

# 衰減时间测定仪研究

物理系引力波研究組

## 一、原 理

水平放置中间悬挂的金属棒(图 1)作纵向自由振动时的运动方程是:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + k \frac{\partial \xi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

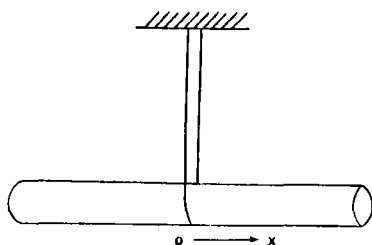


图 一

在边界条件为  $x=0$  处,  $\xi=0$ ;  $x=\pm \frac{l}{2}$  处,  $\frac{\partial \xi}{\partial x}=0$ , 及初始条件为  $t=0$  时,

$\frac{\partial \xi}{\partial t}=0$ , 当  $t=0$ ,  $\xi = \frac{Fx}{YS}$  时, (1)式的解是:

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{4Fl}{YSn^2\pi^2} \cdot e^{-\frac{k}{2}t} \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \left( \cos w_n' t + \frac{k}{2w_n'} \sin w_n' t \right) \quad (2)$$

$$n = 1, 3, 5, 7, 9 \dots \dots$$

因通常  $w_n' \gg \frac{k}{2}$

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{4Fl}{YSn^2\pi^2} \cdot e^{-\frac{k}{2}t} \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \cos w_n' t \quad (3)$$

当棒以基频振动时, 其表达式变为:

$$\xi_1 = \frac{4Fl}{YS\pi^2} \cdot e^{-\frac{k}{2}t} \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \cdot \cos w_1' t \quad (4)$$

式中  $F$  是  $t < 0$  时棒所受的纵向力;  $l$  是棒的长度;  $x$  是垂直于棒轴线的截面的坐标;  $Y$  是杨氏模量;  $S$  是截面积;  $w_n' = w_n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{2w_n}\right)^2}$ ;  $w_n = \frac{n\pi c}{l}$  是棒的纵向振动本征圆频率。

(4)式可改写为:

$$\xi_1 = \xi_0 e^{-\frac{k}{2}t} \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \cdot \cos w_1' t \quad (5)$$

从上式可知棒振动的振幅是随时间而减小, 不是永远为  $\xi_0$ 。(图2)。就是说振动因消耗能量而逐渐停止。常用它的振幅衰减到原来的  $\frac{1}{e}$  倍所需的时间, 来表示这种振动停止的快慢, 这个时间称为衰变模量(或称衰减时间) $\tau$ 。按定义得:

$$t_2 - t_1 = \tau = \frac{2}{k} \quad (6)$$

也可以用另一种方法来表示衰减的快慢, 即用振动一周内振幅的衰减量大小来表示。按定义得:

$$\delta = \frac{k}{2} T \quad (7)$$

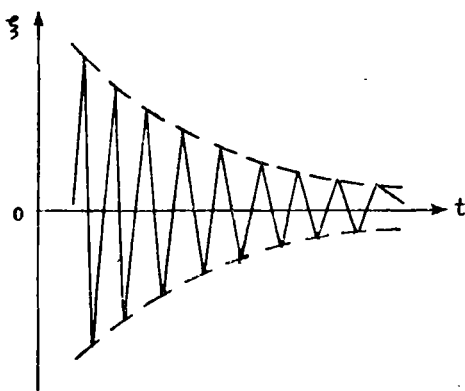
$\delta$  称为振动的缩减量, 它等于在同侧的两个相继“振幅”之比的自然对数, 是表示振动一周后振幅衰减的大小。

比较(6),(7)两式得:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\tau}{T} \quad (8)$$

可见  $\frac{1}{\delta}$  表示使振幅衰减到  $\frac{1}{e}$  倍时的振动次数, 令它为  $n$ , 则

$$\frac{1}{\delta} = n = \frac{\tau}{T} \quad (8')$$



图二

在表示棒振动时能量损耗大小的方法中更常用的是  $Q$  值法, 它的意思是, 使振幅衰减到原来振幅的  $\frac{1}{e^\pi}$  倍所需的“振动周数”。

设  $t'_2 - t'_1$  是振幅衰减  $\frac{1}{e^\pi}$  倍所需的时间, 则按定义可得  $Q$  的表示式,

$$Q = \frac{t'_2 - t'_1}{T} \quad (9)$$

$$\text{因} \quad \frac{1}{e^\pi} |\xi_0| e^{-\frac{1}{2}kt'_1} = |\xi_0| e^{-\frac{1}{2}kt'_2}$$

$$\therefore t'_2 - t'_1 = \frac{2\pi}{k}$$

代入(9)式得,

$$Q = \frac{2\pi}{kT} = \frac{2\pi f}{k} \quad (10)$$

将(6)式代入(10)式得

$$Q = \pi f \tau = \pi f (t_2 - t_1) \quad (11)$$

将(8)式代入(10)式得,

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = n\pi \quad (12)$$

从(11), (12)两式可知测量金属棒的  $Q$  值有两种方法,

(1)测  $\tau$  的方法。即测出振幅衰减  $\frac{1}{e}$  倍时所需的时间的方法。

(2)测  $\frac{1}{\delta}$  的方法。即测量在振幅衰减  $\frac{1}{e}$  倍的过程中, 棒振动了多少次的方法。

目前本仪器采用测  $\tau$  的方法。

## 二、仪器结构

仪器方框图见(图3)。

检测铝棒振动的压电晶体粘于棒的中部。测量时, 先用频率等于铝棒纵向基频的外界讯号, 将铝棒振动激发起来, 然后突然将讯号断掉, 此时铝棒将作自由振动(图4a)。从压电晶体输出的电信号, 输入高输入阻抗前置放大器。此前置放大器装在体积较小的探头罩中, 并尽量靠近铝棒。从前置放大器输出的讯号, 经电缆输至选频放大器, 选频放大器的中心频率调节在铝棒的基频上, 以进一

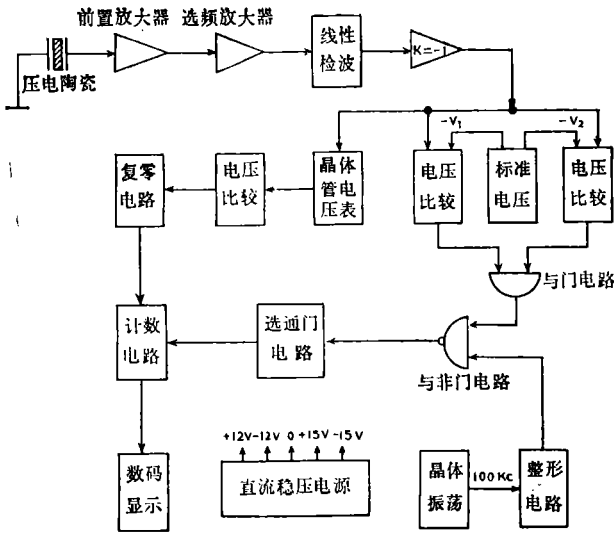


图 三

步滤除噪声及其它可能的干扰讯号。信号经选频放大后，直接输给线性检波器，比较精确地把自由振动信号的负向包络线检取出来。由于检波器的输出阻抗较高，所以在检波器和电压比较器之间插入了一级反相放大器，此反相放大器除了降低输出阻抗及起隔离作用外，它还利用接在反相放大器反馈回路中的积分电容，进一步滤除检波后在信号上叠加的小尖峰信号。从反相放大器出来的信号（图4b），分别输入两个电压比较器。另外，从标准电压电路输出的两个标准电压  $-v_1$  和  $-v_2$ ，也同时分别加到两个电压比较器上。当信号电压的绝对值下降到和标准电压  $-v_1$  的绝对值相等时（图3），左边的电压比较器起动，比较器输出端的电位突然从低值跳到高值（图4c），此后信号电

压继续按指数规律下降，当降到  $v_2$  时，右边的电压比较器起动，比较器输出端的电位突然能从高值跳到低值（图4d）。这两个比较器的输出电压，同时接到一个与门电路，在与门电路的输出端即可得到一个矩形电压（图4e），其宽度即是我们所要测量的时间  $\tau = t_2 - t_1$ （因为设计时是令  $v_2 = \frac{v_1}{e}$ ）。但这个时间是一个连续量。为了用数码管电路把这个时间显示出来，尚需把时间整量化。为此，把一个由石英晶体振荡器产生的100kc标准时间信号，整形后（见图4f）和与门电路输出的矩形电压

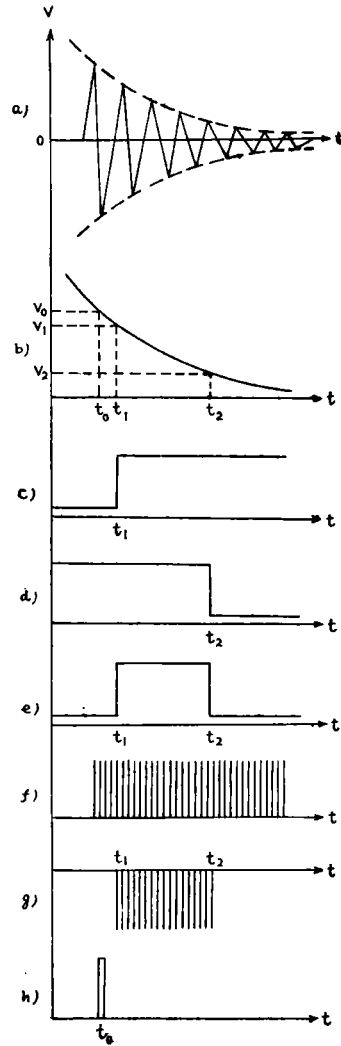


图 四

(图4e)一起输给一个与非门电路。在那里,矩形电压起闸门信号的作用,只有在时间 $t_2-t_1$ 内的标准时间脉冲信号,能够通过与非门电路,在与非门的输出端将得到一系列持续时间等于 $t_2-t_1$ 的脉冲串(图4g)。最后将这列脉冲串输入十进制计数器,经译码后用数码管显示出来。

为了监视输给电压比较器的信号电压的大小,在反相放大器的输出端接了一个晶体管直流电压表(图3),这个电压表除了作指示电压大小之用外,还作为选频放大器的调谐指示电表。

从晶体管电压表电路输出的电压,接到一个电压比较器,这个电压比较器的启动电压调在 $v_0$ 值上(图4b), $v_0$ 稍大于 $v_1$ ,当信号衰减至 $v_0$ 时,电压比较器电路翻转,输出一个脉冲给复零电路,复零电路随即输出一个一定宽度的正向复零脉冲(图4h),这个复零脉冲进入计数电路后,使计数电路全部自动复零,处于等待工作状态。当信号电压继续衰减至 $v_1$ 时,计数电路便从零开始计数。

与非门输出的脉冲串在进入计数电路之前,先经过一个选通门电路,这个电路可根据仪器面板上的“时间选择”旋扭的位置,有选择地把脉冲信号从计数电路的某一级输入。这样,无论测量时间是多少,仪器面板上的全部数码管都会有数字显示,这就使得有可能根据仪器测量准确度的有效数字位数,来选择所用数码管的个数,从而减少数码管的使用数目。

(图5)是仪器外形图。

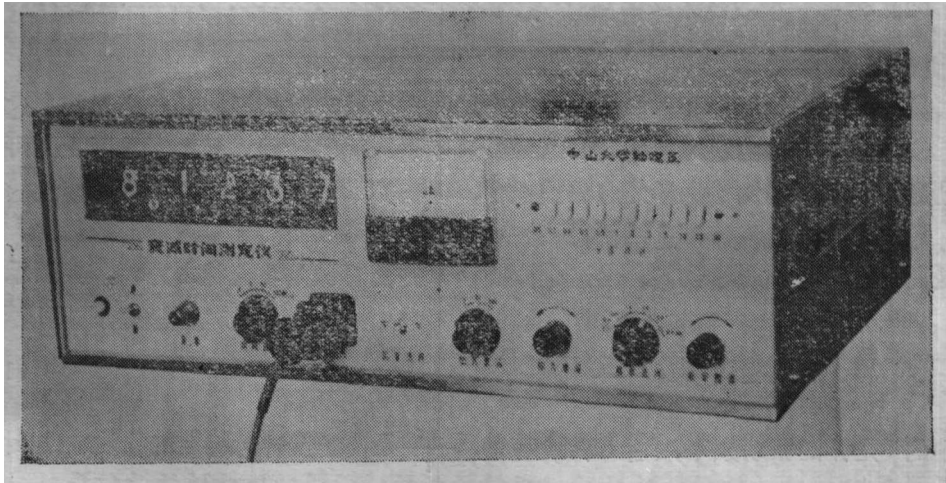


图 五

### 三、测时误差讨论

仪器测量衰减时间的相对误差,主要由前级交流放大器、检波器、反相放大器、电压比较器、晶体振荡器等共同决定;

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{交}} + \varepsilon_{\text{检}} + \varepsilon_{\text{反}} + \varepsilon_{\text{比}} + \varepsilon_{\text{振}} \quad (13)$$

下面对各项误差来源作一简单讨论。

(1)  $\varepsilon_{\text{交}}$ ——前级交流放大器带来的相对误差。

前级交流放大器由前置放大器和选频放大器两部分组成(图3)。前置放大器处于小信号放大状态,因而其幅度畸变可以忽略。选频放大器使用的是运算放大器,其幅度畸变在响应频率足够高的情况下,主要是由运算误差决定,如果运算放大器的开环放大倍数稳定,则运算误差对测时的影响可忽略。因此前级交流放大器的误差来源主要是噪声。通过计算可得:

$$\varepsilon_{\text{交}} = \frac{e-1}{e} K_{0\text{反}} \cdot K_{0\text{检}} \cdot \frac{\Delta v}{v_{\text{阈}2}} \quad (14)$$

式中  $K_{0\text{反}}$  是反相放大器的放大倍数,  $K_{0\text{检}}$  是检波器的放大倍数,  $v_{\text{阈}2} = 1.00$  伏。在

我们的仪器中取  $\frac{\Delta v}{v_{\text{阈}2}} = 2.00 \times 10^{-4}$ ,  $K_{0\text{反}} = -1$ ,  $K_{0\text{检}} = -1$ , 故前级交流放大器带来的相对误差为:

$$\varepsilon_{\text{交}} = 1.26 \times 10^{-4} \quad (15)$$

(2)  $\varepsilon_{\text{检}}$ ——检波器带来的相对误差。

检波器的误差来源:

第一、我们是利用电容放电规律和金属棒自由振动时的振幅衰减规律相似这一点,来检取(图4a)的包络线的,因此,如果适当选取放电时间常数  $\tau$ , 原则上是可以使电容放电曲线与铝棒振动的包络线重合,但在实际测量中,电容不可能作连续改变,只能跳跃式地取值,这就使得检波后得到的包络线偏离于检波前的包络线,也就是说检波电压出现了误差。由这个原因而来的测时误差我们称之为  $\varepsilon_{\tau}$ , 其表示式是:

$$\varepsilon_{\tau} = \frac{1}{ft_{21}} \cdot \frac{\Delta\tau}{\tau} \quad (16)$$

式中的  $f$  是棒的振动频率,  $t_{21}$  是衰减时间,  $\frac{\Delta\tau}{\tau}$  是仪器设计时所定的检波电路时间常数的最大允许相对偏差。

第二、检波电路跟随特性不良也可以对测时带来误差,但只要想法使检波器内阻为一定值,则此项误差可忽略。

第三、噪声的影响其表示式是:

$$\varepsilon_N = \frac{e-1}{e} K_{0\text{反}} \cdot K_{0\text{检}} \cdot \frac{u_N}{v_{\text{阈}2}} \left( 1 + \frac{R_i}{R_s} + \frac{R_i}{R_f} \right) \quad (17)$$

式中 $u_N$ 是运算放大器的噪声电压,  $R_i$ ,  $R_f$ ,  $R_s$ 见(图6)。

第四、检波电路由于环境温度变化所引起的电压、电流漂移, 也对测时带来误差, 其表示式是,

$$\varepsilon_T = \frac{e-1}{e} K_{0反} \cdot K_{0检} \cdot \frac{1}{v_{阀2}} \left[ i_d R_s + \left( 1 + \frac{R_i}{R_s} + \frac{R_i}{R_f} \right) u_d \right] \cdot \Delta T \quad (18)$$

式中各符号意义见(图6)。

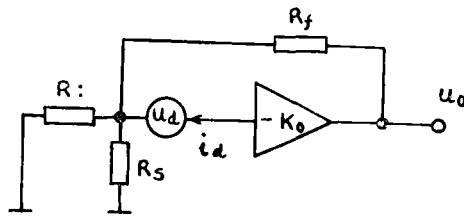


图 六

故从检波器带来的总相对误差是,

$$\bar{\varepsilon}_{检} = \bar{\varepsilon}_s + \bar{\varepsilon}_N + \bar{\varepsilon}_T$$

将(16)、(17)、(18)代入得,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{检} = & \frac{1}{ft_{21}} \cdot \frac{\Delta\tau}{\tau} + \frac{e-1}{e} K_{0反} \cdot K_{0检} \cdot \frac{u_N}{v_{阀2}} \left( 1 + \frac{R_i}{R_s} + \frac{R_i}{R_f} \right) \\ & + \frac{e-1}{e} K_{0反} \cdot K_{0检} \cdot \frac{1}{v_{阀2}} \left[ i_d R_s + \left( 1 + \frac{R_i}{R_s} + \frac{R_i}{R_f} \right) u_d \right] \Delta T \quad (19) \end{aligned}$$

仪器采取的参数是:  $\Delta\tau = \frac{\tau}{19}$ ,  $K_{0反} = -1$ ,  $K_{0检} = -1$ ,  $u_N = 11\mu v$ ,  $v_{阀2} = 1.00v$ ,  $R_i = R_f = 1.00M\Omega$ ,  $R_s = 100k\Omega$ ,  $i_d = 0.20nA/C^\circ$ ,  $u_d = 10\mu v/C^\circ$ 。若  $f = 500Hz$ ,  $t_{21} = 1$ 秒, 则可得,

$$\varepsilon_{检} = 1.88 \times 10^{-4} + 2.02 \times 10^{-4} \Delta T / C^\circ \quad (20)$$

(3)  $\varepsilon_{反}$ ——反相放大器带来的相对误差

反相放大器的误差来源主要是噪声及由于温度变化所引起的电流、电压漂移, 其表示式为,

$$\varepsilon_{反} = \varepsilon_N + \varepsilon_T$$

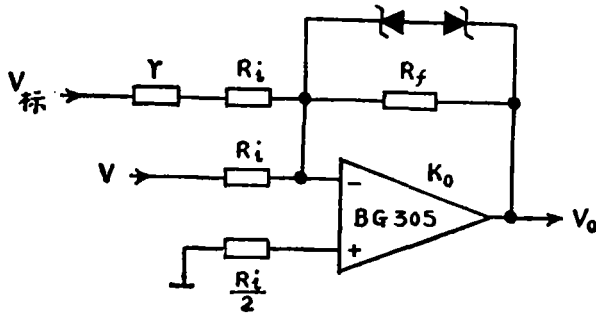
$$= \frac{e+1}{e} K_{0反} \cdot \frac{u_N}{v_{阀2}} \left( 1 + \frac{R_i}{R_s} + \frac{R_i}{R_f} \right) + \frac{e-1}{e} K_{0反} \cdot \frac{1}{v_{阀2}} \left[ i_d R_i + \left( 1 + \frac{R_i}{R_s} + \frac{R_i}{R_f} \right) u_d \right] \Delta T \quad (21)$$

将前述参数代入得:

$$\varepsilon_{反} = -1.81 \times 10^{-4} - 2.02 \times 10^{-4} \cdot \Delta T / C^\circ \quad (22)$$

#### (4) $\bar{\varepsilon}_{比}$ ——电压比较器带来的相对误差

电压比较器的误差来源,首先是由于标准参考电压源的内阻  $r$  及放大倍数  $K_0$ 。(见图7),但只要经过适当调整,可使由  $r$  所引起的误差比  $K_0$  所引起的误差小三个数量级,从而可忽略。余下的误差表示为:



图七

个数量级,从而可忽略。余下的误差表示为:

$$\bar{\varepsilon}_{K0} = -2 \frac{e-1}{e} \left( 1 - \frac{K_0 R_i}{2R_f + R_i} \right) \frac{1}{K_0} \frac{\Delta v_0}{v_{阀2}} \quad (23)$$

式中  $\Delta v_0$  为连接电压比较器的射极耦合双稳态电路的起动电压。其次是噪声及由于温度变化所引起的电流、电压漂移:

$$\varepsilon_N = \frac{e+1}{e} \left( 1 + \frac{R_i}{R_s} + \frac{R_i}{R_f} \right) \frac{u_N}{v_{阀2}} \quad (24)$$

$$\varepsilon_T = \frac{e-1}{e} \cdot \frac{1}{v_{阀2}} \left[ i_d R_i + \left( 1 + \frac{R_i}{R_s} + \frac{R_i}{R_f} \right) u_d \right] \cdot \Delta T \quad (25)$$

因而总的相对误差为:

$$\varepsilon_{比} = \bar{\varepsilon}_{K0} + \varepsilon_N + \varepsilon_T$$

将(23),(24),(25)代入得:

$$\varepsilon_{比} = -2 \frac{e-1}{e} \left( 1 - \frac{K_0 R_i}{2R_f + R_i} \right) \frac{1}{K_0} \frac{\Delta v_0}{v_{阀2}} + \frac{e+1}{e} \left( 1 + \frac{R_i}{R_s} + \frac{R_i}{R_f} \right) \frac{u_N}{v_{阀2}} + \frac{e-1}{e} \cdot \frac{1}{v_{阀2}} \left[ i_d R_i + \left( 1 + \frac{R_i}{R_s} + \frac{R_i}{R_f} \right) u_d \right] \cdot \Delta T \quad (26)$$

将仪器所用参数代入,  $K_0 = 5 \times 10^4$ ,  $R_i = 50k\Omega$ ,  $R_f = \infty$ ,  $v_{\text{阈}2} = 1.00$  伏,  $\Delta v_0 \leq 1$  伏,  $R_s = 50k\Omega$ ,  $i_d = 0.2nA/c^\circ$ ,  $u_d = 10\mu V/c^\circ$  故得:

$$\varepsilon_{\text{比}} = -2.52 \times 10^{-5} + 3 \times 10^{-5} + 1.92 \times 10^{-5} \Delta T / C^\circ \quad (27)$$

(5)  $\varepsilon_{\text{振}}$ ——石英晶体振荡器的相对误差  
仪器使用的是中精度石英晶体振荡器,

$$\varepsilon_{\text{振}} = \frac{\Delta f}{f} = 2 \times 10^{-6} \Delta T / C^\circ \quad (28)$$

将(15)、(20)、(22)、(27)、(28)各式取其绝对值代入(13)式即可得总的测时相对误差, 但要注意的是温度漂移项是同方向影响, 各级之间有相互抵消作用, 计算时应把它们的原符号代入。

从上述讨论中, 可知检波器的温度漂移项与反相放大器的漂移项符号相反, 数值相等〔见(20)式及(22)式〕。

但在计算总误差时不能相消, 原因有两个,

第一, 由于实际使用中两电路所用的运算放大器的漂移不同。

第二, 当温度向不同方向变化时, 检波电路的漂移值不同。

由于检波器和反相器的漂移之和不会超出其单项漂移, 我们计算时只取其中的一项漂移值, 即把(20)、(22)式中的两个相同漂移项可取消一个, 因此仪器总的相对误差是:

$$\bar{\varepsilon} = 5.50 \times 10^{-4} + 2.23 \times 10^{-4} \Delta T / C^\circ \quad (29)$$

#### 四、仪器的测量准确度问题

设计电路时, 我们是以仪器在恒温条件下工作为依据的, 对测时的准确度要求是 $10^{-3}$ 。仪器调整后, 若工作过程中室温变化不超过 $\pm 2^\circ C$ 时, 则根据(29)式有:

$$\bar{\varepsilon} = 9.96 \times 10^{-4} \sim 10^{-3}$$

可知仪器能达到设计要求。

但是, 如果仪器不在恒温条件下工作, 则保证不了仪器设计要求。如将仪器放置在偏离调整温度 $\pm 10^\circ C$ 的环境下使用, 则相对误差为:

$$\bar{\varepsilon} = 2.78 \times 10^{-3}$$

很明显, 测量结果已不能达到设计要求。因此, 为了使仪器能适应不同的工作温度环境要求, 更好地为生产服务, 有必要对电路进行某些修改。

从(20)、(22)、(27)、(28)式可看出温度漂移主要来自检波器和反相放大器。从(18)、(21)式可知, 要减小温漂主要是减小漂移电压 $u_d$ 和漂移电流 $i_d$ 的影响。为了减少 $u_d$ 的影响, 可以把电阻 $R_s$ 取消, 这样 $u_d$ 的影响可以减小约六倍左右(因现有

参数是  $\frac{R_i}{R_s} = \frac{1M\Omega}{100k\Omega} = 10$ 。但取消  $R_s$  后, 失调电流的影响必然增大, 因而必须挑选失调电流小的运算放大器使用。

为了减小漂移电流  $i_d$  的影响, 可以将反相放大器改为电压跟随器, 这样可得:

$$\varepsilon_{T\text{跟}} = -\frac{e-1}{1} \cdot K_{0\text{跟}} \cdot \frac{u_d}{v_{\text{阈}2}} \cdot \Delta T \quad (30)$$

电压跟随器的噪声引起的误差是:

$$\varepsilon_{N\text{跟}} = -\frac{e+1}{e} \cdot \frac{u_N}{v_{\text{阈}2}} \cdot K_{0\text{跟}} \quad (31)$$

经过以上改变, (19)式变为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{检}} = & \frac{1}{ft_{21}} \cdot \frac{\Delta\tau}{\tau} + \frac{e-1}{e} \cdot K_{0\text{跟}} \cdot K_{0\text{检}} \cdot \frac{u_N}{v_{\text{阈}2}} \left( 1 + \frac{R_i}{R_f} \right) \\ & + \frac{e-1}{e} K_{0\text{跟}} \cdot K_{0\text{检}} \cdot \frac{1}{v_{\text{阈}2}} \left[ i_d R_i + \left( 1 + \frac{R_i}{R_f} \right) u_d \right] \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (32)$$

将上节的参数及  $K_{0\text{跟}} = 1, R_i = R_f = 500k\Omega$  代入得:

$$\varepsilon_{\text{检}} = 1.19 \times 10^{-4} - 7.58 \times 10^{-5} \cdot \Delta T / C^\circ \quad (33)$$

(21)式由下式代替:

$$\varepsilon_{\text{跟}} = -\frac{e+1}{e} K_{0\text{跟}} \cdot \frac{u_N}{v_{\text{阈}2}} - \frac{e-1}{e} K_{0\text{跟}} \cdot \frac{u_d}{v_{\text{阈}2}} \cdot \Delta T \quad (34)$$

将参数代入:

$$\varepsilon_{\text{跟}} = -1.51 \times 10^{-5} - 6.32 \times 10^{-5} \cdot \Delta T / C^\circ \quad (35)$$

这样, 仪器总的相对误差由(13)式变为:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{交}} + \varepsilon_{\text{检}} + \varepsilon_{\text{跟}} + \varepsilon_{\text{比}} + \varepsilon_{\text{振}} \quad (36)$$

将(15).(33).(35).(27).(28)等式的绝对值代入(36)式, 但温漂项保持原有符号, 运算后再取绝对值, 得:

$$\varepsilon = 3.15 \times 10^{-4} + 6.11 \times 10^{-5} \Delta T / C^\circ \quad (37)$$

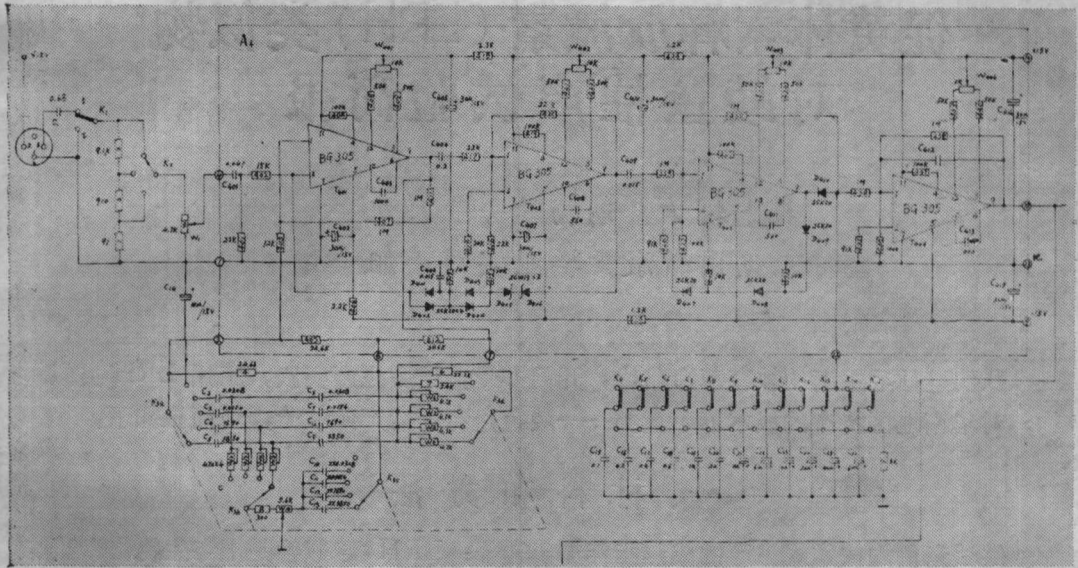
若仍维持  $10^{-3}$  准确度的要求, 则从(37)式得仪器使用温度范围  $\Delta T$  为:

$$\Delta T = 11.2C^\circ \quad (38)$$

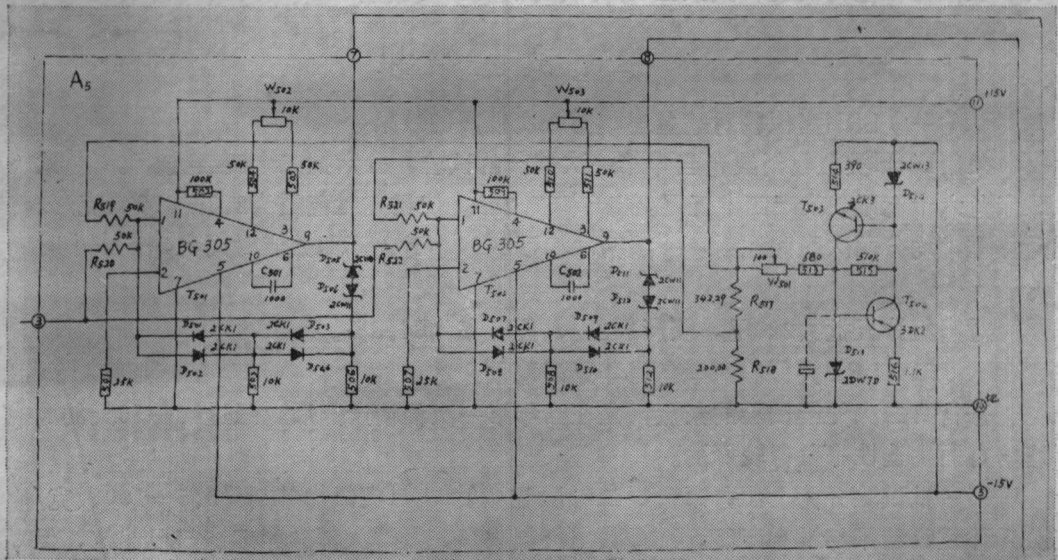
可见经上述修改后, 仪器的工作范围可从偏离调整温度  $\pm 2^\circ C$  扩展到偏离调整温度  $\pm 11C^\circ$ 。

## 五、单元电路

(图8)是选频放大器、线性检波、反相放大器的电路图。(图9)是电压比较器的部份电路图。



图八



图九