关于非亚贝尔规范群的（Ⅱ、Ⅲ）对偶荷（单磁荷）问题

李华钟
（中山大学物理系）

冼鼎昌
（科学院高能物理研究所）

郭硕鸿
（中山大学物理系）

（Ⅱ）有奇异弦的O_5对称的SU_2磁单极势

1. 我们在前一工作中[1]，应用规范场的积分表述[2]，使规范势与球面上的联络对应，导出了U_1规范场的无奇异弦的磁单极势。U_1群作为非亚貝尔规范群O_3的一个子群，所得的磁单极势具有O_3对称。在我们的讨论中无须引入$Higg^s$标量，磁单极势是定域规范对称的自然结果。

本文把文[1]的方法推广用于讨论SU_2磁单极势：考虑在空间每一点上联系一个SU_2变换，它相当于O_3转动，O_3的转动可看成在一四维球面S^4上的转动，此四维球面应存在于五维欧氏空间E^5中。所寻求的SU_2磁单极势是对于SU_2及O_5同时具有对称性。从文[1]的观点来看，这就相应于在E^5中的S^4球面上求出其联络，并使之与O_4定域规范势相对应；由于$O_4\approx O_3\times O_3$（或$SU_2\times SU_2$）因此可导出两组独立的SU_2磁单极势。

采用球坐标（$r,\theta_1,\cdots\theta_4$），半径为$r$的球面上的线元为（本文中希腊文附标取值1,2,3，4）

$$ds^2=g_{\mu\nu}d\theta^\mu d\theta^\nu$$

$$0\leq\theta_1,\theta_2,\theta_3,\leq\pi,\quad 0\leq\theta_4\leq2\pi \tag{1}$$

式中$g_{\mu\nu}$是球面上的度规：

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} r^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & r^2sin^2\theta_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & r^2sin^2\theta_1sin^2\theta_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & r^2sin^2\theta_1sin^2\theta_2sin^2\theta_3 \end{pmatrix}。$$

球面上的自然联络$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$可按下式由度规计算得出：

本文1976年10月8日收到。

$$\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial\theta^{\mu}}+\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial\theta^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\theta^{\sigma}}\right),\tag{3}$$

计算的结果是：

$$\left\{\begin{matrix}\mu\\ 1\nu\end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\end{pmatrix},\tag{4a}$$

$$\left\{\begin{matrix}\mu\\ 2\nu\end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix}\cdot&-\sin\theta_1\cos\theta_1&\cdot&\cdot\\ \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}\end{pmatrix},\tag{4b}$$

$$\left\{\begin{matrix}\mu\\ 3\nu\end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&-\sin\theta_1\cos\theta_1\sin^2\theta_2&\cdot\\ \cdot&\cdot&-\sin\theta_2\cos\theta_2&\cdot\\ \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}&\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\frac{\cos\theta_3}{\sin\theta_3}\end{pmatrix}\tag{4c}$$

$$\left\{\begin{matrix}\mu\\ 4\nu\end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&-\sin\theta_1\cos\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\\ \cdot&\cdot&\cdot&-\sin\theta_2\cos\theta_2\sin^2\theta_3\\ \cdot&\cdot&\cdot&-\sin\theta_3\cos\theta_3\\ \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}&\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}&\frac{\cos\theta_3}{\sin\theta_3}&\cdot\end{pmatrix}。\tag{4d}$$

我们知道，相应于球坐标的自然基虽然正交，但不是归一的。和规范势相对应的是自然联络在正交归一标架(*tetrad*)上的投影$\Gamma^{A}_{\mu B}$（在本节中拉丁文大写附标是标架指标，取值1,2,3,4）：

$$\Gamma^{A}_{\mu B}=\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\sigma\end{matrix}\right\}e^{A}_{\rho}\,e^{\sigma}_{B}+e^{A}\frac{\partial}{\partial\theta^{\mu}}e^{\nu}_{B},\tag{5}$$

其中正交归一标架向量 e^A_μ 及其逆 e^μ_B的定义是，

$$g_{\mu\nu}=e^A_\mu\delta_{AB}e^B_\nu\ , \tag{6}$$

$$e^A_\mu\ e^\mu_B=\delta^A_B \tag{7}$$

由式(6)及(2)，我们有

$$e^A_\mu=\begin{pmatrix} r & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & r\sin\theta_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & r\sin\theta_1\sin\theta_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 \end{pmatrix} \tag{8a}$$

$$e^\nu_B=\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{r\sin\theta_1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{r\sin\theta_1\sin\theta_2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3} \end{pmatrix} \tag{8b}$$

把式(4)和(8)代入式(5)，便可算得

$$\Gamma_1=0 \tag{9a}$$

$$\Gamma_2=\begin{pmatrix} \cdot & -\cos\theta_1 & \cdot \\ \cos\theta_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \tag{9b}$$

$$\Gamma_3=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ \cdot & \cdot & -\cos\theta_2 \\ \cos\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \tag{9c}$$

$$\Gamma_4=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\cos\theta_2\sin\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\sin\theta_3 \\ \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 & \cos\theta_2\sin\theta_3 & \sin\theta_3 & \cdot \end{pmatrix}。 \tag{9d}$$

式(9)中矩阵Γ_μ的元素就是$\Gamma^{A}_{\mu B}$。

引入O_4群的生成元$X_{\mu\nu}$，其元素$(X_{\mu\nu})^{A}_{B}$为：

$$(X_{\mu\nu})^{A}_{B}=-\delta_{\mu A}\delta_{\nu B}+\delta_{\mu B}\delta_{\nu A} \tag{10}$$

式(9a)-(9d)可写成为

$$\Gamma_1=0, \tag{11a}$$

$$\Gamma_2=\cos\theta_1 X_{12}, \tag{11b}$$

$$\Gamma_3=\cos\theta_1\sin\theta_2 X_{13}+\cos\theta_2 X_{23}, \tag{11c}$$

$$\Gamma_4=\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 X_{14}+\cos\theta_2\sin\theta_3 X_{24}+\cos\theta_3 X_{34}。 \tag{11d}$$

由于$O_4\approx O_3\times O_3$，$X_{\mu\nu}$可用两组对易的O_3生成元$X_i^{(+)}$及$X_i^{(-)}$（$i=1,2,3$）表示：

$$X_{23}=X_1^{(+)}+X_1^{(-)},X_{31}=X_2^{(+)}+X_2^{(-)},$$

$$X_{12}=X_3^{(+)}+X_3^{(-)},X_{14}=X_1^{(+)}-X_1^{(-)},$$

$$X_{24}=X_2^{(+)}-X_2^{(-)},X_{34}=X_3^{(+)}-X_3^{(-)} \tag{12}$$

于是矩阵Γ_μ可用$X^{(+)}$及$X^{(-)}$表示。由文[1]，规范势与联络的对应关系为

$$\Gamma^{A}_{\mu B}=(gW^{i}_{\mu}X_i)^{A}_{B},$$

其中g是规范场的自耦常数，X^i_μ是规范势在正交归一标架上的分量，i是SU_2指标。由此可得两组独立的SU_2规范势$W^{(\pm)i}_\mu$。把这些分量变换回球面上自然基的分量$W^{(\pm)i}_A$，$W^{(\pm)i}_A$的关系为

$$W^{(\pm)i}_A=e^{\mu}_A W^{(\pm)i}_\mu, \tag{14}$$

亦即

$$W^{(\pm)i}_{\theta_1}=\frac{1}{r}W^{(\pm)i}_1, \tag{14a}$$

$$W^{(\pm)i}_{\theta_2}=\frac{1}{r\sin\theta_1}W^{(\pm)i}_2, \tag{14b}$$

$$W^{(\pm)i}_{\theta_3}=\frac{1}{r\sin\theta_1\sin\theta_2}W^{(\pm)i}_2, \tag{14c}$$

$$W_{\theta_4}^{(\pm)i}=\frac{1}{rsin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_2}W_4^i, \tag{14d}$$

便可得到如下两组SU_2磁单极势：

（I）
$$\begin{cases} W_{\theta_1}^{(+)i}=0 \\ W_{\theta_2}^{(+)1}=0, \\ W_{\theta_3}^{(+)1}=\dfrac{cos\theta_2}{grsin\theta_1\, sin_2}, \\ W_{\theta_4}^{(+)1}=\dfrac{cos\theta_2}{rsiin\theta_1 g}, \end{cases} \qquad \begin{cases} W_{\theta_1}^{(-)i}=0 \\ W_{\theta_2}^{(-)1}=0, \\ W_{\theta_1}^{(-)3}=\dfrac{cos\theta_2}{grsin\theta_1 sin\theta_s}, \\ W_{\theta_4}^{(-)1}=\dfrac{-cos\theta_1}{grsin\theta_1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{\theta_2}^{(+)2}=0, \\ W_{\theta_2}^{(+)2}=\dfrac{-cos\theta_1}{grsin\theta_1}, \\ W_{\theta_4}^{(+)2}=\dfrac{cos\theta_2}{grsin\theta_1 sin\theta_2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} W_{\theta_2}^{(-)2}=0, \\ W_{\theta_3}^{(-)2}=\dfrac{-cos\theta_1}{grsin\theta_1}, \\ W_{\theta_4}^{(-)2}=\dfrac{-cos\theta_2}{grsin\theta_1 sin\theta_2}, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} W_{\theta_2}^{(+)3}=\dfrac{cos\theta_1}{grsin\theta_1}, \\ W_{\theta_3}^{(+)3}=0, \\ W_{\theta_4}^{(+)3}=\dfrac{cos\theta_3}{grsin\theta^1 sin\theta_2 sin\theta}, \end{cases} \qquad \begin{cases} W_{\theta_2}^{(-)3}=\dfrac{cos\theta_1}{grsin\theta^1}, \\ W_{\theta_3}^{(-)3}=0, \\ W_{\theta_3}^{(-)4}=\dfrac{-cos\theta_3}{grsin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3}。 \end{cases}$$

这两组磁单极势在θ_1，θ_3及θ_3为0及π时有奇异弦。这是两组双弦奇异解。

3、可以证明，选取适当的规范变换，能把这两组双弦奇异解变换成单弦奇异解。例如。取规范变换S为：

$$S=e^{\theta_4 X_{23}}\ e^{\theta_3 X_{12}}\ e^{\theta_2 X_{32}} \tag{16}$$

$$\Gamma'_\mu=S\Gamma_\mu S^{-1}+S\frac{\partial}{\partial\theta\mu}S^{-1}, \tag{17}$$

由此可得

$$\Gamma'_{\theta_2}=(1-cos\theta_1)(cos\theta_3 X_1^{(+)}+sin\theta_3 cos\theta_4 X_2^{(+)}\mp sin\theta_4 X_3^{(+)})$$

$$+(1+cos\theta_1)(cos\theta_3 X_1^{(-)}+sin\theta_3 cos\theta_4 X_2^{(-)}+sin\theta_4 X_3^{(-)}), \tag{18a}$$

$$\Gamma'_{\theta_3}=(1-\cos\theta_1)[\sin\theta_2\cos\theta_2\sin\theta_3X_1^{(+)}+(\sin\theta_2\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4$$
$$-\sin^2\theta_2\sin\theta_4X_2^{(+)}+(\sin\theta_2\cos\theta_2\cos\theta_3\sin\theta_4$$
$$+\sin^2\theta_2\cos\theta_4X_3^{(+)}]+(1+\cos\theta_1)\tag{18d}$$

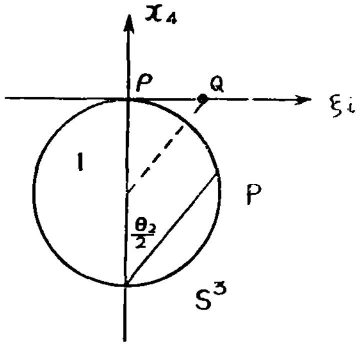
[同前项以$X^{(-)}$代$X^{(+)}$]，

$$\Gamma'_{\theta_4}=(1-\cos\theta_1)[\sin\theta_2\cos\theta_2\sin\theta_3X_1^{(+)}-(\sin^2\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_3\cos\theta_4$$
$$-\sin\theta_2\cos\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4)\ X_2^{(+)}+$$
$$(-\sin^2\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_3\sin\theta_3\sin\theta_4+\sin\theta_2\cos\theta_3\sin\theta_3\cos\theta_4)X_3^{(+)}]$$
$$+(1+\cos\theta_4)[\text{同前项以}X^{(-)}\text{代}^{(+)}]。\tag{18c}$$

不难看出，由于因子（$1\pm\cos\theta_1$），与式(18)相应的磁单极势$W'^{(\pm)i}_{\theta_\mu}$对于θ_1已化为单弦奇异解。$W'^{(+)i}_{\theta_\mu}$在E^5空间中沿第5轴的上半球解析，$W'^{(-)i}_{\theta_\mu}$在下半球解析。

5．在本节中我们导出杨振宁的单弦奇异解[3]。

代替球坐标（r，θ，…，θ_4），我们采用投影坐标（r，ξ_1，ξ_2，ξ_3，$\theta\equiv\theta_1$），



其中ξ_i由下式定义：

$$\left\{\begin{aligned}&\xi_1=\rho\sin\theta_3\cos\theta_4,\\&\xi_2=\rho\sin\theta_3\sin\theta_4,\\&\xi_3=\rho\cos\theta_4,\\&\rho=\tan\frac{\theta_2}{2},\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

亦即为图1所示的单位半径的S^3球面上的点P的测地投影点Q的坐标。采用这些坐标，度规（2）变为

$$g\mu v=\begin{pmatrix}\frac{4r^2\sin^2\theta}{(1+\rho^2)^2} & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \frac{4r^2\sin^2\theta}{(1+\rho^2)^2} & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \frac{4r^2\sin^2\theta}{(1+\rho^2)^2} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & r^2\end{pmatrix} \tag{20}$$

其中第四维的指标为o。此时S^4球面上的联络可由度规（20）算得为：

$$\left\{\begin{matrix}\mu\\1\nu\end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{-2\xi_1}{1+\rho^2} & \frac{-2\xi_2}{1+\rho^2} & \frac{-2\xi_3}{1+\rho^2} & \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ \frac{2\xi_2}{1+\rho^2} & \frac{-2\xi_1}{1+\rho^2} & \cdot & \cdot\\ \frac{2\xi_3}{1+\rho^2} & \cdot & \frac{-2\xi_1}{1+\rho^2} & \cdot\\ \frac{-4\sin\theta\cos\theta}{(1+\rho^2)^2} & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}, \tag{21a}$$

$$\left\{\begin{matrix}\mu\\2\nu\end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{-2\xi_2}{1+\rho^2} & \frac{2\xi_1}{1+\rho^2} & \cdot & \cdot\\ \frac{-2\xi_1}{1+\rho^2} & \frac{-2\xi_2}{1+\rho^2} & \frac{-2\xi_3}{1+\rho^2} & \cdot\\ \cdot & \frac{2\xi_3}{1+\rho^2} & \frac{-2\xi_2}{1+\rho^2} & \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ \cdot & \frac{-4\sin\theta\cos\theta}{(1+\rho^2)^2} & \cdot & \cdot\end{pmatrix} \tag{21b}$$

$$\left\{\begin{matrix}\mu\\3\nu\end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{-2\xi_3}{1+\rho^2} & \cdot & \frac{2\xi_1}{1+\rho^2} & \cdot\\ \cdot & \frac{-2\xi_3}{1+\rho^2} & \frac{2\xi_2}{1+\rho^2} & \cdot\\ \frac{-2\xi_1}{1+\rho^2} & \frac{-2\xi_2}{1+\rho^2} & \frac{-2\xi_3}{1+\rho^2} & \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ \cdot & \cdot & \frac{-4\sin\theta\cos\theta}{(1+\rho^2)^2} & \cdot\end{pmatrix} \tag{21c}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ 4\nu \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{pmatrix} \tag{21d}$$

如前把联络投影在正交归一标架上。在此情况下，标架向量 e^A_μ 及其逆 e^ν_B 为

$$e^A_\mu = \begin{pmatrix} \frac{2r\sin\theta}{1+\rho^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{2r\sin\theta}{1+\rho^2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{2r\sin\theta}{1+\rho^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & r \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$e^\nu_B = \begin{pmatrix} \frac{1+\rho^2}{2r\sin\theta} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1+\rho^2}{2r\sin\theta} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1+\rho^2}{2\gamma\sin\theta} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{r} \end{pmatrix}。 \tag{23}$$

联络在此正交归一标架上的投影 $L^A_{\mu B}(\xi)$为：

$$\Gamma^A_{\mu B}(\xi) = e^A_\rho \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} e^\rho_B + e^A_\rho \frac{\partial}{\partial\xi\mu} e^\rho_B, \tag{24}$$

式中第四维指标定义为 $\xi^4 \equiv \theta$。由式(21)－(23)可得

$$\begin{aligned} &\Gamma_i(\xi) = -\frac{2\cos\theta}{1+\rho^2} X_{i4} + \frac{2\xi_j}{1+\rho^2} X_{ij}, \\ &\Gamma_4(\xi) = 0, \\ &j = 1,\ 2,\ 3。\end{aligned} \tag{25}$$

引入规范变换S：

$$S = exp\left\{ \frac{\theta_2}{\rho} \xi (X^{(+)}_i + X^{(-)}_i) \right\}, \tag{26}$$

$$\Gamma_\mu \to \Gamma'_\mu = S\Gamma\mu S^{-1} + S\partial\mu S^{-1}, \tag{27}$$

由式(25)及(26)，有

$$\Gamma' = \frac{-2(\cos\theta+1)}{(1+\rho^2)^2}[(1-\rho^2)X_i^{(+)}+2\xi_i\vec{X}^{(+)}\cdot\vec{\xi}$$

$$+2\epsilon_{ije}X_j^{(+)}\xi_e]-\frac{2(1-\cos\theta)}{(1+\rho_2)^2}[(1-\rho^2)X_i^{(-)}$$

$$+2\xi_i\vec{X}^{(-)}\cdot\vec{\xi}+2\epsilon_{ije}X_j^{(-)}\xi_e],$$

$$\Gamma'_4=0 \tag{28}$$

$X^{(+)}$和$X^{(-)}$是两组相互独立的SU_2生成元，由式(13)及(14)，它们各对应一组SU_2磁单极势：

$$W^{(\pm)j}=\frac{-(1\pm\cos\theta)}{gr(1+\rho^2)\sin\theta}[(1-\rho^2)\delta_{ij}+2\xi_i\xi_j+2\epsilon_{ije}] \tag{29}$$

这也就是杨振宁用投影坐标所猜测出的 SU_2 磁单极规范势的形式[3]它们是单弦奇异解。

参 考 资 料

〔1〕李华钟、冼鼎昌、郭硕鸿，中山大学学报（自然科学版），1975，3，7。

〔2〕C.N.Yang，Phys.ReV.Lett，33，445(1974)。

(3) 楊振宁，"O_5对称的 SU_2 磁單极"——楊振宁在北京的学术报告之二（1976年4月）。

（Ⅲ）、无奇异弦的O_5对称的SU_2磁单极势

1.我们在前一部分中[1]，应用规范势与球面上的联络对应的方法[2]，导出了有奇异弦的O_5对称的SU_2磁单极势。在这里，我们将导出无奇异弦的O_5对称的磁单极势。

我们用测地投影坐标η_μ（在本文中，希腊文小写附标取值1,2,3,4）来描述E^5空间中的S^4球面。η_μ是半径为1的球面上的点P的测地投影Q的坐标

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \lambda sin\theta_2 sin\theta_3 cos\theta_4 ,\\
\eta_2 &= \lambda sin\theta_2 sin\theta_3 sin\theta_4 ,\\
\eta_3 &= \lambda sin\theta_2 cos\theta_3 ,\\
\eta_4 &= \lambda cos\theta_2 ,\\
\lambda &= tan\theta_1/_2 ,
\end{aligned} \tag{1}$$

其中$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$是极坐标所用的角，亦即在$E^5$中直坐标$x_a$（在本文中拉丁文小写附标取值1,2,3,4,5）可写为

$$\begin{aligned}
x_1 &= r sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 cos\theta_4 ,\\
x_2 &= r sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 sin\theta_4 ,\\
x_3 &= r sin\theta_1 sin\theta_2 cos\theta_3 ,\\
x_4 &= r sin\theta_1 cos\theta_2 ,\\
x_5 &= r cos\theta_1
\end{aligned}$$

比较式(1)及式(2)，便有

$$x_\mu = \frac{2r\eta_\mu}{1+\lambda^2}, \quad x_5 = r\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \tag{3}$$

$$\lambda = \eta_\mu\eta^\mu , \qquad r = x_a x^a ,$$

2.对于投影坐标(1)，球面上的度规$g_{\mu\nu}$为

$$g_{\mu\nu} = \frac{4r^2}{(1+\lambda^2)^2}\delta_{\mu\nu} \tag{4}$$

由此度规，便可算出球面上的自然联络$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$为

$$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \frac{-2}{1+\lambda^2}(\eta_\mu\delta^\rho_\mu + \eta_\nu\delta^\rho_\mu - \eta_\rho\delta_{\mu\nu}) \tag{5}$$

现在引入球面上的正交归一标架向量$e^A_\mu(\eta)$及其逆$e^\nu_B(\eta)$(在本文中拉丁文大写附标是标架指标，取值1，…，4），其定义为

$$g_{\mu\nu} = \delta_{AB}e^A_\mu(\eta)e^B_\nu(\eta) ,$$

$$e_\mu^A(\eta)e_B^\mu(\eta)=\delta_{AB}\ 。\tag{6}$$

由式(4)及(6)，有

$$e_\mu^A(\eta)=\frac{2r}{1+\lambda^2}\delta_\mu^A\ ,\quad e_B^\nu(\eta)=\frac{1+\lambda^2}{2r}\delta_B^\mu\ 。\tag{7}$$

现在将自然联络投影在此标架上。联络在此标架上的投影$\Gamma_{\mu}{}^A{}_B$为

$$\Gamma_\mu{}^A_B=e_\rho^A(\eta)\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}e_B^\nu(\eta)+e_\rho^A(\eta)\frac{\partial}{\partial_\mu}e_B^\rho(\eta)\ ,\tag{8}$$

把式(5)、(7)代(8)，便有

$$\Gamma_\mu{}^A_B=\frac{2}{1+\lambda^2}(\eta_A\delta_{\mu B}-\eta_B\delta_{\mu A})$$

$$=\frac{2\eta_\nu}{1+\lambda^2}(X_{\mu\nu})^A{}_B\tag{9}$$

式中$X_{\mu\nu}$是O_4群的生成元，其元素$(X_{\mu\nu})^A{}_B$为

$$(X_{\mu\nu})^A{}_B=\delta_{\mu B}\delta_{\nu A}-\delta_{\mu A}\delta_{\nu B}\ 。\tag{10}$$

3.与式(9)相对应的规范势是与[1]导出有奇异弦的单弦奇异势等价，这可由把(9)中的投影坐标换回球面上的坐标看出来。从另一个角度来看，如果代替η_μ我们用坐标($\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\equiv\theta_1$)，它们定义为

$$\lambda=tan\frac{\xi_4}{2}\ ,$$

$$\xi_1=tan\frac{\theta_2}{2}\ sin\theta_3cos\theta_4\ ,\tag{11}$$

$$\xi_2=tan\frac{\theta_2}{2}\ sin\theta_3sin\theta_4\ ,$$

$$\xi_3=tan\frac{\theta_2}{2}\ cos\theta_3\ 。$$

比较式(1)及(11)，有两组坐标之间的关系：

$$\left\{\begin{aligned}\eta_i&=\frac{2\lambda}{1+\rho^2}\xi_i\\ \eta_4&=\lambda\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\end{aligned}\right.\tag{12}$$

$\rho^2=\xi_i\xi^i$，　$i=1,2,3$；

或
$$\begin{cases} \xi_i = \dfrac{\eta_i}{\lambda + \eta_4} \\ \xi_4 = 2tan^{-1}\lambda \text{。} \end{cases} \tag{13}$$

在作坐标交换（$\eta_\mu \to \xi_\nu$）时，联络经受如下的变换：

$$\Gamma^{A}_{\mu B} \to \Gamma'^{A}_{\mu B}(\xi) = \frac{\partial \eta^\nu}{\partial \xi^\mu} S^A_C \Gamma^C_{\nu D} (S^{-1})^D_B + S^A_C \frac{\partial}{\partial \xi} (S^{-1})^C_B \text{,} \tag{14}$$

其中

$$S^A_B = e^A_\mu(\xi) \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \eta^\nu} e^\nu_B(\eta) \text{,}$$

$$(S^{-1})^A_B = e^A_\mu(\eta) \frac{\partial \eta^\mu}{\partial \xi^\nu} e^\nu_B(\xi) \text{,}$$

式中$e_\mu{}^A(\varepsilon)$及$e_B{}^\nu(\xi)$是采用坐标ϵ_μ时球面上的正交归一标架向量及其逆。由定义有

$$c^A_\mu(\xi) = \begin{pmatrix} \dfrac{2rsin\xi_4}{1+\rho^2} & & & \\ & \dfrac{2rsin\xi_4}{1+\rho^1} & & \\ & & \dfrac{2rsin\xi_4}{1+\rho^2} & \\ & & & r \end{pmatrix} \tag{16a}$$

$$e^\nu_B(\xi) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\rho^2}{2rsin\xi^4} & & & \\ & \dfrac{1+\rho^2}{2rsin\xi_4} & & \\ & & \dfrac{1+\rho^2}{2rsin\xi_4} & \\ & & & \dfrac{1}{r} \end{pmatrix} \tag{16b}$$

把式(7)、(13)、(16)代入(15)算得

$$S^i_j = S_{ij} - \frac{2\xi_i\xi_j}{1+\rho^2} \text{,}$$

$$S^i_4 = \frac{-2\xi_i}{1+\rho^2} \text{,}$$

$$S^4_i = \frac{2\xi_i}{1+\rho^2} \text{,} \tag{17}$$

$$S^4_4 = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2},$$

$$j=1,2,3;$$

以及

$$(S^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = S^{\nu}{}_{\mu}\ . \tag{18}$$

由式(17)、(18)、(9)及(14)，可以得到在坐标—规范联合变换下的联络变换的表式：

$$\Gamma' = \frac{-2\cos\xi_4}{1+\rho^2}X^{(+)} + \frac{2}{1+\rho^2}\epsilon_{ijk}\xi_j X_k{}^{(+)}$$

$$+\frac{2\cos\xi_4}{1+\rho^2}X_i{}^{(-)} + \frac{2}{1+\rho^2}\epsilon_{ijk}\xi_j X_k{}^{(-)}, \tag{19}$$

$$\Gamma'_4 = 0\ 。$$

$X_i{}^{(+)}$及$X_i{}^{(-)}$的定义为

$$X_i{}^{(\pm)} = \tfrac{1}{2}(\pm X_4 \pm \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}X_{jk}), \tag{20}$$

它们是两组相互对易的SU_2生成元。式(19)可以通过一个规范变换变为

$$\Gamma' \to \frac{-2(1+\cos\theta_1)}{(1+\rho^2)^2}[(1-\rho^2)X_i{}^{(+)} + 2\xi_i \vec{X}^{(+)}\cdot\vec{\xi} + 2\epsilon_{ijk}X_j^{(+)k}\xi$$

$$\frac{-2(1-\cos\theta_1)}{(1+\rho^2)^2}[(1-\rho^2)X_i{}^{(-)} + 2\xi_i \vec{X}^{(-)}\cdot\vec{\xi} + 2\epsilon_{ijk}X_j^{(-)}\xi_k], \tag{21}$$

与之对应的规范势[1]

$$W_{\theta_1}^{(\pm)i} = 0,$$

$$W_i^{(\pm)i} = \frac{-(1\pm\cos\theta_1)}{gr(1+\rho^2)\sin\theta_1}[(1-\rho^2)\delta_{ij} + 2\xi_i\xi_j + 2\epsilon_{ije}\xi_e]$$

显然是有单弦奇异性的。

4.要得到无奇异弦的SU_2规范势，必须变回五维欧氏空间的坐标x_a，即作坐标变换$(\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,r)\to(x_1,\ \cdots,\ x_5)$，在作坐标变换时，标架同时相应地转动(作$O_5$转动)，这时联络$\Gamma_\mu$经受如下的变换：$\Gamma_\mu\to\Gamma_a(x)$，

$$\Gamma^a_{cb}(x) = \frac{\partial\eta\mu}{\partial xc}S^a_A\,\Gamma^A_{\mu B}(S^{-1})^B_b + S^a_A\frac{\partial}{\partial x^c}(S^{-1})^A_b\ , \tag{23}$$

其中

$$S^a_A = e^{\mu}_A(\eta)\frac{\partial x^a}{\partial\eta^\mu} = \frac{1+\lambda^2}{2r}\quad\frac{\partial x^a}{\partial\eta^A},$$

$$S_5^a = \frac{\partial x^a}{\partial \eta^5} = \frac{x^a}{r}, \tag{24}$$

$$(S^{-1})_b^B = e_\mu^B(\eta)\frac{\partial \eta^\mu}{\partial x^b} = \frac{2\gamma}{1+\lambda^2}\frac{\partial \eta^B}{\partial x^b}, \tag{24}$$

$$(S^{-1})_b^5 = \frac{\partial \eta^5}{\partial x^b} = \frac{x^b}{r}。$$

把式(3)、(9)及(24)代入(23)，可得

$$\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}(x) = \frac{1}{r^2}(x_\mu\delta_{\nu\sigma} - x_\nu\delta_{\mu\sigma}),$$

$$\Gamma_{\sigma\nu}^{5}(x) = \frac{x_5}{r^2}\delta_{\sigma\nu} \tag{25}$$

$$\Gamma_{5\nu}^{5}(x) = -\frac{X_\nu}{r^2}。$$

亦即

$$\Gamma_{ob}^{a}(x) = -\frac{1}{r^2}(xa\delta_{bo} - x_b\delta_{ao}), \tag{26}$$

此式显然是除原点外到处解析，且为O_5对称的。

由规范势与球面联络的对应关系[2]：

$$\Gamma_{ob}^{a}(x) = \left(\tfrac{1}{2}gW_o^{de}(x)\,x_{de}\right)_b^a, \tag{27}$$

其中$W_o^{de}(x)$是规范势，g是规范场的自耦合常数，x_{de}是O_5群的生成元，便有

$$W_o^{ab}(x) = -\frac{1}{gr^2}(xa\delta_{bo} - x_b\delta_{ao}) \tag{28}$$

这是以直坐标表出的、作为定域O_5群的子群O_4磁单极规范势，它具有O_5对称，无奇异弦。SU_2磁单极规范势也可由此籍$O_4 \approx SU_2\times SU_2$如前文[1]那样分出，也是无奇异弦的。

参考资料

〔1〕見本文(Ⅰ)。

〔2〕李华钟、冼鼎昌、郭碩鸿，中山大学学报(自然科学版)，1975,3,1.

〔3〕C. N. Yang, phys. Rev. Lett., 33, 445, (1974).

〔4〕楊振宁，O_5对称的SU^2磁單极，楊振宁在北京的学术报告之二(1976.4)