非亚贝尔规范场的类粒子解

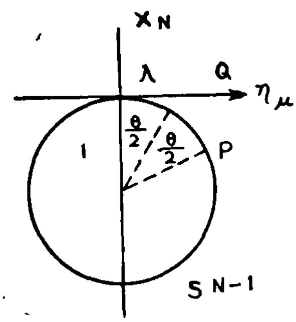
李华钟　　　　冼鼎昌　　　　郭硕鸿
（中山大学物理系）（科学院高能所）（中山大学物理系）

1、我们在前面的工作[1][2][3]中，指出了一种求非亚贝尔规范场某些特定类型解的方法。本文指出此方法可以得到非亚贝尔规范场的类粒子解。我们的讨论是把此方法推广到 N 维空间具有 O_N 对称的非亚贝尔规范场，然后讨论 O_N 对称的亚贝尔规范场的类粒子解。

研究非线性场的类粒子解，是近年来基本粒子理论研究的方向之一[4]，它用于研究具有强相互作用粒子的结构。在这类研究中，先求出场的经典解，这些解具有有限的能量集中于空间一定区域，在运动和相互作用过程中保持这些性质，然后对经典解再加以量子修正。经典解是非微扰论的，一般设想用它来描述有结构、在空间中有一定广延的粒子。

2、文[1]、[2]、[3]中所用的方法，很容易推广到规范群为 O_N 的情况中去。现在我们来讨论一个 N 维欧氏空间 E^N，定域规范群 O_N，求其球对称的无源规范场（或磁单极场）。

考虑 E^N 中的一个$N-1$维球面 S^{N-1}。我们采用测地投影坐标 η_μ（在本文中希腊文附标取值1，…，$N-1$)，它们是半径为1的球面 S^{N-1}上的点P的测地投影点Q的坐标（图）。E^N中的直坐标X_a（在本文中拉丁文小写附标取值1，…，N）和 η_μ 的关系为：



（图）

$$X_\mu = \frac{2r\eta_\mu}{1+\lambda^2}\ , \quad X_N = r\,\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\ , \qquad (1)$$
$$\lambda^2 = \eta_\mu\eta^\mu\ , \qquad r^2 = X_a X^a\ ;$$

或者

本文1976年9月收到。

$$\eta_\mu=\frac{X_\mu}{r+X_N}\ ,\ X_N=r\cos\theta. \qquad (2)$$

用投影坐标为变量，球面上的度规$g_{\mu\nu}$为

$$g_{\mu\nu}=\frac{4r^2}{(1+\lambda^2)}\delta_{\mu\nu}\ 。 \qquad (3)$$

由下式计算出球面上的自 然 联 络$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$：

$$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}=\frac{1}{2}g^{\rho\tau}\left(\frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial\eta_\mu}+\frac{\partial g_{\tau\mu}}{\partial X_\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\eta_\tau}\right), \qquad (4)$$

$$=-\frac{2}{1+\lambda^2}\left(\eta_\mu\delta^\rho_\nu+\eta_\nu\delta^\rho_\nu-\eta^\rho\delta_{\mu\nu}\right)\ 。$$

现在引入球面上的正交归一标架 向 量$\overset{A}{e_\mu}$ 及 其 逆$\overset{\nu}{e_B}$（在本文中拉丁文大写附标为标架指标，取值1，…，$N-1$），其定义为

$$g_{\mu\nu}=\overset{A}{e_\mu}\ \overset{B}{e_\nu}\delta_{AB},$$

$$\overset{A}{e_\mu}\ \overset{B}{e_\mu}=\delta_{AB}\ 。 \qquad (5)$$

由(3)及(5)，有

$$\overset{A}{e_\mu}=\frac{2r}{1+\lambda^2}\overset{A}{\delta_\mu}\ ,\ \overset{\nu}{e_B}=\frac{1+\lambda^2}{2r}\overset{\nu}{\delta_B}\ 。 \qquad (6)$$

将自然联络投影在此标架上，得联络在标架上的投影$\overset{A}{\Gamma_B}$ ：

$$\overset{A}{\Gamma_{\mu B}}=\overset{A}{e_\rho}\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}\overset{\nu}{e_B}+\overset{A}{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\eta^\mu}\overset{\rho}{e_B}$$

$$=\frac{2}{1+\lambda^2}\left(\eta_A\delta_{\mu B}-\eta_B\delta_{\mu A}\right)=\frac{2\eta_\nu}{1+\lambda^2}\overset{A}{(X_{\mu\nu})_B}\ , \qquad (7)$$

其中 $X_{\mu\nu}$ 是 O_{N-1}群的生成元，其元素$\overset{A}{(X_{\mu\nu})_B}$ 为：

$$\overset{A}{(X_{\mu\nu})_B}=\delta_{\mu B}\delta_{\nu A}-\delta_{\mu A}\delta_{\nu B}\ , \qquad (8)$$

把测地投影坐标换回直坐标X_a，注意到在坐标变换时有相应 的 标 架 转 动（O_N转动）[3]，这时联络经受如下的变换：

$$\overset{A}{\Gamma_{\mu B}}\to\overset{a}{\Gamma_{cb}}(X)=\frac{\partial\eta^\mu}{\partial X^c}\overset{a}{S_A}\overset{A}{\Gamma_{\mu B}}\overset{B}{(S^{-1})_b}+\overset{a}{S_A}\frac{\partial}{\partial X^c}\overset{A}{(S^{-1})_b}, \qquad (9)$$

其中

$$\overset{a}{S_A}=\overset{\mu}{e_A}\frac{\partial X^a}{\partial\eta^\mu}=\frac{1+\lambda^2}{2r}\frac{\partial X^a}{\partial\eta^A}\ ,$$

$$S_N^a = \frac{\partial X^a}{\partial r} = \frac{X^a}{r} , \tag{10}$$

$$(S^{-1})_b^B = e_\mu^B \frac{\partial \eta^\mu}{\partial X^b} = \frac{2r}{1+\lambda^2} \quad \frac{\partial \eta B}{\partial X^b} ,$$

$$(S^{-1})_b^N = \frac{\partial r}{\partial X^b} = \frac{X_b}{r} .$$

由式(7)、(9)和(10)得到

$$\Gamma_{cb}^a (X) = \frac{1}{r^2} (X_a \delta_{cb} - X_b \delta_{ca}) , \tag{11}$$

显然这是O_N对称的。

应用联络与规范势的对应关系[1]：

$$\Gamma_a = \frac{1}{2} g W_a^{bc} X_{bc} , \tag{12}$$

其中 X_{bc} 是 O_N 的生成元，W_a^{bc} 是规范势，g是规范场的自耦合常数，我们便可以得出作为定域规范群O_N的子群O_{N-1} 的规范势 $W_c^{ab}(X)$：

$$W_c^{ab}(X) = -\frac{1}{gr^2}(X_a \delta_{bc} - X_b \delta_{ac})。 \tag{13}$$

3、式(13)是 E^N 中具有 O_N 对称的无源规范势，这是最简单形式的解，一般来说，还容许有更复杂形式的解：

$$gW_c^{ab}(X) = -f(r)(X_a \delta_{bc} - X_b \delta_{ac}) , \tag{14}$$

函数$f(r)$由无源规范场方程来决定。现在来讨论$f(r)$的性质定义

$$F_{ab} \equiv -\frac{1}{2} F_{ab}^{cd} X_{cd} , \quad W_c \equiv -\frac{1}{2} W_c^{ab} X_{ab} , \tag{15}$$

式中F_{ab}为规范场强：

$$F_{ab} = \partial_a W_b - \partial_b W_a - g[W_a, W_b] 。 \tag{16}$$

无源规范场方程为

$$F_{ab}, {}_b - g[W_b , F_{ab}] = 0 , \tag{17}$$

把式(14)代入(16)，应用(15)，便有

$$\begin{aligned} gF_{ab}^{cd} &= \partial_c\left(gW_b^{cd} \right) - \partial_b\left(gW_a^{cd}\right) - g^2[w_a, w_b]^{cd} \\ &= (r^2 f^2 - 2f)(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}) \\ &- \left(\frac{f^1}{r} + f^2\right)(X_c X_a \delta_{bd} - X_c X_b \delta_{ad} + X_d X_b \delta_{ac} - X_a X_d \delta_{bc}). \end{aligned} \tag{18}$$

将（18）代入无源规范场方程（17），即

$$\frac{\partial}{\partial x^b} F_{ab}^{cd} - gW_b^{ce} F_{ab}^{ed} + gF_{ab}^{ce} W_b^{ed} = 0, \tag{19}$$

便得到$f(r)$的微分方程：

$$f'' + (N+1)\frac{f'}{r} + (N-2)(3f^2 - r^2 f^3) = 0, \tag{20}$$

这是一个二阶非线性微分方程。

4、考虑如下的特定形式的解：

$$f(r) = \frac{n}{\Lambda^2 + r^2}, \tag{21}$$

其中Λ^2是任意参数，n是待定的常数。由式（20）及（21），有

$$\begin{aligned}&[3(N-2)n - (N-2)(n^2+2)]r^2\\&+[3(N-2)n - 2(N+2)]\Lambda^2 = 0。\end{aligned} \tag{22}$$

令r^2及Λ^2前的系数为零，便得

$$\left\{\begin{aligned}&(N-2)(n-2)(n-1) = 0,\\&3(N-2)n - 2(N+2) = 0,\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

其解为：

（Ⅰ）当 $\Lambda^2 = 0$时，有

$$(N-2)(n-2)(n-1) = 0,$$

即如$N=2$，则n为任意值，$f(r) = \frac{n}{r^2}$， (24)

如$N \neq 2$，则$n=2$ 或 1，$f(r) = \frac{1}{r^2}$或$\frac{1}{r^2}$ 。 (25)

（Ⅱ）当$\Lambda^2 \neq 0$时，方程（23）给出如下的解：

$$N=4,\quad n=2,\quad f(r) = \frac{2}{\Lambda^2 + r^2}, \tag{26}$$

$$N=10,\quad n=1,\quad f(r) = \frac{1}{\Lambda^2 + r^2}。 \tag{27}$$

这些解相应的能量E：

$$E = \frac{1}{4N}\int F_{ab}^{cd} F_{cd}^{ab}\, d^N X \tag{28}$$

为

$$N=2,\quad f(r) = \frac{n}{r^2},\qquad E = \infty, \tag{29a}$$

$$N \neq 2,\quad f(r) = \frac{1}{r^2}\qquad E = \infty, \tag{29b}$$

$$N\neq 2,\quad f(r)=\frac{2}{r^2}\qquad E=0,\tag{29c}$$

$$N=4,\quad f(r)=\frac{2}{\Lambda^2+r^2}\quad,\ E=\frac{4\pi^2}{g^2},\tag{29d}$$

$$N=10,\quad f(r)=\frac{1}{\Lambda^2+r^2}\quad,\ E=\infty,\tag{29e}$$

由此可见，对于所讨论的这种简单形式的$f(r)$，只有$N=4$时才有有限能量的类粒子解。

5、现在来讨论我们所得到的结果。

(a) 二维情形($N=2$)下，有无穷多个解，这反映了二维场论的特殊性。这性质为其他维数时所没有的。

(b) 对于$N\neq 2, f(r)=\frac{2}{r^2}$的情况，规范场强为零。或许在考虑量子修正或对称性的自发破缺的条件下可以获得场的起伏和能量。

(c) 在$N=4$时的解

$$W_o^{ab}(x)=\frac{-2}{\Lambda^2+r^2}\left(x_a\delta_{bo}-x_b\delta_{ao}\right)\tag{30}$$

$$a,\ b,\ c=1,\ \cdots,\ 4$$

是一个值得注意的解，它是具有有限能量的类粒子解。这一性质，如果在延拓到Minkowski 空间中仍能保持的话，对于讨论强子结构将有实际的意义。

由于$O_4\approx SU_2\times SU_2$，这个解可以分解成为两个有$SU_2$对称的规范势的解：

$$W_a^{(\pm)i}=\frac{1}{2}\left(W_a^{i4}\pm\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}W_a^{jk}\right),\tag{31}$$

其能量各为

$$E=\frac{2\pi^2}{g^2}。\tag{32}$$

(d) 式(30)也就是$Polyakov$等在文[5]中所得到的解，但那里给出的式子显然是不对的，差一个因子2。在他们的推导中，要求

$$F_{ab}=\pm\ \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}F_{cd},\tag{33}$$

这就导致

$$abef\ F_{cd}^{ef}=\epsilon_{cdef}\ F_{ef}^{ab}\ ,\tag{34}$$

为使张量F_{ab}^{cd}满足此式，要求

$$\frac{f''}{r}+f^2=0。\tag{35}$$

这一论证是不完全的，不能得到全部无源球对称解，这是因为（33）及（34）都不是无源规范场的充要条件。例如式（25）中$N=0$，$n=1$的解就不满足（33）。本文采取的式（16）或（19）则是充要的。

谷超豪和杨振宁[6]曾证明一个非亚贝尔规范场为无源的充要条件的等价形式为

$$[W_a - W_a^{*} F_{bc}] = 0, \tag{36}$$

其中 * 号表示对偶。式（33）或（34）只是（36）的一种特殊情况，即$W_a - W_a^{*} =$ 常数 $\cdot I$，显然还有不满足（33）－（35），但满足（16）或（19）（或即(36)）的无源规范场。

(e)我们将在另一文中讨论一般情况下$f(r)$的解。在三维情况下，如令$f(r) = -F(r)/r$，则$F(r)$的形式曾被讨论过[7]，也就是文[1]中所导出的解和 $t'Hooft$[8] 所得到过的解。

参 考 资 料

〔1〕 李华钟、冼鼎昌、郭硕鸿，中山大学学报（自然科学版），1975,3。

〔2〕 李华钟、冼鼎昌、郭硕鸿，非亚貝尔规范群中的磁單极（Ⅰ），中山大学学报（自然科学版），1977,1。

〔3〕 李华钟、冼鼎昌、郭硕鸿，非亚貝尔规范群中的磁單极（Ⅱ），中山大学学报）自然科学版），1977,1。

〔4〕 例如参看R.Rojaraman, Phys. Rep't 21C(1975)。

〔5〕 A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A.S. Schwarz, Yu. S. Tyukin, Phys. Letts, 59B, 85（1975）。

〔6〕 谷超豪、楊振宁，中国科学，1975,5。

〔7〕 T. T. Wu, C. N. Yang, 在"Properties of Matter Under Unsual Conditions" ed H. Mark, S. Fernbach(Interscience, N. Y. 1969)p. 349, 参看eq（6）。

〔8〕 G. 'tHooft, Nucl. Phys, 79B,276(1974)。