

# 关于一种Yang-Mills场的类粒子解

吴咏时

(中国科学院物理所)

李华钟

(中山大学物理系)

沈鼎昌

(中国科学院高能所)

郭硕鸿

(中山大学物理系)

1、在最近的工作中<sup>(1)</sup>，应用球面上的联络和规范对应的方法，证明了存在有 $O_3$ 对称的 $SU_2$ 磁单极。用同一方法可以导出四维欧氏空间 $SU_2$ 对称Yang-Mills场的类粒子解<sup>(2)</sup>，并指出只有在四维的情况下才有如文<sup>(3)</sup>所得形式的类粒子解(以下将文<sup>(3)</sup>的解简记为BPST解)。最近Jackiw和Rebbi<sup>(4)</sup>指出BPTST解实际上有 $O_3$ 对称性。这个结论，其实已经包含在文<sup>(1)</sup>、<sup>(2)</sup>中。

鉴于BPST解可能有效重要的应用，因此在这篇短文中对这个解作较系统的讨论。

2、首先指出，用球面上联络对应的方法，容易系统地导出BPST解。

考虑 $E^4$ 空间中的一个 $S^3$ 球面，引入这个球面的测地投影坐标 $\eta_i$  ( $i=1,2,3$ )，它们和直坐标 $x_\mu$  (本文中希腊文附标取值1, 2, 3, 4)的关系为：

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{2r\eta_i}{1+\lambda^2}, & x_4 &= r \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \\ \lambda^2 &= \eta_i \eta^i, & r^2 &= x_\mu x^\mu. \end{aligned} \quad (1)$$

应用此投影坐标，按照文<sup>(1)</sup>、<sup>(2)</sup>的计算，得到在 $S^3$ 球面上的自然联络 $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ ik \end{smallmatrix} \right\}$ 为

$$\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ ik \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{2}{1+\lambda^2} (\delta_i^j \eta_k + \delta_k^j \eta_i - \delta_{ik} \eta^j) \quad (2)$$

然后把它投影到正交归一标架上，正交归一标架向量 $e_i^J$ 及其逆 $e_J^i$  ( $I, J$ 为标架指标，取值1, 2, 3,)为

$$\begin{aligned} e_i^J &= \frac{2}{1+\lambda^2} \delta_i^J, \\ e_J^i &= \frac{1+\lambda^2}{2} \delta_J^i, \end{aligned} \quad (3)$$

本文1976年9月收到。

得联络在标架上的投影  $\Gamma_{ik}^j$  :

$$\Gamma_{ik}^j(\eta) = e_j^j \left\{ \begin{matrix} j \\ ik \end{matrix} \right\} e_k^k + e_j^j \frac{\partial}{\partial \eta^i} e_k^j = \frac{2}{1+\lambda^2} (\eta^j \delta_{ik} - \eta_k \delta_i^j) \quad (4)$$

为了明显地看出  $\Gamma_{ik}^j(\eta)$  的  $O_4$  对称性质, 我们把投影坐标  $\eta_i$  换回  $E^4$  中的直坐标  $x_\nu$ , 注意到在作坐标变换时相应地有一规范变换 ( $O_4$  转动)<sup>(1)</sup>、<sup>(2)</sup>  $S$ , 在坐标—规范联合变换下联络经受如下的变换

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^j(\eta) \rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) &= \frac{\partial \eta^i}{\partial x^\mu} S_R^\rho \Gamma_{iN}^R(\eta) (S^{-1})_v^N \\ &\quad + S_R^\rho \frac{\partial}{\partial x^\mu} (S^{-1})_v^R, \end{aligned} \quad (5)$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$\mu, \rho, \nu, R, N = 1, \dots, 4$$

其中

$$S_R^\rho = e_R^\rho \frac{\partial x^\rho}{\partial \eta^R} = \frac{1+\lambda^2}{2r} \frac{\partial x^\rho}{\partial \eta^R}, \quad (\text{当 } R=1, 2, 3)$$

$$S_4^\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial r} = \frac{x^\rho}{r}, \quad (6)$$

$$(S^{-1})_\rho^R = \frac{\partial \eta^R}{\partial x^\rho} e_\rho^R = \frac{2r}{1+\lambda^2} \frac{\partial \eta^R}{\partial x^\rho}, \quad (\text{当 } R=1, 2, 3, )$$

$$(S^{-1})_\rho^4 = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x_\rho}{r}.$$

由式(3)—(6)得到

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) = \frac{1}{r^2} (x^\rho \delta_{\mu\nu} - x_\nu \delta_\mu^\rho). \quad (7)$$

式(7)可以排成短阵的形式,  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  为矩阵  $\Gamma_\mu$  的  $\rho$  行  $\nu$  列元素, 则(7)式可写成

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{r^2} x^\lambda X_{\mu\lambda}, \quad (8)$$

其中  $X_{\mu\lambda}$  是  $O_4$  群的生成元,

显然式(8)具有  $O_4$  对称性. 由联络与规范势的对应关系<sup>(1)</sup>, 可得  $O_4$  对称的规范势力为

$$gW_\mu^{\rho\nu}(x) = \frac{1}{r^2} (-x^\rho \delta_\mu^\nu + x^\nu \delta_\mu^\rho), \quad (9)$$

式(9)是具有  $O_4$  对称的无源规范场方程的一个特解. 现在让我们来把这个解的

形式推广一下。由于球对称，我们可以把式(8)右方的因子 $\frac{1}{r^2}$ 换成 $f(r)$ ：

$$gW_{\mu}^{\nu}(x) = f(r)(-x^{\nu}\delta_{\mu}^{\nu} + x^{\nu}\delta_{\mu}^{\rho}) \quad , \quad (10)$$

函数 $f(r)$ 应于由无源规范场的运动方程来决定。由 $O_4$ 的无源规范场运动方程可以导出，在四维的情况下(而且仅在四维的情况下)，有如下形式的解<sup>(2)</sup>：

$$f(r) = \frac{2}{1+r^2} \quad , \quad (11)$$

亦即此时的规范势为

$$W_{\mu}^{\nu} = \frac{2}{g(1+r^2)}(-x^{\nu}\delta_{\mu}^{\nu} + x^{\nu}\delta_{\mu}^{\rho}) \quad , \quad (12)$$

这就是BPST解，显然它是对 $O_4$ 空间群， $O_4$ 定域规范群有同步的对称性的。

3、BPST解是否还有更高的对称性？答案已包含在文<sup>(1)</sup>、<sup>(2)</sup>中，另外又Jackiw及Rebbi<sup>(4)</sup>所发现。下面来说明这个问题。

如果我们考虑的是五维欧氏空间 $E^5$ 中的四维球面 $S^4$ ，则用 $S^4$ 上的测地投影坐标 $\eta_a$ ， $S^4$ 的联络在正交归一标架上投影 $\Gamma_{\mu B}^A$ <sup>(2)</sup>为：

$$\Gamma_{\mu B}^A(\eta) = \frac{2}{1+\lambda^2}(\eta^A\delta_{\mu B} - \eta_B\delta_{\mu}^A) \quad (13)$$

$$\eta, A, B, = 1, \dots, 4$$

$$\lambda^2 = \eta_a\eta^a$$

其中 $A, B$ 为标架指标。我们知道，式(13)是具有 $O_5$ 对称性的，因为当地把变量从 $\eta_a$ 换到 $E^5$ 中的直角坐标 $x_c$ 时联络变成<sup>(2)</sup>：

$$\Gamma_{cb}^a(x) = \frac{1}{r^2}(x^a\delta_{bc} - x_b\delta_c^a) \quad (14)$$

$$(a, b, c = 1, \dots, 5)$$

式(14)具有明显的 $O_5$ 对称性。注意到式(13)所对应的规范势与式(12)一样，这就证明BPST解也具有 $O_5$ 空间群及 $O_5$ 定域规范群的同步对称性。在这里我们再一次强调形式如(11)的解只有在 $E^4$ 情况下才会出现<sup>(2)</sup>，对于其他维数 $N$ ，(11)不是有 $O_N$ 对称的规范场方程的解。四维欧氏空间是一个例外。

4、BPST解可以写成另一种形式<sup>(3)</sup>：

$$W_{\mu} = \frac{r^2}{1+r^2}g^{-1}\partial_{\mu}g \quad ,$$

$$g = \frac{x_4 - i\vec{x} \cdot \vec{\sigma}}{r} \quad , \quad (15)$$

或者如Jackiw及Rebbi [4] 写成为

$$W_{\mu} = \frac{-2i}{1+r^2} \Sigma^{\mu\nu} X_{\nu}, \quad (16)$$

其中

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4i} [\alpha^{\mu}, \alpha^{\nu}] = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \sigma^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^4 = i \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

现在证明这些式子也可由式(13)得出。

把式(13)中的变量换记为  $x_{\mu}$ , ( $\lambda^2 \rightarrow r^2 = x_{\mu} x^{\mu}$ ),  
有

$$\Gamma_{\mu}(x) = \frac{2}{1+r^2} x^{\lambda} X_{\mu\lambda}, \quad (18)$$

其中  $X_{\mu\lambda}$  为  $O_4$  群的生成元, 其元素为

$$X_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} = \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\lambda}^{\alpha} - \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\lambda}^{\beta} \quad (19)$$

引入两组  $SU_2$  群的生成元  $X_i^{(+)}, X_i^{(-)}$ :

$$X_i^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \pm X_{i4}), \quad (20)$$

$$i, j, k = 1, 2, 3$$

定义

$$\Gamma_{\mu} = \Gamma_i^{(+)\kappa} X_{\kappa}^{(+)} + \Gamma_i^{(-)\kappa} X_{\kappa}^{(-)}, \quad (21)$$

由式(18)-(21)得

$$\Gamma_i^{(\pm)\kappa} = \frac{2}{1+r^2} (\epsilon_{ijk} x^j \pm x^4 \delta_{ik}), \quad (22)$$

$$\Gamma_4^{(\pm)\kappa} = \mp \frac{2x^{\kappa}}{1+r^2}.$$

现在引入

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4i} [\sigma_i, \sigma_j] = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_k = \bar{\sigma}_{ij},$$

$$\sigma_{i4} = \frac{1}{2} \sigma_i = -\bar{\sigma}_{i4}, \quad (23)$$

这时规范势与联络的对应关系 (取  $g=1$ ) 为<sup>[1]</sup>:

$$W_{\mu}^{(\pm)} = \Gamma_{\mu}^{(\pm)\kappa} \frac{\sigma_{\kappa}}{i}, \quad (24)$$

由式(22)及(24)便可得到

$$\begin{aligned}
 W_{\mu}^{(+)} &= \frac{-2i}{1+r^2} \sigma_{\mu} X^{\nu} = \frac{r^2}{1+r^2} g^{-1} \partial_{\mu} g, \\
 W_{\mu}^{(-)} &= \frac{-2i}{1+r^2} \bar{\sigma}_{\mu} X^{\nu} = \frac{r^2}{1+r^2} g \partial_{\mu} g^{-1},
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

这就是 Jackiw—Rebbi 的形式<sup>(4)</sup>，也是BPST文<sup>(3)</sup>的另一形式。

由于规范势与  $S^4$  球面的联络的对应式为(18)，规范场强  $F_{\mu\nu}^{(\pm)}$  与 Ricci 张量应有对称关系：

$$F_{\mu\nu}^{(\pm)} = R_{\mu\nu}^{(\pm)k} \frac{\sigma_k}{i}, \tag{26}$$

其中  $R_{\mu\nu}^{(\pm)k}$  由下式所定义：

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(+k)} X_k^{(+)} + R_{\mu\nu}^{(-k)} X_k^{(-)}, \tag{27}$$

$R_{\mu\nu}$  的元素  $R_{\mu\nu}^{RN}$  是 Ricci 张量在正交归一标架上的投影。由式(26)及(27)不难得出

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}^{(+)} &= \frac{4i}{(1+r^2)^2} \sigma_{\mu\nu}, \\
 F_{\mu\nu}^{(-)} &= \frac{4i}{(1+r^2)^2} \bar{\sigma}_{\mu\nu}.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

5、由以上的讨论可知 BPST 解是四维欧氏空间特有的<sup>(2)</sup>，它具有独特的拓扑性质<sup>(3)</sup>，又具有高的对称性<sup>(1)</sup>，它对四维空间共形变换的  $O_6$  子群不变<sup>(4)</sup>，并且又与  $O_6$  对称的  $SU_2$  磁单极联系<sup>(1)</sup>，这个解值得予以详细的探讨。

### 参 考 资 料

- [1] 李华钟、洗鼎昌、郭碩鸿，非亚贝尔规范群中的磁单极  $\mathbb{Z}_2:O_6$  对称的  $SU_2$  磁单极，中山大学学报（自然科学版），1977，第1期。
- [2] 李华钟、洗鼎昌、郭碩鸿，非亚贝尔规范群中的类粒子解，中山大学学报1977 第2期。
- [3] A. A. Belavin A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Y. S. Tyukin Phys. Lett. 59B, 85(1975)。
- [4] R. Jackiw R. Rebbi, Conformal Properties of a Yang—Mills Pseudo. particelle MIT Preprint No. 537 (1976)。

附注：在参考资料[2]中，自(28)式至(32)式中的E.在文内称做“能量”，这一词都应加上一括号“”，改为“准能量”。这是在文[3]所用的名词“guasi—energy”，因为它是作用量的最小值，并不是一般的能量。