

一类拓扑可测空间*

邓永录

(数学力学系)

为了任意相空间的馬氏过程理論的需要,本文第一部分是在研究了在(1), (2)中所提出的几类較常用的拓扑可测空间(下面分別称做D空间、 D_1 空间和 D_2 空间)的基础上提出一类新的和較上述几类空间更为宽广的拓扑可测空间,得出了新的一类空间的几个重要性质和这几类空间的关系。在第二部分中我們証明了对于 G_0 列紧的 D_0 空间柯尔莫果洛夫测度扩张定理成立。这和第一部分所証明的 D_0 空间的性质联合在一起就提供了我們在馬氏过程理論中应用 D_0 空间的前提。

在以下討論中恒以 E 表示任意相空间, C 表示 E 上的开集班, B 表示 E 的子集的 σ 代数, (E, C) 表示拓扑空间, (E, C, B) 表示拓扑可测空间。

为了应用和理論的完整,有些結果我們不加証明地列出,它們的証明可在(1)(2)找到。

定义1: 子集系 G 称做 π -系, 如果从 $A_1, A_2 \in G$ 得出 $A_1 \cap A_2 \in G$ 。

定义2: (1) (E, C) 中的集合 A 称做 z 集, 且記 $A \in Z$, 如果存在有界連續函数 f , 使 $A = \{x : f(x) = 0\}$ 。

(2) (E, C) 中的集合 B 称做 u 集, 且記 $B \in U$, 如果存在有界連續函数 f , 使 $B = \{x : f(x) \neq 0\}$ 。

下面列举 z 集和 u 集的一些性质。

命题1: z 集和 u 集互为余集, u 集为开, z 集为闭。

命题2: z 集为 G_0 , u 集为 F_0 。若 (E, C) 为正规拓扑空间, 則每一闭 G_0 为 z 集, 开 F_0 为 u 集。

命题3: 有限个 z 集之并及可列个 z 集之交仍为 z 集; 有限个 u 集之交及可列个 u 集之并仍为 u 集。

* 作者在此对在本文写作过程中梁之舜先生所給予的指导和郑會同先生及馬氏过程討論班諸同志提出的有启发性的意見表示衷心的感謝。

命題4: 若 (E, C) 为完正规 (正规且每一閉集为 $G\delta$), 則 Z 和 U 分別与閉集班 F 和开集班 C 重合。特別地, 对于距离空間本命題成立。

命題5: 任意两不相交 z 集可用函数分离。

下面引进几种拓扑可測空間的定义。

定义3: (E, C, B) 称做 D 空間, 如果它滿足下列两条件

3.1 B 由开集系 C 的某一子系所产生, 即 $B = \sigma(B \cap C)$ 。

3.2 对每一集合 $A \in B \cap C$, 存在一有界可測連續函数 f , 使 $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ 。

定义4: (E, C, B) 称做 D_1 空間, 如果它滿足条件 $B = B_E = \sigma(U) = \sigma(Z)$ 。

定义5: (E, C, B) 称做 D_2 空間, 如果它滿足 $B = \sigma(C)$ 和 3.2

定义6: (E, C, B) 称做 D_0 空間, 如果它滿足下列两条件

6.1 $B = \sigma(C_1)$ $C_1 \subseteq C$ 。

6.2 对于任一集合 $A \in C_1$, 存在一有界可測連續函数 f , 使 $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ 。

关于定义6的說明: 若以 G_1 表 C_1 所产生的 π -系 (即 G_1 包含 C_1 中集合的所有有限交), 則 $B = \sigma(C_1) = \sigma(G_1)$ 。另一方面, 由命題3知对每一集合 $B \in G_1$, 条件6.2 恒滿足。故不妨假設 C_1 就是一 π -系。今后我們就是这样假設。

D 空間的定义可在(1)找到, D_1 和 D_2 空間可在(2)找到, 而 D_0 空間則是新提出的。下面給出这些拓扑可測空間的一些性質及其相互关系。

命題6: 对于完正规空間 (特別地, 对于距离空間) 有 $\sigma(C) = \sigma(U)$, 此时 D_1 空間、 D_2 空間和 D 空間三者之間沒有区别。

命題7: $B_E = \sigma(U) = \sigma(Z)$ 是使一切連續函数可測的最小 σ 代数。

命題8: D_2 空間 $\iff$ 完正规拓扑空間且 $B = \sigma(C) (= \sigma(U))^{(2)}$ 。

(証) $\rightarrow$ 在 D_2 中所有閉集都是 z 集, 故均为 $G\delta$ 。又由命題5知閉集可用函数分离。

$\leftarrow$ 由命題6直接得到。

命題9: D_2 空間是 D 空間, 也是 D_1 空間。

命題10: D 空間与 D_1 空間均是 D_0 空間。

上述两命題的証明都是不足道的。

命題11: D_0 空間类确比 D 空間类广, 即存在属于 D_0 而不属于 D 的拓扑可測空間。这命題可用下述例子說明。

設 E 是数直綫, 开集班 C 是由所有开区間 (a, b) ; $-\infty < a < b < \infty$, 及 E 上所有无理数组成的集合 I 为子基所确定, C_1 表示所有区間 (a, b) 組成的子集系, 显然 $C_1 \subseteq C$, 且是一 π -系。再令 $B = \sigma(C_1)$, 易见 (E, C, B) 是一 D_0 空間。事实上, 对每一开区間 (a, b) , 均存在有界可測連續函数 $f_{a,b}$, 使 $(a, b) = \{x : f_{a,b}(x) \neq 0\}$,

(1) 不失一般性可設 $0 \leq f \leq 1$, 因为若 g 为任意連續函数, 則 $f = \frac{|g|}{1+|g|}$ 为在取值于 $[0, 1]$ 的有界連續函数, 且 $\{x : g(x) \neq 0\} = \{x : f(x) \neq 0\}$ 。

(2) 由此可见(8)中所定义的正規可測空間就是 D_2 空間。

$$\text{例如可令 } f_{a,b} = \begin{cases} \frac{(b-a)-|a+b-2x|}{b-a} & \text{若 } x \in (a,b) \\ 0 & \text{若 } x \in (a,b) \end{cases}$$

这里 $f_{a,b}$ 的連續性与可測性是显然的。

但 (E, C, B) 不是 D 空間, 因为这时 $I \in B \cap C$, 但找不到一有界可測連續函数 f 使 $I = \{x : f(x) \neq 0\}$ 。事实上, 若有这样的連續函数 f 存在, 則对每一有理数 X_i 均有 $f(X_i) = 0$, 现取一无理数 $y_0 \in I$, 使 $f(y_0) = \alpha > 0$, 由 f 之連續性知存在一正数 $\delta > 0$, 使每一属于 $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ 的无理数 y 都有 $f(y) > \alpha/2 > 0$ 。但我們一定可以在这区間內取一有理数 X_0 , 因 $f(X_0) = 0$, 由 f 的連續性知又可找到一正数 $\delta_1 > 0$ 使对任意实数 $x \in (X_0 - \delta_1, X_0 + \delta_1)$ 均有 $f(x) < \alpha/2$ 。这样对每一属于 $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap (X_0 - \delta_1, X_0 + \delta_1)$ (必非空) 的无理数 y 又有 $f(y) < \alpha/2$ 。矛盾。故这样的 f 不可能存在。

易见在上述討論中把 I 换成任一开区間上的所有无理数时仍然合适, 故可推知这时有 $B = \sigma(U)$ 。即 (E, C, B) 是 D_1 空間。另一方面, 是 D 空間而不是 D_1 空間的例子更易举出。这样, 我們又有下述命題。

命題12 D_1 和 D 这两空間类不相互包含。

綜合命題9—13, 可得下面的示意图

$$D_0 \supset \left\{ \begin{matrix} D_1 \\ D \end{matrix} \right\} \supset D_2 \Leftrightarrow \text{正规可測空間}$$

命題13 D_0 空間上任意 $(\sigma$ 可加) 有限測度 μ 滿足下述正則性条件:

对任意 $K \in B$ 均有

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \inf\{\mu(G) : G \supseteq K, G \in BC\} \\ &= \sup\{\mu(F) : F \subseteq K, F \in BF\} \quad (*) \end{aligned}$$

这里 BC 表可測开集班, BF 表可測閉集班。

(証) 首先指出, 上述正則性条件等价于

对任意 $K \in B$ 和正数 $\varepsilon > 0$, 存在 $G \in BC$ 和 $F \in BF$, 使得 $G \supseteq K \supseteq F$ 且 $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

以 H 表示所有使 $(*)$ 成立的集合組成的集系, 现証 $H \supseteq C_1$ 。

对每一 $A \in C_1$, 由条件 6.2 知存在一有界可測連續函数 f 使 $A = \{x : f(x) \neq 0\} =$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, 即 A 可表为可列个可測閉集之并, 且 $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$ 。由 μ 之 σ 可加性知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(U_n) = \mu(A)$, 故可取一够大的正整数 N , 使 $\mu(A) - \mu(U_N) < \varepsilon$ 。

这时 $A \in BC$, $U_N \in BF$, $A \supseteq U_N$, 即 A 及 U_N 分別是我們所要求的可測开集和可測閉集。

下証 H 是一 σ 代数

1° 显然若 $A \in H$ 則 A 之余集 $A' \in H$ 。

2° 若 $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots \in H$, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 則 $A \in H$ 。

事实上对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $M_k \in BF$, $N_k \in BC$, $M_k \subseteq A_k \subseteq N_k$ 和 $\mu(N_k - M_k) < \varepsilon/4^k$, 这

里 $K=1, 2, \dots$ 。令 $M^* = \bigcup_{K=1}^{\infty} M_K$, $N = \bigcup_{K=1}^{\infty} N_K$, 則 $M^* \subseteq A \subseteq N$, $\mu(N - M^*) < \sum_{K=14}^{\infty} \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon/3$ 。

顯然 $N \in \mathcal{B}_0$, 由 μ 之 σ 可加性知存在正整數 N_0 , 使 $\mu(M^* - \bigcup_{K=1}^{N_0} M_K) < 2\varepsilon/3$, 令 $M = \bigcup_{K=1}^{N_0} M_K$, 則 $M \in \mathcal{B}_0$ 且 $N \supseteq A \supseteq M$ 。這時有 $\mu(N - M) = \mu(N - M^*) + \mu(M^* - M) < \varepsilon$ 。

我們證明了 H 是 σ 代數, 因為 $H \supseteq \mathcal{C}_1$ 故 $H \supseteq \sigma(\mathcal{C}_1)$ 。証完。

命題14: D_0 空間有下述三個重要性質

(i) 若 D_0 空間 $(E, \mathcal{C}, B)$ 上一數值函數系 H 是 L 系, 且 H 包含 E 上所有非負有界可測連續函數, 則它包含所有屬於 L 的可測函數⁽³⁾。

(3) 關於 L 系及 L 的定義可參看[1]。但我們認為 L 的定義應改為: 數值函數 $\xi \in L$, 則它的正部 ξ^+ 和負部 ξ^- 也屬於 L 。

(ii) 設 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ 是 $(\mathcal{Q}, M)$ 到 $(E, \mathcal{C}, B)$ 的可測映象, $(E, \mathcal{C}, B)$ 是 D_0 空間。若 $\alpha_n(\omega) \rightarrow \alpha(\omega)$ 對任意 $\omega \in \mathcal{Q}$, 則映象 α 也可測。

(iii) 設 R ——直線上的區間, $(\mathcal{Q}, M)$ ——任一可測空間, $(E, \mathcal{C}, B)$ 是 D_0 空間。又設由乘積空間 $R \times \mathcal{Q}$ 到 E 之映象 Φ 滿足條件。

a) 對任意固定的 $Y \in R$, Φ 是 $(\mathcal{Q}, M)$ 到 (E, B) 的可測映象。

b) 對任意固定的 $\omega \in \mathcal{Q}$, Φ 是 R 到 $(E, \mathcal{C})$ 的右連續映象。

則 Φ 是 $(R \times \mathcal{Q}, B_R \times M)$ 到 (E, B) 的可測映象。

上面三個性質的證明幾乎完全和 Дынкин^[1] 中引理 1.8, 1.9, 1.10 一樣。事實上, 那里用到的關於可測開集的性質都為 $\mathcal{C}_1$ 的集所具有。

我們着重指出: 這三個性質在 Дынкин 的 [1] 及他以後的讲义中經常用到。正是因為 D_0 空間具有這三個性質, 我們才可能在馬氏過程理論中採用 D_0 空間這一較寬的假設。

命題15: 有限多個 D_0 空間的乘積空間仍是 D_0 空間

(証) 設 $(E_k, \mathcal{C}_k, B_k)$ $k=1, 2, \dots, n$ 均是 D_0 空間, 即 $B_k = \sigma(\mathcal{C}'_k)$, 這裡 $\mathcal{C}'_k \subseteq \mathcal{C}_k$ 且不妨設 $\mathcal{C}'_k$ 是 π 系。對每一 $A_k \in \mathcal{C}'_k$ 存在 $(E_k, \mathcal{C}_k, B_k)$ 上之有界可測連續函數 f_k , 使 $A_k = \{x_k: f_k(x_k) \neq 0\}$ 。若 $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \dots \times \mathcal{C}_n$, $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$, 這些式子有通常的“直積”的意義。現証 $(E, \mathcal{C}, B)$ 是 D_0 空間。為此我們要找出 $\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{C}_k$

中一子系 $\mathcal{C}'$, 使有 $B = \bigcap_{k=1}^n B_k = \sigma(\mathcal{C}')$ 和對每一 $A \in \mathcal{C}'$ 存在 $(E, \mathcal{C}, B)$ 上的有界可測連續函數 f 使 $A = \{x: f(x) \neq 0\}$ 。現取所有形如 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, $A_k \in \mathcal{C}'_k$ 或 $A_k = E_k$, $k=1, 2, \dots, n$ 的集合作為 $\mathcal{C}'$ 。顯然 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ 且 $\mathcal{C}'$ 是 π 系, 今証 $\sigma(\mathcal{C}') = B = \bigcap_{k=1}^n B_k$ 。事實上, 按乘積空間定

義 $\bigcap_{k=1}^n B_k$ 是由所有可測矩形 $\prod_{k=1}^n D_k$ $D_k \in B_k$ 所組成的 π 系 $\mathcal{F}$ 產生的 σ 代數, 顯然 $B \supseteq \sigma(\mathcal{C}')$ 故只須証

(3) 定義可參看 [1] СТР. 29

明相反的包含关系。因这又相当于要证 $\sigma(C') \supseteq F$ 。由于每一 $D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \in F$ 都可写成 $(D_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) \cap (E_1 \times D_2 \times E_3 \times \cdots \times E_n) \cap \cdots \cap (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{n-1} \times D_n)$ 。显然上面每一因子属于 $\sigma(C')$ ，所以它们的有限交 B 亦属于 $\sigma(C')$ 。由此 $\sigma(C') \supseteq F$ ，因为 $\sigma(C')$ 是一 σ 代数，所以 $\sigma(C') \supseteq \sigma(F) = B$ 。最后，对每一 $A = \prod_{k=1}^n A_k$ ，若 $A_k = \{x_k : f_k(x_k) \neq 0\}$ ，令 $f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$ 则 $A = \{(x_1, \cdots, x_n) : f(x_1, \cdots, x_n) \neq 0\}$ 。证完。

二

在这一部分我们就 D_0 空间来证明柯尔莫果洛夫无穷乘积测度扩张定理。在一般概率论教程中很多作者都是只就具有常用拓扑的数直线来叙述和证明这定理，对于任意的概率空间，Andersen 和 Jessen 首先在 1948 年举出柯氏定理不成立的例子，但也有不少作者专门致力于研究把这定理推广到更广泛一类的概率空间，例如 Колмогоров 和 Гнеденко 就此提出过完美测度的概念，后来 Marczewski [3] 和 Ryll-Nardzewski [4] 相继讨论了紧测度和拟紧测度，他们分别证明了对于这两类测度柯氏定理成立。关于这些概念和方法 Сазанов 在 [5] 中和 D.A. Kappos 在 [6] 中作了整理或发展（顺便指出，在 [5] 中定义的完美测度和拟紧测度是等价的）。此外，Blackwell 在 [7] 中证明了对于所谓 Лузин 空间柯氏定理成立。在 Дынкин 的 [1] 中也给出了一较普遍形式的柯氏定理，但没有证明。我们在这里利用完美测度这一概念证明对于 σ 列紧的 D_0 空间柯氏定理成立，但是我们也可以在把条件稍为加强一点后利用命题 13 和 15 按通常的方法来证明。只不过前一方法较为简单。

我们首先给出完美测度的定义

定义 7：可测空间 (E, B) 上的测度 μ 称做完美的，如果对每一 B -可测函数 f 能找到一直线上的 Borel 集 B ，使 $B \subseteq f(E)$ ，且 $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(E)$ 。

命题 16： σ 列紧 D_0 空间上任意有限测度是完美测度。

(证) 设 (E, C, B) 是 D_0 空间，且 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ，这里 K_n 是列紧集，不妨设 $K_n \uparrow$ 。设 μ 是 (E, B) 上任意有限测度。现要证 μ 是完美的，为此只须对任一 B -可测函数 f 和任意 $\varepsilon > 0$ ，可以找到一直线上的闭集 F 使有 $F \subset f(E)$ 和 $\mu(f^{-1}(F)) > \mu(E) - \varepsilon$ ，因为这时我们对任一串 $\varepsilon_n \downarrow 0$ ，能找出相应的一串数直线上的单调上升的闭集 F_n ，使对每一 n 有 $\mu(f^{-1}(F_n)) > \mu(E) - \varepsilon_n$ ，显然 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 是数直线上 Borel 集且 $\mu(f^{-1}(F_n)) = \mu(E)$ 。又由 μ 之完全可加性知存在一正整数 N ，使 $\mu^*(K_N) > \mu(E) - \varepsilon/2$ 。

不失一般性可设 f 是有界的。事实上，对任意 B -可测函数 g ，可令 $f = \frac{g}{1+g}$ ，则 $0 \leq f < 1$ 。若对 f 能找到一直线上的闭集 F 使 $\mu(f^{-1}(F)) > \mu(E) - \varepsilon$ ，则对从直线到直线的连续映象 $y = \frac{x}{1+x}$ 闭集 F 的原象仍为闭集 F' ，且 $\mu(g^{-1}(F')) > \mu(E) - \varepsilon$ 。现设 $0 \leq f < 1$ ，令

$$f_n(x) = \frac{k}{n} \quad \text{当} \quad \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{(k+1)}{n}$$

这里 $K=0, 1, \dots, n-1$ 。

由命题13知存在一可测闭集 H_n , 使 $\mu(H_n) < \mu(E) - \varepsilon/2^{n+1}$ 且 f_n 于 H_n 上连续。

事实上, 每一半开闭区间 $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ 关于 f 的反象均可测, 且互不相交。其并为 E 。对每一 $f^{-1}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right)$, 由命题13知存在一可测闭集 $H_n^k \subseteq f^{-1}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right)$, 且 $\mu\left\{f^{-1}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right)\right\} - \mu(H_n^k) < \frac{\varepsilon}{n2^{n+1}}$, 显然 H_n^k 互不相交且 f_n 于每一 H_n^k 上取常数值 $\frac{k}{n}$ 故 $H_n = \bigcup_k H_n^k$

即为所求。又由 f 之有界性知 f_n 一致收敛于 f 。因每一 f_n 在 H_n 上连续, 故 f 在 $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$

上连续。由对 H_n 的假设知 $\mu(H) > \mu(E) - \varepsilon/2$ 。所以对任意可测集 $A \supset H \cap K_N$, 必有 $\mu(A) > \mu(E) - \varepsilon$ 。因为列紧集的连续象也列紧, 故 $f(K_N \cap H)$ 在数直线上是列紧集, 因而是闭的。而 $f^{-1}(f(K_N \cap H)) \supseteq K_N \cap H$, 故令 $F = f(K_N \cap H)$ 即为我们所要求的闭集。证完。

由(5)之定理6(或(6), Kap. 7)知当每一坐标空间均是 σ 列紧的 D_0 空间时柯尔莫果洛夫无穷乘积测度扩张定理成立, 即有

命题17: 设 T 为任意集合, $\widetilde{T}$ 为 T 之任一子集。对每一 $t \in \widetilde{T}$, (E_t, C_t, B_t) 是 σ 列紧(即 E_t 能表为可数多个列紧集之并) D_0 空间。令 $E^T = \prod_{t \in \widetilde{T}} E_t$, E^T 中的元数以 φ 表示, $N_{\widetilde{T}}$

表示空间 E^T 中由所有形如 $\{\varphi : \varphi(t) \in \Gamma_t\}$ (这里 $t \in \widetilde{T}$, $\Gamma_t \in B_t$) 的集合产生的 σ 代数。

又设对每一 $n=1, 2, \dots$ 和 $t_1, \dots, t_n \in \widetilde{T}$ 给出了满足下述条件的函数族 $\{\Phi_{t_1 \dots t_n}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)\}$ ($\Gamma_i \in B_{t_i}$, $i=1, \dots, n$):

1) 对称性 对于数列 $1, 2, \dots, n$ 的任一种排列 $(i_1, \dots, i_n)$ 有 $\Phi_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(\Gamma_{i_1}, \dots, \Gamma_{i_n}) = \Phi_{t_1 \dots t_n}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$

2) $\Phi_{t_1 \dots t_n}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ 对每一变元为测度, 即固定任意 $n-1$ 个变元后是关于余下一个变元的测度。

3) 相容性: 即 $\Phi_{t_1 \dots t_{n-1} t_n}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}, E) = \Phi_{t_1 \dots t_{n-1}}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1})$, 且 $\Phi(E) = 1$ 对所有 $t \in \widetilde{T}$

这时存在 σ 代数 $N_{\widetilde{T}}$ 上的概率测度 P , 使对任意 $t_1, \dots, t_n \in \widetilde{T}$ 和 $\Gamma_i \in B_{t_i}$, $i=1, \dots, n$ 有

$$P\{\varphi(t_i) \in \Gamma_i, i=1, \dots, n\} = \Phi_{t_1 \dots t_n}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)。$$

参 考 文 献

- (1) Е. Б. Дынкин ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ. МОСКВА. 1959.
- (2) В. С. Варадарайн Меры на топологических пространствах. Сборник математики, т. 55(97), №1, 1961, 35—100.
- (3) E. Marczewski On compact Measures. Fund. Math., 1953, 111—124.
- (4) Ryll-Nardzewski On quasi-Compact measures. Fund. Math. 1953. 125—130.
- (5) В.В.Сазанов О совершенных мерах, Изв. АН СССР (сер.матем.), 26(1962), 391—414
- (6) D. A. Kappos STRUKTURTHEORIE DER WAHRSCHEINLICHKEITSFELDER UND -RÄUME. BERLIN. GÖTTINGEN. HEIDELBERG, 1960.
- (7) D. Blackwell On a class of probability spaces: Proc. third Symp. math. Statist. and prob. Vol II (1956) 1—6.
- (8) 郑曾同: 测度的弱收敛和强马氏过程, 数学学报, 1961, 11, №2, 126—132.