

关于馬氏过程定义的几点注記*

戴永隆

(数学力学系)

如所周知,近代馬氏过程的严格的邏輯基础是由 Колмогоров 开始其后由 Doob, Дынкин 等人建立起来的。Doob 从随机过程的观点出发,为馬氏过程給出了一个严格而完整的定义([1]第二章§6.)。Дынкин 对創建具有連續参数的馬氏过程的邏輯基础方面作出了許多卓越的工作[2]。

在 Дынкин 的工作中,有一个突出的地方是对过程引进了生命的概念,即在基本空間 Ω 上給定非負函数 $\zeta(\omega)$, $\omega \in \Omega$ 。而质点 ω 的持續运动时间是 $[0, \zeta(\omega))$, 在 $\zeta(\omega)$ 以后质点的运动消失了。

虽然对相当广泛的一类所謂正规过程而言,可以人为地把中断过程化为不断过程([2]第六章§1.)。然而,由于生命 ζ 的引进对馬氏过程的研究开辟了許多新的方向,如子过程、部分过程、自然拓扑的引进等等,从而更加清楚地了解馬氏过程的结构及其軌道性质,提供了利用馬氏过程解决某些偏微分方程边界問題的較大可能性,因而生命 ζ 的引进有它的重要意义。

本文目的,就是要把 Дынкин 定义中 ζ 的概念推广。在 Дынкин 的定义中,時間 t 所考虑的样本空間是 $\{\zeta > t\} = \Omega_t$, 显然当 t 增加时, Ω_t 不增。本文要做的就是样本空間随時間任意变化的情况下,来研究过程的馬氏性这一概念。結果得到,在这种情况下,[2]中所得出的許多結果均能作相应的推广。为了不使本文叙述冗长繁瑣起见,这里只考察上述书中的几个最重要方面,有些类似于书[2]的証明亦将省略。

§1 关于馬氏过程的定义

1.1. 定义: 設給定:

Ω 为一抽象集; $I = [0, \infty)$; $T \subset I \times \Omega$, 即 T 为乘积集 $I \times \Omega$ 的子集; T_t 为 T 之 t 截口; $T\omega$ 为 T 之 ω 截口($\omega \in \Omega, t \in I$)。

* 本文是作者在梁之舜导师指导下学习 Дынкин 的著作:《馬尔科夫过程論基础》时所写的讀書心得整理而成的。

M^* 为 Ω 上一族 σ 代数 ($s \in I$), M_t^s 对任意 $0 \leq t$ 为 T_t 上之 σ 代数, 且对任意 $t \geq s$, $M_t^s \subseteq M^*$.

(E, B) 为可测空間, B 包含 E 的单点子集.

$x_t(\omega)$ 为 $T \rightarrow E$ 上的映象.

称 $X = (x_t, T, M_t^s, P_{s,x})$ 为馬氏过程, 如果它滿足:

1.1A. 如 $s \leq t \leq u$, $A \in M_t^s$, 則 $\{A, T_u\} \in M_u^s$.

1.1B. $\{x_t \in \Gamma\} \in M_t^s$, 对任意 $0 \leq s \leq t$, $\Gamma \in B$ 均成立.

1.1C. 对任意 $s \in I$, $x \in E$, $P_{s,x}$ 为 M^* 上之概率测度.

1.1D. 对任意 $0 \leq s \leq t$, $\Gamma \in B$,

$$P_{s,x}(X_t \in \Gamma) = P(s, x; t, \Gamma)$$

为 x 的 B 可测函数.

1.1E. $P(s, x; s, E-x) = 0$.

1.1F. 如果 $0 \leq s \leq t \leq u$, $x \in E$, $\Gamma \in B$, 則

$$P_{s,x}(x_u \in \Gamma | M_t^s) = P(t, x_t; u, \Gamma) \quad (\Pi, H, T_t; P_{s,x}). \quad (1.1)$$

显然, 在 ДЫНКИН 定义下有

$$T = \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega \times [0, \zeta), \quad T_t = \{\zeta > t\}, \quad T\omega = [0, \zeta).$$

条件 1.1F 等价于

1.1F¹. 如果 $0 \leq s \leq t \leq u$, $x \in E$, $\Gamma \in B$, $A \in M_t^s$, 則

$$P_{s,x}(x_u \in \Gamma, A) = \int_A P(t, x_t; u, \Gamma) P_{s,x}(d\omega). \quad (1.2)$$

1.2. 記 N^* 为一切形如 $(x_t \in \Gamma, t \geq s, \Gamma \in B)$ 之集所产生的 σ 代数; N_t^s 为 T_t 上之 σ 代数, 由下列集所产生:

$$\{x_u \in \Gamma, u \in (s, t], t \geq s\} \cap T_t.$$

当 $0 \leq s \leq t \leq u$, $A \in M_t^s$, $\Gamma \in B$, 令

$$P(s, x; A; u, \Gamma) = P_{s,x}(x_u \in \Gamma, A)$$

由映象的表示論知 (1.2) 等价于

$$P(s, x; A; u, \Gamma) = \int_E P(s, x; A; t, dy) P(t, y; u, \Gamma). \quad (1.3)$$

写整齐一点就是 (因 $P(t, y; u, \Gamma) = P(t, y; T_u; u, \Gamma)$),

$$P(s, x; A; u, \Gamma) = \int_E P(s, x; A; t, dy) P(t, y; T_u; u, \Gamma).$$

$$(0 \leq s \leq t \leq u, A \in M_t^s, \Gamma \in B)$$

令 $T_t = A$, 則

$$P(s, x; T_1; u, \Gamma) = \int_E P(s, x; T_1; t, dy) P(t, y; T_u; u, \Gamma) \quad (1.4)$$

这与通常的柯一切氏方程不同, 因为左边 T_1 不可省略。

对任意 n , 令

$$P(s, x; t_1, \Gamma_1; \dots; t_n, \Gamma_n) = P_{s,x}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n),$$

仍有: 当 $s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in B$ 时

$$\begin{aligned} P(s, x; t_1, \Gamma_1, \dots, t_n, \Gamma_n) &= \int_{\Gamma_{n-1}} P(s, x; t_1, \Gamma_1, \dots, t_{n-1}, dy) P(t_{n-1}, y; t_n, \Gamma_n) \\ &= \int_{\Gamma_1} \dots \int_{\Gamma_{n-1}} P(s, x; t, dy_1) \dots P(t_{n-1}, y_{n-1}; t_n, \Gamma_n) \end{aligned} \quad (1.5)$$

引理1.1 对任意 $s \geq 0$, $A \in N^s$, $P_{s,x}(A)$ 是 x 的 B 可测函数。(证略。这引理与以下引理1.2及定理1.1证法与[2]同。)

要推广馬氏性, 首先要推广 Дынкин 书关于条件概率的一个性质 ([2]性质 1.6 Ж)。

引理1.2 设 $(\mathcal{Q}, M, P)$ 为概率空间, $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{Q}$, A_1, A_2 分别为 $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ 上之 σ 代数, $A_1, A_2 \subseteq M$, $A_1 \cap \mathcal{Q}_2 \subset A_2$, 如果 η 在 $\mathcal{Q}_2$ 上 P 可积, ζ 在 $\mathcal{Q}_2$ 外为零。在 $\mathcal{Q}_2$ 上 A_2 可测, 则

$$M(\zeta \eta | A_1) = M(\zeta M(\eta | A_2) | A_1) \quad (\Pi. H. \mathcal{Q}_1; P) \quad (1.6)$$

如果 $A \in A_1$, $B \in M$ 则

$$P(AB | A_1) = M(\chi_A P(B | A_2) | A_1) \quad (\Pi. H. \mathcal{Q}_1; P) \quad (1.7)$$

(注意: 此处与[2] 1.6 Ж 不同在于此处不必 $\mathcal{Q}_2 \supset \mathcal{Q}_1$)

定理1.1 设 $(x_t, T, M_t^s, P_{s,x})$ 是馬氏过程, $0 \leq s \leq t$, $B \in N^t$, 则

$$P_{s,x}(B | M_t^s) = P_{t,x_t}(B) \quad (\Pi. H. T_t; P_{s,x}) \quad (1.8)$$

如 $\zeta \in N^t$ 可测, $P_{s,x}$ 可积, 且 ζ 在 T_t 外为 0, 则

$$M_{t,x}(\zeta | M_t^s) = M_{t,x_t} \zeta \quad (\Pi. H. T_t; P_{s,x}) \quad (1.9)$$

定理1.1的积分形式如下:

如 $A \in M_t^s$, $B \in N^t$ 则

$$P_{s,x}(A) = \int_A P_{t,x_t}(B) P_{s,x}(d\omega) \quad (1.10)$$

如 $\zeta \in N_t^s$ 可测, $\eta \in N^t$ 可测, $\eta, \zeta \eta, P_{s,x}$ 可积, 则

$$M_{s,x} \zeta \eta = M_{s,x}(\zeta M_{t,x_t} \eta) \quad (1.11)$$

1.3. 设 $X = (x_t, T, M_t^s, P_{s,x})$, $\bar{X} = (\bar{x}_t, \bar{T}, \bar{M}_t^s, \bar{P}_{s,x})$ 是定义在同一相空间 (E, B) 上的两个馬氏过程, 称 $\bar{X}$ 由 X 經变换基本事件空间而来, 如存在映象 $\gamma: \bar{\pi} \rightarrow \pi$ 使

$$1.3A. \bar{T}_{\bar{\omega}} = T_{\gamma \bar{\omega}} \quad (\bar{\omega} \in \bar{\pi})$$

$$1.3B. \bar{X}_t(\omega) = x_t(\gamma\omega) \quad (\omega \in \bar{\Omega})$$

$$1.3C. \bar{M}_t^s = \gamma^{-1} M_t^s$$

$$1.3D. \bar{M}^s = \gamma^{-1} M^s \text{ 且对 } A \in M^s, \bar{P}_{s,x}(\gamma^{-1}A) = P_{s,x}(A).$$

为了映象 $\gamma: \bar{\Omega} \rightarrow \Omega$ 給出过程 X 的基本事件空間的变换, 充要条件是滿足:

1.3a 对任意 $s \geq 0, x \in E, A \in M^s, A \supseteq \gamma\bar{\Omega}$, 推知 $P_{s,x}(A) = 1$.

称 $\bar{X}$ 从属于 X , 如存在 $\gamma: \bar{\Omega} \rightarrow \Omega$ 滿足 1.3A, 1.3B. 及

$$1.3C' \bar{M}_t^s \supseteq \gamma^{-1} M_t^s$$

$$1.3D' \bar{M}^s \supseteq \gamma^{-1} M^s \text{ 且当 } A \in M^s, \bar{P}_{s,x}(\gamma^{-1}A) = P_{s,x}(A).$$

1.4. 設 S 为任意非負实数集, $\varphi(t)$ ($t \in S$) 为取值于 E 中的函数. 对一切 $S \subset I$, 所有这些函数的全体記作 $\mathcal{Q}_E$. 称 $\varphi = \psi$, 当且只当 φ 与 ψ 有相同的定义域 $S_\varphi = S_\psi$, 且当 $t \in S_\varphi, \varphi(t) = \psi(t)$.

設 $\hat{T}$ 为 $I \times \mathcal{Q}_E$ 上一子集, $\hat{T}_t$ ($t \in I$) 为 $\hat{T}$ 之 t 截口, 令 $\hat{x}_t(\varphi) = \varphi(t)$, (当 $t \in \hat{T}_\varphi, \hat{T}_\varphi$ 为 $\hat{T}$ 之 φ 截口.) $\hat{N}^s$ 为所有集 $\{\varphi, X_u(\varphi) \in \Gamma, u \geq s\}$ 所产生的 σ 代数, $\hat{N}_t^s$ 为 $\{\varphi: \hat{x}_u(\varphi), u \in [s, t]\} \cap \hat{T}_t$ 所产生之 σ 代数.

馬氏过程称为正则的, 如果 $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_E, X_t = \hat{x}_t, T = \hat{T}, M_t^s = \hat{N}_t^s, M^s = \hat{N}^s$.

今設 $X = (X_t, T, M_t^s, P_{s,x})$ 为任意馬氏过程, 令 $\varphi(t) = X_t(\omega)$ ($t \in T\omega$), 这給出了映象 $\gamma: \Omega \rightarrow \mathcal{Q}_E$, 然后用上述方法形成 $\hat{X} = (\hat{x}_t, \hat{T}, \hat{N}_t^s, \hat{P}_{s,x})$, (此处对每一 $A \in \hat{N}^s$, 令 $\hat{P}_{s,x}(A) = P_{s,x}(\gamma^{-1}A)$.) 这显然是一馬氏过程, 称 $\hat{X}$ 为 X 的典范形式.

过程 $\bar{X}$ 与 X 称为等价的, 如果它們有相同的相空間与相重合的轉移函数 $P(s, x; t, \Gamma)$.

§ 2 关于子过程

2.1. 定义: 設 $X = (x_t, T, M_t^s, P_{s,x})$, $\bar{X} = (\bar{x}_t, \bar{T}, \bar{M}_t^s, \bar{P}_{s,x})$ 为定义在同一相空間 (E, B) 上的两个馬氏过程, $\mathcal{Q}$ 及 $\bar{\Omega}$ 分别为 X 及 $\bar{X}$ 的基本事件空間, 称 $\bar{X}$ 为 X 的子过程, 如果存在映象 $\gamma: \bar{\Omega} \rightarrow \Omega$ 滿足:

$$2.1A \quad \bar{T}_\omega \subseteq T_{\gamma\omega}.$$

$$2.1B \quad \bar{X}_t(\omega) = X_t(\gamma\omega) \quad (t, \omega) \in \bar{T}.$$

$$2.1C \quad \text{若 } A \in M_t^s, \text{ 则 } \{\gamma^{-1}A, \bar{T}_t\} \in \bar{M}_t^s.$$

$$2.1D \quad \bar{M}^s \supseteq \gamma^{-1} M^s, \text{ 且若 } A \in M^s, \text{ 则}$$

$$\bar{P}_{s,x}(\gamma^{-1}A) = P_{s,x}(A)$$

如把 π 与 $\mathcal{Q}$ 看作相同, 則上述定义述成

$$2.1A' \quad \bar{T} \subset T.$$

$$2.1B' \quad \bar{X}_t(\omega) = X_t(\omega) \quad (t, \omega) \in \bar{T}.$$

$$2.1C' \quad \text{若 } A \in M_t^*, \text{ 則 } \{A, \bar{T}_t\} \in \bar{M}_t^*.$$

$$2.1D' \quad \bar{M}^* \supseteq M^*, \text{ 且若 } A \in M^*, \text{ 則 } \bar{P}_{s,x}(A) = P_{s,x}(A).$$

2.2. 为了对馬氏过程的子过程理論得出有益的结果, 必須补充一些限制。

設 $X = (X_t, T, M_t^*, P_{s,x})$ 是馬氏过程, n 为任意自然数, $s = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$. 令

$N(s, s_1, \dots, t_n)$ 为集合 $\bigcap_{i=1}^n T_{t_i}$ 上的 σ 代数, 它由一切形如: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 之集所产生, 其中 $A_i \in N_{t_i}^{t_{i-1}}$.

以后討論的子过程都附有如下假定:

$$2.2\alpha \quad \text{若 } A \in N_t^*, \text{ 則 } \{A, \bar{T}_t\} \in \bar{N}_t^*.$$

$$2.2\beta \quad \text{对每 } X \in E, s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n, n \text{ 任意, 有}$$

$$\bar{P}_{s,x}(\bar{T}_{t_1} \cap \bar{T}_{t_2} \cap \dots \cap \bar{T}_{t_n} | M^*) = \alpha(s, t_1, \dots, t_n) (\Pi. H. \bigcap_{i=1}^n T_{t_i}; P_{s,x}) \quad (2.1)$$

此处 $\alpha(s, t_1, \dots, t_n)$ 为某一 $N(s, t_1, \dots, t_n)$ 可测函数。

显然对任意 $n, s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ 成立

$$\bar{P}_{s,x}(\bar{T}_{t_1} \cap \dots \cap \bar{T}_{t_n} | M^*) = 0 \quad (\Pi. H. \bigcap_{i=1}^n T_{t_i}; P_{s,x}) \quad (2.2)$$

引理2.1 設 $\bar{X}$ 是 X 的子过程, 函数組 $\alpha(s, t_1, \dots, t_n)$ 由2.2 β 定义, 于是对任意 $B \in M^*$,

$$\bar{P}_{s,x}(B, \bar{T}_{t_1} \cap \dots \cap \bar{T}_{t_n}) = M_{s,x} \chi_B(s, t_1, \dots, t_n) \quad (2.3)$$

对任意 M^* 可测函数 ξ , 若 $\xi P_{s,x}$ 可积,

$$\bar{M}_{s,x} \xi \chi_{\bar{T}_{t_1}} \cap \dots \cap \chi_{\bar{T}_{t_n}} = M_{s,x} \xi \alpha(s, t_1, \dots, t_n) \quad (2.4)$$

对任意 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in B$ 有

$$\bar{P}_{s,x}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, \bar{X}_{t_n} \in \Gamma_n) = M_{s,x} \chi_{\Gamma_1}(x_{t_1}) \dots \chi_{\Gamma_n}(x_{t_n}) \alpha(s, t_1, \dots, t_n) \quad (2.5)$$

事实上, (2.3), (2.4)由条件概率与条件数学期望的性质推出, (2.5)由(2.3)

推出, 只須用

$$\{\bar{X}_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, \bar{X}_{t_n} \in \Gamma_n\} = \{X_{t_1} \in \Gamma_1 \dots X_{t_n} \in \Gamma_n \cap \bigcap_{i=1}^n \bar{T}_{t_i}\}$$

由上面的(2.5)可得結論: 如 X 有两个子过程 $\bar{X} = (\bar{X}_t, \bar{T}, \bar{M}_t^*, \bar{P}_{s,x})$, 与 $\bar{X} = (\bar{X}_t, \bar{T}, \bar{M}_t^*, \bar{P}_{s,x})$, 則 $\bar{X}$ 与 $\bar{X}$ 等价之充分且必要的条件为: 对任意 n , 及 $s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$

$$\bar{M}_{s,x} \left(\chi_{T_1}(X_{t_1}) \cdots \chi_{T_n}(X_{t_n}) \right) \left(\bar{\alpha}(s, t_1, \dots, t_n) - \bar{\alpha}(s, t_1, \dots, t_n) \right) = 0 \quad (2.6)$$

其中 $\bar{\alpha}$ 与 $\bar{\alpha}$ 对应于 $\bar{X}$ 与 $\bar{X}$ 由2.2 β 定义的函数。

定理2.1 設 $\bar{X}$ 是 X 的子过程, $\alpha(s, t_1, \dots, t_n)$ 由2.2 β 定义, 則对任意 n , $s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $X \in E$ 成立

$$\alpha(s, t_1, \dots, t_n) = \alpha(s, t_1, \dots, t_{n-1})\alpha(t_{n-1}, t_n) \quad (\text{H.H.} \bigcap_{i=1}^n T t_i P_{s,x}) \quad (2.7)$$

(証明) 先証关系: 对任意 $A \in N(s, t_1, \dots, t_{n-1})$, $B \in N_{t_n}^{t_{n-1}}$ 有

$$\bar{P}_{s,x}(AB, \bigcap_{i=1}^n \bar{T} t_i) = [M_{s,x} \alpha(s, t_1, \dots, t_{n-1}) \alpha(t_{n-1}, t_n)] \quad (2.8)$$

由条件2.2 $\alpha\{B, \bar{T} t_n\} \in N_{t_n}^{t_{n-1}}$, 然因 $\{A, \bar{T} t_{n-1}\} \in M_{t_{n-1}}^s$, 故利用(1.10)得

$$\begin{aligned} \bar{P}_{s,x}\{AB, \bigcap_{i=1}^n \bar{T} t_i\} &= \bar{P}_{s,x}(A, \bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{T} t_i, B, \bar{T} t_n) \\ &= \bar{M}_{s,x} \chi_A \chi_{\bar{T} t_1} \cdots \chi_{\bar{T} t_{n-1}} P_{t_{n-1}, x_{t_{n-1}}}(B, \bar{T} t_n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

由(2.3)

$$\bar{P}_{t_{n-1}, y}(B, \bar{T} t_n) = M_{t_{n-1}, y}[\chi_B \alpha(t_{n-1}, t_n)] \quad (2.10)$$

由(2.3)(2.9)(2.10)有

$$\bar{P}_{s,x}(AB, \bigcap_{i=1}^n \bar{T} t_i) = M_{s,x}\{\alpha(s, t_1, \dots, t_{n-1}) \chi_A M_{t_{n-1}, x_{t_{n-1}}}[\chi_B \alpha(t_{n-1}, t_n)]\}$$

又由过程的馬氏性得

$$\begin{aligned} M_{s,x}[\chi_{AB} \alpha(s, t_1, \dots, t_{n-1}) \alpha(t_{n-1}, t_n)] \\ = M_{s,x}[\alpha(s, t_1, \dots, t_{n-1}) \chi_A M_{t_{n-1}, x_{t_{n-1}}}[\chi_B \alpha(t_{n-1}, t_n)]] \end{aligned} \quad \text{故有(2.8)}$$

由于形如

$$\{AB, A \in N(s, t_1, \dots, t_{n-1}), B \in N_{t_n}^{t_{n-1}}\}$$

之集全体形成 π 系, 而且

$$N(s, t_1, \dots, t_n) = \sigma(N(s, t_1, \dots, t_{n-1}), N(t_{n-1}, t_n))$$

(此处用記号, 若 F_1, F_2 为 F 的子 σ 代数, 以 $\sigma(F_1, F_2)$ 記一切形如 $\{AB, A \in F_1, B \in F_2\}$ 所产生的 σ 代数。)因而利用众所周知的方法, 可証对任意 $D \in N(s, t_1, \dots, t_n)$ 有

$$\bar{P}_{s,x}(D, \bigcap_{i=1}^n \bar{T} t_i) = M_{s,x}[\chi_D \alpha(s, t_1, \dots, t_{n-1}) \alpha(t_{n-1}, t_n)]$$

由于 $\alpha(s, t_1, \dots, t_{n-1}) \alpha(t_{n-1}, t_n)$ 显然 $N(s, t_1, \dots, t_n)$ 可測, 故

$$\bar{P}_{s,x}\left(\bigcap_{i=1}^n T t_i \mid N(s, t_1, \dots, t_n)\right) = \alpha(s, t_1, \dots, t_n) = \alpha(s, t_1, \dots, t_{n-1})\alpha(t_{n-1}, t_n) \quad (\text{H.H.} \bigcap_{i=1}^n T t_i P_{s,x}).$$

定理証完。

2.3. 过程 $\bar{X}$ 称为 X 的标准子过程, 如果它是 X 的子过程, 而且满足:

2.3A 过程 $\bar{X}$ 的基本事件空間 $\bar{\Omega}$ 与 X 的基本事件空間 Ω 有关系

$$\bar{\Omega} = \Omega \times I, \quad I = [0, \infty) \quad \gamma(\omega, \lambda) = \omega, \quad (\omega \in \Omega, \lambda \in I)$$

2.3B $\bar{T}(\omega, \lambda) = T\omega \cap [0, \lambda)$

2.3C $\bar{X}_t(\omega, \lambda) = x_t(\omega)$ 当 $t \in \bar{T}(\omega, \lambda)$

2.3D $\bar{M}_t^*$ 由一切形如 $A \times [t, \infty)$ 的集組成, 其中 $A \in M_t^*$

2.3E $\bar{M}^*$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的 σ 代数, 它由集

$$\{A, T_t\} \times (t, \infty), \quad (A \in M^*, t \geq s) \text{ 及 } A \times I \mid A \in M^* \text{ 所組成。}$$

函数組 $\{\alpha(s, t_1, \dots, t_n)\}$ 对任意 $n, s \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n, \omega \in \bigcap_{i=1}^n T_{t_i}$ 有定义, 且 $\alpha(s, t_1, \dots, t_n)$

$-N(s, t_1, \dots, t_n)$ 可测, $0 \leq \alpha(s, t_1, \dots, t_n) \leq 1$ (II.H. $\bigcap_{i=1}^n T_{t_i}, P_{s,x}$), 而且滿足

$$\alpha(s, t_1, \dots, t_n) = \alpha(s, t_1, \dots, t_{n-1})\alpha(t_{n-1}, t_n) \quad (\text{II.H. } \bigcap_{i=1}^n T_{t_i}, P_{s,x}) \text{ 則称为对过程 } X \text{ 的}$$

几可乘泛函。

定理2.2 設 X 是馬氏过程, $\{\alpha(s, t_1, \dots, t_n)\}$ 为 X 的几可乘泛函, $\gamma, \pi, \bar{X}, \bar{M}_t^*, \bar{M}^*$ 如 2.3A—2.3E 給出, 要使 X 有标准子过程对应于几可乘泛函 $\alpha(s, t_1, \dots, t_n)$ 的充分且必要条件为:

2.3 α : 如果在 $\bar{M}^*$ 上可以給定一族测度 $\{\bar{P}_{s,x}; S \in I, x \in E\}$ 使当对任意 $A \in M^*$, $\bar{P}_{s,x}(A \times I) = P_{s,x}(A)$, 而对任意 $n, s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$,

$$A_1 = \{C_1, T_{t_1}\} \times (t_1, \infty) \quad C_1 \in M^*$$

$$A_2 = \{C_2, T_{t_2}\} \times (t_2, \infty) \quad C_2 \in M^*$$

.....

$$A_n = \{C_n, T_{t_n}\} \times (t_n, \infty) \quad C_n \in M^*$$

有

$$\bar{P}_{s,x}(A_1 \cdots A_n) = M_{s,x} z_{C_1} \cdots z_{C_n} \alpha(s, t_1, \dots, t_n) \quad (2.11)$$

如 2.3 α 滿足, 則 $\bar{X} = (\bar{X}_t, \bar{T}, \bar{M}_t^s, \bar{P}_{s,x})$ 即 X 的标准子过程,

証明: 必要性明显。

充分性: 設 2.3 α 已滿足, 首先驗證 $\bar{X} = (\bar{X}_t, \bar{T}, \bar{M}_t^s, \bar{P}_{s,x})$ 是馬氏过程。

只須驗證 1.1F', 設 $A \in \bar{M}_t^s$ 則 $A = C \times [t, \infty)$, 其中 $C \in M_t^s$, 于是对任意 $s \leq t \leq u$,

$$\begin{aligned} \bar{P}_{s,x}(A, \bar{X}_u \in \Gamma) &= \bar{P}_{s,x}[\{C, X_u \in \Gamma\} \times (u, \infty)] \\ &= M_{s,x} z_C z_\Gamma(x_u) \alpha(s, t, u) = M_{s,x} [\alpha(s, t) z_C z_\Gamma(x_u) \alpha(t, u)] \\ &= M_{s,x} [z_C \alpha(s, t) M_{s,x}(\alpha(t, u) z_\Gamma(x_u) \mid M_t^s)] \\ &= M_{s,x} [z_C \alpha(s, t) \bar{P}(t, x_t, u, \Gamma)] \end{aligned}$$

即

$$\bar{P}_{s,x}(A, X_u \in \Gamma) = M_{s,x} \{z_C \alpha(s, t) \bar{P}(t, x_t, u, \Gamma)\}$$

由(2.11)推出: 对任意 M^* 可测函数 ξ

$$\bar{M}_{s,x} \xi \chi_{\bar{T}_{t_1}} \cdots \chi_{\bar{T}_{t_n}} = M_{s,x} \xi \alpha(s, t_1, \dots, t_n)$$

从而得到

$$\bar{P}_{s,x}(A, \bar{X}_n \in \Gamma) = M_{s,x}[\chi_A \bar{P}(t, \bar{X}_n, u, \Gamma)]$$

此式說明 $\bar{X}$ 滿足 1.1F¹, 从而 $\bar{X}$ 是馬氏过程, 显然 $\bar{X}$ 是 X 的标准子过程, 对应几可乘泛函 $\alpha(s, t, \dots, t_n)$ 。

2.4, 定义: 設 X 为馬氏过程, 如果存在 $\mathcal{Q}$ 上的非負函数 $\xi(\omega)$ 使 $T_1 = \{\xi \leq t\}$, 則称 X 为样本递升过程. $\xi(\omega)$ 称为过程运动的初始时刻。

定理2.3 設 $\bar{X}$ 为样本递升过程 X 的样本递升子过程, $\bar{\xi}$, ξ 分别为 $\bar{X}$ 与 X 初始运动时刻, $\{\alpha(s, t_1, \dots, t_n)\}$ 为对应于 2.2 β 的函数, 則

$$2.4A \quad \alpha(s, t) = \alpha(s, t) \alpha(u, v) \quad (s \leq t \leq u \leq v) \quad (\Pi.H.T., P_{s,x})$$

$$2.4B \quad 0 \leq \alpha(s, t) \leq 1 \quad (\Pi.H.T., P_{s,x})$$

$$2.4C \quad \lim_{t_n \downarrow t} \alpha(s, t_n) = \alpha(s, t) \quad (\Pi.H.T., P_{s,x})$$

証明是显然的。

由于这个引理, $\alpha(s, t_1, \dots, t_n)$ 对这种子过程說来, 只須两个变量就行了, 称組 $\{\alpha(s, t)\}$ 为样本递升过程的可乘泛函, 如果 $\alpha(s, t) - N^*t$ 可测, 对所有 $\omega \in T_t$, 2.4A—2.4C 滿足, 而且滿足

$$2.4D \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(s, t) = 1 \quad \text{对一切 } \omega \in T_s.$$

定理2.4 設 X 是样本递升过程 $\{\alpha(s, t)\}$ 为 X 的可乘泛函, 則存在 X 的样本递升子过程, 滿足 $\bar{P}_{s,x}(\bar{\xi} \leq t | M^*) = \alpha(s, t) \quad (\Pi.H.T.; P'_{s,x})$

証明 令

$$\bar{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q} \times I \quad I = [0, \infty) \quad \gamma(\omega, \lambda) = \omega \quad (\omega \in \mathcal{Q}, \lambda \in I)$$

$$\bar{\xi}(\omega, \lambda) = \max(\xi, \lambda) \quad (\omega \in \mathcal{Q}, \lambda \in I)$$

$$\bar{X}(\omega, \lambda) = x_t(\omega) \quad (\bar{\xi}(\omega, \lambda) \geq t)$$

$$\bar{M}_t^s = M_t^s \times B_t^0 \text{ 其中 } B_t^0 \text{ 为 } [0, t] \text{ 上一切半开区間所产生的 } \sigma \text{ 代数}$$

$\bar{M}^s$ 为 $\bar{\mathcal{Q}}$ 上之 σ 代数, 由集

$$A \times I, (A \in M^*), \{A, T_t\} \times B \quad (A \in M^*, B \in B_t^0, t \geq s)$$

用下面的方法构造 $\bar{P}_{s,x}$

固定 $\omega \in \mathcal{Q}$, 令

$$F^*(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \max(s, \bar{\xi}) \\ \alpha(s, t) & \max(s, \bar{\xi}) \leq t \end{cases}$$

显然 $F^*(t)$ 对 t 不降, 非負, 右連續, 从而存在 $[0, \infty]$ 上的概率测度 $\alpha_{\bar{F}}^s(\Gamma \in B_{\infty}^0)$ 使

$$\alpha_{[0,t]}^s = F^s(t)$$

$$\text{当 } \omega \in T, t \geq s \quad \alpha_{[0,t]}^s = \alpha(s, t)。$$

設 $A \in \bar{M}^s$, 則 $A \in M^s \times B_\infty^0$, 故

$$A\omega = \{\lambda: (\omega, \lambda) \in A\} \in B_\infty^0$$

容易証明, 对一切 $A \in \bar{M}^s$, 函数 $\alpha_A^s = \alpha_{A,\omega}^s(\omega)$ 是 M^s 可測的, 令 $\bar{P}_{s,x}(A) = M_{s,x} \alpha_A^s$ 。

容易驗證 $\bar{X} = (\bar{X}_t, \bar{T}, \bar{M}_t^s, \bar{P}_{s,x})$ 是馬氏过程, 而且滿足定理中的条件。

§ 3 关于强馬氏过程

最后, 对强馬氏过程定义作一适应于现在的情况的簡短注記。

設 X 为馬氏过程, τ 在 $\mathcal{Q}$ 上的子集 $\mathcal{Q}_\tau$ 上定义, 称它为不依赖于将来与 s 过去随机变量, 如果滿足

3.A $\mathcal{Q}_\tau \in M^s$, 当 $\omega \in \mathcal{Q}_\tau$ 时, $\tau(\omega) \geq s, \tau(\omega) \in T\omega$ 。

3.B 对任意 $0 \leq s \leq u \leq t$, $\{\omega: \tau \leq u, T_t\} \in M_t^s$ 。

取 $A \in M_\tau^s$, 如果 $A \in M^s, A \subset \mathcal{Q}_\tau$ 且 $\{A, \tau \leq u, T_t\} \in M_t^s$, ($s \leq u \leq t$) 显然, M_t^s 是 $\mathcal{Q}_\tau$ 上的 σ 代数, 且 $M_t^s \subset M^s$ 。

X 称为可測过程馬氏过程, 如果对任意 $t \geq s$, 集 $T_{[s,t]} = \bigcup_{u \in [s,t]} \{u \times T_u T_t\} \in B_t^s \times N_t^s$,

且 $x_u(\omega)$ 为可測空間 $[T_{[t,s]}, B_t^s \times N_t^s, T_{[s,t]}]$ 到 (E, B) 上之映像可測, 强馬氏过程的定义:

設 $X = (X_t, T, N_t^s, P_{s,x})$ 为可測馬氏过程, 滿足条件

3.C $P(s, x; t, \Gamma)$ 是 (s, x, t) 的 $B^s \times B \times B^s$ 可測函数。 ($s \geq t, x \in E, \Gamma \in B$)

3.D 若 τ 为不依赖于将来与 s 过去的随机变量, 則对任意 M_t^s 可測函数 $\eta(\omega) \geq \tau$, $\Gamma \in B$ 有 $P_{s,x}(X_\eta \in \Gamma | M_t^s) = P(\tau, x_\tau, \eta, \Gamma) (\Pi. H. \mathcal{Q}_\tau, P_{s,x})$ 則称 X 为强馬氏过程。

对于〔2〕中关于强馬氏过程的一些結果均可以作相应的推广, 不过在推广过程中需要克服一些技术上的新困难才能合适现在情况, 特別要証明〔2〕中定理 5.1 中, 不但要适当修改定理本身, 而且与其相关的〔2〕中引理 5.1, 5.2 都得适当改动, 証明也稍有不同。本文只打算就馬氏过程的定义作一点注記, 为了避免冗长, 就不累贅了。

参 考 文 献

〔1〕J.L.Doob, Stochastic Processes

〔2〕Е.Б.Дынкин Основания теории Марковских процессов (馬尔科夫过程論基础, 王梓坤譯)