-1}\varphi_i(t)dt,\ (i=1,\cdots,m),\qquad(5.4)$$

$$G(x\,t)=\left\{\frac{1}{((m-1)!)^2}\int_t^x\frac{(x-\tau)^{m-1}(\tau-t)^{m-1}}{p(\tau)}\,d\tau\right\}(x-t)_+^0,$$

(2) 当$p(x)$为以$x_i(i=1,\cdots,N-1)$为第一类间断点的分片连续函数时，$Sp(L,\pi,r)\subset C^{m-1}(a,b)$；而当$p(x)\in C[a,b]$时，$Sp(L,\pi,r)\subset C^m(a,b)$。

证明：只须注意

$$L\varphi_i(x)\equiv 0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

且$G(x,t)$为算子L的格林函数，即$G(x,t)$作为x的函数满足

$$LG(x,t)=\delta(x-t)$$

于是

$$L(-1)^j G^{(0,j)}(x,t)\big|_{t=x_i}=\delta^{(j)}(x-x_i)$$

由此可见，函数系(5.3)—(5.4)属于$Sp(L,\pi,r)$，反之$Sp(L,\pi,r)$中每一函数均可由函数系(5.3)—(5.4)线性表示，也不难证明，因此结论(1)为真，至于结论(2)，由$G(x,t)$的表达式也是显然的。定理证完。

进一步指出，如果作变数替换，令$(\tau-t)=\xi(x-t)$，则$(x-\tau)=(1-\xi)(x-t)$，于是(5.4)中$G(x,t)$可改写成

$$G(x,t)=\left(\frac{1}{((m-1)!)^2}\int_0^1\frac{\xi^{m-1}(1-\xi)^{m-1}}{p(t+\xi(x-t))}d\xi\right)(x-t)_+^{2m-1}\qquad(5.5)$$

当$p(x)=1$时，$G(x,t)=(x-t)_+^{2m-1}/(2m-1)!$。如果在(5.5)中不限定$m$为正整数，由此可引导我们去研究分数幂的样条函数。

推广的插值理论，可平行得到，不再详述。

参考文献

〔1〕Schultz M.H., and R.S. Varga, L—Splines Numer. Math., 10,345—369(1967)

〔2〕Schultz M.H., Elliptic Spline Function and The Rayleigh—Ritz—Galerkin Method, Math. of Comp., vol. 24, No. 109 (1970).

〔3〕李岳生,δ函数的逼近与应用(Ⅰ),吉林大学学报(自然科学版)1—2期,116—135 (1975).

〔4〕Schultz M.H., Spline Analysis,(1973).

〔5〕Ahlberg, J.H., E.N. Nilson, and J.L.Walsh, The Theory of Spline and Their Applications, (AP),(1967).

〔6〕Birkhoff G.,M.H. Schultz, and R.S. Varga, Piecewise Hermite Interpolation in One and Two Variables with Applications to Partial Differential Equations, Numer. Math., 11, 232—256 (1968).

〔7〕Birkhoff G., and A. Priver, Hermite Interpolation Errors for Derivatives, J. Math. amd Physics, 46, 440—447 (1967).

〔8〕Наймарк М.А., Линейные Дифференциальные Операторы, Гостехиздат, (1954).