一个新的非标准Hilbert空间(Ⅰ)

王 进 儒
(广东化工学院)

前 言

量子力学中一些基本假设与命题，需要给以严格的数学分析。自从J.Von Neumann在三十年代把Hilbert空间及其算子谱论引入量子力学以来，在这方面取得了很大进展，但是在许多方面依然不能令人满意。例如Dirac假定量子系统的某个观察量A，有相应于"连续"谱的本征元x_λ，满足方程

$$Ax=\lambda x_\lambda \tag{1}$$

及它们的正交归一方程[1]

$$\langle x_\lambda, x_{\lambda'}\rangle=\delta(\lambda-\lambda') \tag{2}$$

首先在Hilbert空间H中，若方程(1)成立，则λ应属于"分立"谱而不属于连续谱；其次，方程(2)包含所谓Dirac δ-函数，它不是通常意义下的函数。因此，对方程(1)和(2)给以严格的数学分析是有极大困难的。Farrukh在〔2〕的引言中提到许多著作对Dirac的其他假定都有进展，但对上述方程(2)仍未能解决。Farrukh利用Robinsion在〔3〕中的可分Hilbert空间H的非标准扩张$^*H$和转移定理，从标准空间H中的任意近似解(ε是任意小标准正数)

$$\|f\|=1,\ \|Af-\lambda f\|<\varepsilon$$

转移到非标准空间$^*H$的无限近似解

$$\|f\|=1,\ \|Af-\lambda f\|\simeq 0$$

并把f叫做相应于连续谱点λ的超本征元。而且得出本征元的正交归一方程为

$$\lambda,\lambda'\in{}^0\sigma(A)\Longrightarrow st<f_\lambda,f_{\lambda'}>=\delta_\lambda^{\lambda'}.$$

但是Farrukh在H为可分空间的条件下得出的相应于连续谱的本征元的范数为1，而方程(2)要求的本征元的范数为无穷大，因此，Farrukh也没有解决方程(2)的

---

* 本文1977年12月21日收到。

数学困难。所以在数学上严格地证明方程(2)的成立是一个比较困难的数学问题，目前尚未见到能够解决这一问题的文献。

方程(1)和(2)的解，已超出 Hilbert 空间 H 的范围。本文用叙列和超滤集的方法，把 Hilbert 空间H及H中的自伴算子A自然扩张成非标准 Hilbert 空间 $^*H$ 及$^*H$中的非标准自伴算子$^*A$，这种扩张是非常具体的，目前未发现国内外有人这样做过。本文的做法不需要限制空间 H 是可分的，只应用通常泛函分析自伴算子谱分解知识，就可以得出连续谱的非标准本征元，并且严格地证明了这些非标准本征元满足正交归一方程(2)，从而为量子力学在"连续"谱的本征元方面，建立了在非标准分析意义下的严格的数学基础。

§1 非标准实数系*R和非标准复数系*C

1.非标准实数系*R[4]

设N是全体自然数所组成的集。设 N 的一个子集类 F，满足下列5个性质：

1） 若 $S\subset N$ 且 $N-S$ 有限，则$S\epsilon F$；

2） $N\epsilon F$，空集 $\phi\bar{\epsilon}F$；

3） 若 S_1，$S_2\epsilon F$，则 $S_1\cap S_2\epsilon F$；

4） 若 $S\epsilon F$ 且 $S\subset T\subset N$，则 $T\epsilon F$；

5） 若 $S\subset N$，则 $S\epsilon F$ 或 $N-S\epsilon F$.

F 叫做自由超滤集。

设R^N是一切实数叙列$\{a_n\}$所成的集。

$\{a_n\}$，$\{b_n\}\epsilon R^N$，定义

$$\{a_n\}=\{b_n\}\rightleftharpoons\{n\epsilon N\,|\,a_n=b_n\}\epsilon F.$$

按上面相等的定义，把 R^N 中所有相等的实数叙列归成等价类。令$^*R$表示一切等价类所成的集，并且把$^*R$中包含实数叙列$\{a_n\}$的等价类记作$[a_n]$。显然

$$[a_n]=[b_n]\rightleftharpoons\{n\epsilon N\,|\,a_n=b_n\}\epsilon F. \qquad (3)$$

为了以后应用，把$^*R$中的加法、乘法及序关系列出如下：

设$a=[a_n]$，$b=[b_n]\epsilon{}^*R$，令

$$1)\quad a+b=[a_n+b_n], \qquad (4)$$

$$2)\quad ab=[a_nb_n], \qquad (5)$$

$$3)\quad a<b\rightleftharpoons\{n\epsilon N\,|\,a_n<b_n\}\epsilon F \qquad (6)$$

由超滤集F的性质容易推知

$$a<b,\qquad a=b,\qquad a>b \qquad (7)$$

三式中有一式且仅有一式成立。

$a\epsilon{}^*R$的绝对值$|a|$的定义如下：

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当}a\geqslant 0\text{，}\\ -a, & \text{当}a<0\text{。}\end{cases}$$

对实数系 R 中每一个实数r，令

$$r=[r]=[r,r,\cdots,r,\cdots]\epsilon{}^*R$$

用这办法可以把实数系R嵌入到非标准实数系$^*R$中，也就是说，R是$^*R$的真子集。

令

$\boldsymbol{M}_0=\{a\epsilon{}^*\boldsymbol{R}\mid$存在$r\epsilon\boldsymbol{R}$使$|a|<r\}\boldsymbol{M}_0$，叫做$^*R$中一切有限数组成的集。

$\boldsymbol{M}_1=\{a\epsilon{}^*R\mid$对一切正数$r\epsilon\boldsymbol{R}$都有$|a|<r\}\boldsymbol{M}_1$，叫做$^*R$中一切无穷小数组成的集。

$^*R_{\infty}={}^*R-\boldsymbol{M}_0$是$^*R$中一切无穷大数组成的集。

容易验证：$\alpha=\left[\frac{1}{n}\right]$是一个无穷小，而$\frac{1}{\alpha}=[n]$是一个无穷大。即$\alpha\epsilon M_1$，$\frac{1}{\alpha}\epsilon{}^*R_{\infty}$。

若 a，$b\epsilon{}^*R$ 且 $a-b\epsilon M_1$，则称a无限接近于b，记作

$$a-b\simeq 0 \quad \text{或} \quad a\simeq b\ . \tag{8}$$

2．非标准复数系$^*C$

为了以后应用，我们把非标准实数系$^*R$扩大到非标准复数系$^*C$.

对任意的 $a=[a_n]$，$b=[b_n]\epsilon{}^*R$，令

$$c=a+ib=[a_n]+i[b_n]=[a_n+ib_n]=[c_n], \tag{9}$$

其中$i=\sqrt{-1}$，$c_n=a_n+ib\ (n=1,2,\cdots)$是通常的复数。$c=[c_n]$叫做非标准复数。令$^*C$表示一切非标准复数组成的集。

$^*C$中的加法、乘法、相等等概念如下：

设 $c=[c_n]$，$d=[d_n]\ \epsilon{}^*C$，令

$$1^\circ \quad c+d=[c_n+d_n], \tag{10}$$

其中c_n+d_n是通常两个复数的和，而$c+d$叫做非标准复数c与d的和。

$$2^\circ \quad cd=[c_nd_n], \tag{11}$$

其中c_nd_n是通常两个复数的乘积，而cd叫做非标准复数c与d的乘积。

$$3^\circ \quad c=d \Longleftrightarrow \{n\epsilon N\mid c_n=d_n\}\epsilon F \tag{12}$$

这和非标准实数$^*R$通过超滤集定义相等完全类似。

$$4^\circ \quad \bar{c}=[\bar{c}_n] \tag{13}$$

其中$\bar{c}_n$是通常复数c_n的共轭复数，而$\bar{c}$叫做非标准复数c的共轭非标准复数。

$$5^\circ \quad |c|=[|c_n|] \tag{14}$$

其中$|c_n|=|a_n+ib_n|$是通常复数 c_n的模数(绝对值)，$|c|$叫做c的非标准模数。

§2　非标准Hilbert空间$^*H$

设H是复 Hilbert 空间，我们考虑H中一切叙列$\{x_n\}$，$x_n\in H(n=1,2,\cdots)$组成的集H^N。

定义2.1 若$\{x_n\}$，$\{y_n\}\in H^N$，则

$$\{x_n\}=\{y_n\}\rightleftarrows\{n\in N\mid x_n=y_n\}\in F$$

把H^N中相等的叙列归成等价类。令$^*H$表示一切等价类所成的集。并且把$^*H$中包含叙列$\{x_n\}$的等价类记作$[x_n]$。

显然

$$[x_n]=[y_n]\rightleftarrows\{n\in N\mid x_n=y_n\}\in F \tag{15}$$

定义2.2 设$[x_n]$，$[y_n]\in{}^*H$，$\alpha=[\alpha_n]\in{}^*C$，令

1°　　$x+y=[x_n+y_n]$　　(16)

2°　　$\alpha x=[\alpha_n x_n]$　　(17)

3°　　$\langle x,y\rangle=[(x_n,\ y_n)]$　　(18)

其中(x_n,y_n)是H中x_n与y_n的内积，而$\langle x,y\rangle$叫做$^*H$中x与y的非标准内积，显然$\langle x,y\rangle\in{}^*C$。

定理1 由定义2.2确定的非标准内积满足：

1)　　$\langle\alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$；

2)　　$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$；

3)　　$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$；

4)　　$\langle x,x\rangle\geqslant 0$，$\langle x,x\rangle=0\rightleftarrows x=0$.

证：这里我们将只证明1)，因为其他的证明都是类似的。

由(17)，(18)和(11)得

$$\langle\alpha x,y\rangle=[(\alpha_n x_n,y_n)]=[\alpha_n(x_n,y_n)]=\alpha\langle x,y\rangle.$$

定义2.3 对每一$x\in{}^*H$，令

$$\|x\|=[\ \|x_n\|\ ], \tag{19}$$

其中$\|x_n\|$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$是空间H中x_n的范数，$\|x\|$叫做$^*H$中x的非标准范数，是$^*R$中一个非负数。

定理2 若x，$y\in{}^*H$，$\alpha\in{}^*C$，则由(19)式定义的非标准范数满足：

1)　　$\|x\|\geqslant 0$ 且 $\|x\|=0\rightleftarrows x=0$；

2)　　$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；

3)　　$\|\alpha x\|=|\alpha|\ \|x\|$；

4)　　$\|x\|^2=\langle x,x\rangle$.

证：这里只证明1)和4)，其余类似。

1)　由$^*R$中大小的定义和相等的定义容易看出：

因　$\|x_n\| \geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，从而

$$\|x\| = [\,\|x_n\|\,] \geqslant 0\,;$$

及

$$\|x\| = 0 \rightleftharpoons \{\, n\in N \mid \|x_n\| = 0 \,\} \in F$$
$$\rightleftharpoons \{\, n\in N \mid x_n = 0 \,\} \in F$$
$$\rightleftharpoons x = 0。$$

4）由(19)，(5)和H中内积与范数关系得

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|x\|\,\|x\| \\ &= [\,\|x_n\|\,\|x_n\|\,] \\ &= [\,(x_n, x_n)\,] \\ &= \langle x,\ x\rangle\ .\end{aligned}$$

有了非标准范数，我们再引进距离

定义2.4　对任意x，$y\in {}^*H$，令

$$d(x,y) = \|x-y\|, \tag{20}$$

叫做x到y的距离。

容易验证，由定义2.4引进的距离在形式上满足距离的条件[6]。

在$^*H$中按照上面引进了非标准内积与非标准范数等后所成的空间$^*H$，叫做非标准Hilbert空间$^*H$。

对每一个 $x\in H$，令

$$x = [x, x,\ \cdots,\ x,\ \cdots] = [x]\in {}^*H,$$

用这种办法把H嵌入到$^*H$中，因此，非标准空间$^*H$是空间H的扩张空间，也就是说，空间H是空间$^*H$中的一个真子空间。

定理 3　对任意的x，$y\in {}^*H$，

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|. \tag{21}$$

证：由(18)，(14)和(19)及$^*R$中序的定义得

$$\begin{aligned}|\langle x,y\rangle| &= [\,|(x_n, y_n)|\,] \\ &\leqslant [\,\|x_n\|\,\|y_n\|\,] = \|x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$

§3　连续谱本征元正交归一方程的证明

设A是复Hilbert空间H中的稠定自伴算子（$D(A)\subset H$，$\overline{D(A)} = H$）。对每一个$x=[x_n]$，$x_n\in D(A)$，$n=1,2,\cdots$，令

$$^*Ax = [Ax_n]\in {}^*H, \tag{22}$$

算子$^*A$叫做从$^*D(A) = \{\, x=[x_n] \mid x_n\in D(A),\ n=1,2,\cdots \,\}$到$^*H$的非标准自伴算子

特别当$x=[x]\in D(A)$时，

$$^*Ax=[Ax]=Ax\in H$$

即$^*A$是A的扩张算子。

定理 4 若$x,y\in {}^*D(A)$，则

$$\langle {}^*Ax,y\rangle=\langle x,{}^*Ay\rangle. \tag{23}$$

证：由(22)及A的自伴性得

$$\begin{aligned}\langle {}^*Ax,y\rangle&=[(Ax_n,y_n)]\\&=[(x_n,Ay_n)]\\&=\langle x,{}^*Ay\rangle.\end{aligned}$$

关于"连续"谱的本征矢x_λ，李炳仁在[1]中曾指出，$x_\lambda\bar{\in}H$。A.voros在[8]中也指出，因为x_λ应具有无穷大范数，所以$x_\lambda\bar{\in}H$。现在，本文按1926年Dirac引进的所谓δ—函数[7]：

$$\delta(x'-x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x'\neq x\\ \infty, & \text{当 } x'=x\end{cases}$$

来理解本征元的正交归一方程(2)，在非标准分析意义下，得出的结果如下：

定理 5 若$\lambda\in\sigma_c(A)$，即λ（标准数）是自伴算子A的连续谱点，则有$x_\lambda\in{}^*H$，使

$$\|x_\lambda\|=+\infty \tag{24}$$

且

$$^*Ax_\lambda\simeq\lambda x_\lambda \tag{25}$$

证：设$\{E(\lambda)\}$是A的谱族[6]，取

$$\lambda_{1n}<\lambda<\lambda_{2n}$$

使

$$\lambda_{2n}-\lambda_{1n}<\frac{1}{n^2},\ (n=1,2,\cdots).$$

取

$$x_n\in\Big(E(\lambda_{2n})-E(\lambda_{1n})\Big)H$$

且

$$\|x_n\|=n,\ (n=1,2,\cdots) \tag{26}$$

则

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda I)x_n\|^2&=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu-\lambda)^2d\|E(\mu)x_n\|^2\\&\leqslant(\lambda_{2n}-\lambda_{1n})^2\|x_n\|^2,\end{aligned}$$

从而

$$\|(A-\lambda I)x_n\|\leqslant(\lambda_{2n}-\lambda_{1n})\|x_n\|<\frac{1}{n^2}\cdot n=\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots).$$

令

$$x_\lambda=[x_n]\in{}^*H,$$

则

$$\|x\|=[\|x_n\|]=[n]=+\infty,$$

$$\|{}^*Ax-\lambda x_\lambda\|=[\|Ax_n-\lambda x_n\|]<\left[\frac{1}{n}\right]\in M_1$$

从而

$$\|{}^*Ax_\lambda-\lambda x_\lambda\|\simeq 0$$

或

$${}^*Ax_\lambda\simeq\lambda x_\lambda\ .$$

满足关系式(25)的x_λ叫做相应于连续谱点λ的非标准本征元。

定理6　若$\lambda,\lambda'\in\sigma_c(A)$且$\lambda\neq\lambda'$则由定理5确定的相应于$\lambda$与$\lambda'$的非标准本征元$x_\lambda$与$x_\lambda'$满足

$$<x_\lambda, x_\lambda'>=0 \tag{27}$$

证：设$x_\lambda=[x_n]$，$x_\lambda'=[x'_n]$都是由定理5的做法确定，其中

$$\lambda_{1n}<\lambda<\lambda_{2n}\ 且\ \lambda_{2n}-\lambda_{1n}<\frac{1}{n^2}\ (n=1,2,\cdots)$$

$$\lambda'_{1n}<\lambda'<\lambda'_{2n}\ 且\ \lambda'_{2n}-\lambda'_{1n}<\frac{1}{n^2}\ (n=1,2,\cdots)$$

因为$\lambda\neq\lambda'$.所以$|\lambda-\lambda'|=r$是一个正的标准数，当n足够大时，$\frac{2}{n^2}<r$，从而

$$\Delta_n=(\lambda_{1n},\lambda_{2n}]与\Delta'_n=(\lambda'_{1n},\lambda'_{2n}]$$

不相交，$E(\Delta_n)$与$E(\Delta'_n)$相互直交，由此得

$$(x_n,x'_n)=(E(\Delta_n)x_n,E(\Delta'_n)x'_n)=0\ .$$

由(18)式得

$$<x_\lambda,x_\lambda'>=[(x_n,x'_n)]$$

但由上面结果推知

$$\{n\in N\,|(x_n,x'_n)=0\}\in F.$$

从而

$$<x_\lambda,x_\lambda'>=0\ .$$

註：因为我們想得到非标准范数为无穷大的非标准本征元x_λ，而在(26)式中控制$x_n(n=1,2,\cdots)$的范数为$\|x_n\|=n$。如果我們想得到非标准范数为1的非标准本征元x_λ，只須在(26)式中用$\|x_n\|=1$代替$\|x_n\|=n$。若x_λ是相应于λ的非标准本征元，$a\in M_0$，则ax_λ也是相应于λ的非标准本征元。

当$\lambda=\lambda'$时，取$x_\lambda=x_\lambda'$，由(24)式得

$$<x_\lambda,x_\lambda'>=\|x_\lambda\|^2=+\infty. \tag{28}$$

综合(25)，(27)与(28)三式，我们就得到*Dirac*假定的关于“连续”谱本征元的两个方程在非标准分析意义下的严格证明：

若$\lambda,\lambda'\in\sigma_c(A)$，则存在相应于$\lambda$与$\lambda'$的非标准本征元$x_\lambda$与$x_\lambda'$满足

$$^*Ax\simeq\lambda x_\lambda$$

$$<x_\lambda,x_\lambda'>=\delta(\lambda-\lambda')=\begin{cases}0, & 当\ \lambda\neq\lambda'\\ +\infty, & 当\ \lambda=\lambda'.\end{cases}$$

参 考 文 献

〔1〕李炳仁，量子力学中的若干数学問題，計算机应用与应用数学，7(1977)，33—55。

〔2〕Farrukh M.O., Application of Nonstandard Analysis to Quantum Mechanics, 16(1975), 177—200.

〔3〕A. Robinson, Nonstandard Analysis, 1974.

〔4〕D. H. Van. Osdol, 按超濾集談眞假——如何使直观思維严格化, Amer. Math. Monthly, 79(1972), 355——363.〔吳望名譯，非标准分析，数学研究所資料室，1976，115—128.〕

〔5〕Luxemburg W.A.J., What is Nonstandard Analysis, Amer. Math. Monthly, 80(1973), 38—67.

〔6〕关肇直，泛函分析講义，高等教育出版社，1958。

〔7〕Л.伊凡宁柯，A.索科洛夫，經典場论，科学出版社，1958。

〔8〕A.Voros, Introduction to Nonstandard Analysis, J.Math. Phys., Vol. 14, 2, (1973) 292—296.