

辛方陣的辛相似⁽¹⁾

華 羅 庚

在复数域內，大家知有四个主要类型的連續单群：射影群，奇維或偶維的正交群及偶維的辛群。射影群下的相似問題見于任何的矩陣論教科書上。正交群下的相似問題已为 Hilton⁽²⁾ 所解决。本文的目的在于解决辛群下辛方陣的相似問題。用几何术语来讲，以下的結果寻求使基本綫丛不变的条件下来出辛变换的标准型来。

所用的方法也可以給出比 Hilton 更简单的关于正交群的証明来。

以下的結果似乎值得在引言中一提：

任一辛变换是两个辛对合的乘积。

在酉辛群下，任一酉辛方陣可以化为对綫型。

在实域上，我們还有一些結果。

§ 1. 辛 相 似

假定我們的域是代数封閉的。

命

$$(1) \quad F = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

这儿 I 及 0 各表 n 行列的单位及 0 方陣。如果一方陣 A 适合于

$$(2) \quad AFA' = E,$$

則 A 称为辛方陣。这儿 A' 代表 A 的轉置。求(2)式的逆，立刻可知 A' 也是辛方陣。

命 A, B 是二辛方陣，如果有一辛方陣 T 使

$$(3) \quad TAT^{-1} = B,$$

則 A, B 称为辛相似。

定理1. 二辛方陣辛相似的必要且充分条件是它們的特征方陣有相同的初等因子。

証：如果 A, B 辛相似，显然它們的特征方陣有相同的初等因子。反之，假定 A, B 有初等因子，則有一滿秩方陣 P (不一定是辛方陣) 使

$$PAP^{-1} = B.$$

(1) 这是1945年的旧稿，整理出来就正于中山大學諸同志。

(2) Mess. of Math, 41(1912), 146-154. 或参酌 Turubull-Aitken, An Introduction to the theory of Canonical Matrices, p. 160.



由于 A 与 B 是辛方陣, 因此

$$PAP^{-1}FP'^{-1}A'P' = BFB' = F,$$

即

$$(4) \quad QA = AQ,$$

此处

$$(5) \quad Q = -FP'FP.$$

因此

$$(6) \quad P'FP = FQ = Q'F.$$

命 $Q = R^2$, 这儿 R 是 Q 的多項式 $f(Q)$ (习知其存在)。命

$$T = PR^{-1},$$

則由(6)可知

$$(7) \quad P'FP = FR^2 = FR \cdot R = Ff(Q)R = f(Q')FR = R'FR,$$

因此 T 是辛方陣。

又由(4)可知

$$(8) \quad TAT^{-1} = PR^{-1}APR^{-1} = PAP^{-1} = B.$$

定理証毕。

这个証法可以用到正交群上, 即可以証明以下的习知的

定理1'.⁽¹⁾ 二正交方陣 A, B 正交相似的必要且充分条件是它們的特征方陣有相同的初等因子。

証: 我們有滿秩的 P 使 $PAP^{-1} = B$ 。由于正交性 $PP'A = AP'P$ 。命 R 是 $P'P$ 的多項式, 而且 $R^2 = P'P$ 。則正交方陣 $T = PR^{-1}$ 把 A 变为 B。

§ 2. 分 解

定义. 一个辛方陣 A 称为可分解, 如果存在一个辛方陣 P 使

$$(9) \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad 0 < r < n.$$

这儿

$$(10) \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(r)} & 0 \\ 0 & \alpha_2^{(n-r)} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1^{(r)} & 0 \\ 0 & \beta_2^{(n-r)} \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(r)} & 0 \\ 0 & \gamma_2^{(n-r)} \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_1^{(r)} & 0 \\ 0 & \delta_2^{(n-r)} \end{pmatrix},$$

(1) Turnbull-Aitken, 上見, 160頁。

而

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

各为 $2r$ 行列、 $2(n-r)$ 行列的辛方陣。或称为 A 可分解为以上二支量的直和。

不能分解的方陣是指不存在这样 P 的方陣。

定理 2. 命 $\alpha_1 = \alpha_1^{(r)}$, $\alpha_2 = \alpha_2^{(n-r)}$ 。假定 α_1 与 α_2^{-1} 无公共特征根, 及 $B^{(m)}$ 是辛方陣。并

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ 与 } B$$

的特征方陣有相同的初等因子, 則 B 是可分解的。

証: 有滿秩的 P 使

$$(11) \quad P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} P^{-1} = B.$$

由于 $BFB' = F$, 我們有

$$P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} P^{-1} F P'^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1' & 0 \\ 0 & \alpha_2' \end{pmatrix} P' = F,$$

即

$$(12) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} Q = Q \begin{pmatrix} \alpha_1'^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_2'^{-1} \end{pmatrix}, \quad Q = P^{-1} F P'^{-1}$$

由于 α_1, α_2^{-1} 无公共特征根, 故

$$(13) \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix},$$

这儿 q_1 与 q_2 都是斜对称。因此, r 是偶数。可以有一方陣

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

使 $Q = R F_0 R'$, 这儿

$$F_0 = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}$$

而 F_1, F_2 各是 r 行列及 $m-r$ 行列的 F 方陣。 $R^{-1} P^{-1} = T$ 把 F 变为 F_0 , 即

$$(14) \quad T F T' = F_0.$$

又我們有

$$(15) \quad T B T^{-1} = R^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} R.$$

变换行列即得所証。

附記: 这証明对任何域都行。

§ 3. 辛方陣的初等因子

定理3. 辛方陣的特征多項式是自返多項式。

証：命 T 表一辛方陣。由于

$$(16) \quad (T - \lambda I)FT' = F(I - \lambda T')$$

即 $T - \lambda I$ 与 $T - \frac{1}{\lambda}I$ 相抵，即得定理。

系。一方陣特征根 $+1$ 或 -1 的重数都是偶的。

这可由定理3及辛方陣的行列式常等于1推出之。

由定理2可知任一辛方陣可以分解成为以下辛方陣为支量的和：

$$(i) \quad T\left(\alpha, -\frac{1}{\alpha}\right) \quad (\alpha \neq \pm 1),$$

这儿 T 是仅有 $\alpha, -\frac{1}{\alpha}$ 为特征根的辛方陣；

$$(ii) \quad T(1)$$

及

$$(iii) \quad T(-1).$$

后二者仅以 $+1$ 或 -1 为其特征根的辛方陣。(ii) 及 (iii) 称为抛物支量。

由定理3，我們可以完整地作为支量 $T\left(\alpha, -\frac{1}{\alpha}\right)$ 。

由于

$$(17) \quad \begin{pmatrix} J_\alpha & 0 \\ 0 & J_{\alpha^{-1}} \end{pmatrix}, \quad J_\alpha = J_\alpha^{(r)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix},$$

是辛方陣，并以

$$(18) \quad (\lambda - \alpha)^r, \quad \left(\lambda - \frac{1}{\alpha}\right)^r$$

为其初等因子，因此由定理3推得

定理4. 支量 $T\left(\alpha, -\frac{1}{\alpha}\right)$ 是形如(17)的辛方陣的直和。

§ 4. 抛物支量的初等因子

今考虑 $T(1)$ 。写 $T = T(1)$ 。命

$$(19) \quad K = (I - T)(I + T)^{-1},$$

則

$$(20) \quad T = (I - K)(I + K)^{-1}$$

及

$$(21) \quad KF + FK' = 0$$

即 KF 是对称方阵。

由 Turnbull-Aitken⁽¹⁾, 有一辛方阵 Γ 使

$$\Gamma K F \Gamma'$$

变为以下方阵的直和:

$$J_0^{(p)}, \quad \text{对 } p \text{ 偶,}$$

及

$$\begin{pmatrix} 0 & J J_0^{(q)} \\ J J_0^{(q)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{对 } q \text{ 奇,}$$

这儿

$$(22) \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(由于 $KF - \lambda F$ 的行列式的根都是 0) 因此得

定理 5. 一个抛物支量 $T(1)$ 可以分解成为有以下二类初等因子的方阵的直和:

$$(i) \quad (\lambda - 1)^p, \quad \text{对偶数 } p$$

及

$$(ii) \quad (\lambda - 1)^q, (\lambda - 1)^q, \text{ 对奇数 } q.$$

而

$$(23) \quad \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_1'^{-1} \end{pmatrix} \quad J_1 = J_1^{(q)},$$

就有初等因子, $(\lambda - 1)^q, (\lambda - 1)^q$ 及

$$(24) \quad \begin{pmatrix} J_1 & S J_1'^{-1} \\ 0 & J_1'^{-1} \end{pmatrix}, \quad S = S^{(p/2)} = [1, 0, \cdots, 0], \quad J_1 = J_1^{(p/2)},$$

就有初等因子 $(\lambda - 1)^p$.

对 $T(-1)$ 有同样的结果。

故获得以下的结论

定理 6. 任一辛方阵一定辛相似于以下形式的辛方阵的直和:

$$(I) \quad \begin{pmatrix} J_\alpha & 0 \\ 0 & J_\alpha'^{-1} \end{pmatrix}, \quad J_\alpha = J_\alpha^{(r)};$$

($\alpha \neq \pm 1$; 当 $\alpha \neq \pm 1$ 时, r 是奇数)。

$$(II) \quad \begin{pmatrix} J_{\pm 1} & S J_{\pm 1}'^{-1} \\ 0 & J_{\pm 1}'^{-1} \end{pmatrix}.$$

(1) 已见, P. 138-139.

每一支量不能再分解。

相似的方法可以推出 Hilton 的結果來。

§ 5. 方陣的平方根

在定理 1 的證明中, “一个方陣的开方根”是一重要工具。当然我們可以在一般的矩陣論上找到的。如果用以下的降秩方陣求方根法, 因而可以避免所征引的 Turnbull—Aitken⁽¹⁾。

引理1. 一个仅有 0 为特征根的方陣有平方根的必要且充分条件是其初等因子配对为

$$x^m, x^m,$$

或为,

$$x^m, x^{m-1}.$$

这引理可从以下的事实推得: 命

$$L=L^{(t)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

則 L^2 相似于

$$L[\frac{1}{2}(t+1)], L[\frac{1}{2}t]$$

的直和, 而 $[\xi]$ 表 ξ 的整数部分。

我們不詳細处理这一綫索。

实域中情况有所不同。以下的引理变为进一步研究所不可缺少的工具。

引理2. 任一无 0 根及負特征根的实方陣有实的平方根。

这引理的証明見作者早年著作⁽²⁾。

由引理 2 及与定理 1 的証法相同易于推出以下的习知的結果:

二酉方陣 (或实正交) 方陣酉相似 (或实正交相似) 的必要且充分条件是它們有相同的初等因子。

又

定理7. 任一酉辛方陣一定酉辛相似于对綫方陣

$$\begin{bmatrix} e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}, e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_n} \end{bmatrix}.$$

証: 仅需証明: 二酉辛方陣 A, B 酉辛相似的必要且充分条件是它們相似。

我們有一酉方陣 U 使

(1) Hua, On the theory of automorphic functions of a matrix variable II, §6, Amer. Jour. of Math. 66(1944), 531—563.

$$(25) \quad UAU^{-1}=B.$$

由辛陣性質, 得

$$(26) \quad AP=PA,$$

这儿 $P=-U^{-1}FU'^{-1}F$. 故

$$(27) \quad U^{-1}FU'^{-1}=PF=FP'.$$

用作者另一結果⁽¹⁾稍加变化, 可知有一酉方陣 Q 使

$$(28) \quad Q^2=P, \quad AQ=QA, \quad QF=FQ'.$$

于是

$$U^{-1}FU'^{-1}=Q^2F=QFQ',$$

即 UQ 是酉辛方陣。又

$$(29) \quad TAT^{-1}=UQAQ^{-1}U^{-1}=B.$$

§ 6. 实 相 似

在实域中情况較稍复杂。因为一个方陣 Q 的平方根 $\sqrt{Q}$ 不一定有实系数。又辛方陣

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在实数范围内不能辛相似, 这一事实说明了实域中辛相似的复杂性。

由 § 2 的結果說明, 我們只要研究不可分解的支量就够了。今假定 A 是不可分解, 是实的, 是辛方陣。而且辛方陣 B 与 A 实相似(注意, 不一定辛相似。)即有一实方陣 P 使

$$PAP^{-1}=B.$$

仍如 § 1, 我們有

$$QA=AQ,$$

这儿

$$Q=-FP'FP.$$

如果 Q 的特征根中没有負的, 則定理 1 的証明中的 R 是实的 (由引理 2 保証它的存在性), 即 A 与 B 实辛相似。

如果 Q 的特征根全是負的, 則有一实 R 使 $R^2=-Q$.

命

$$T=PR^{-1} \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix},$$

由于

$$P'FP=-R'FR$$

(1) Hua, On the theory of automorphic functions of a matrix variable I, §6 引理. Amer. Jour. of Math. 66 (1944), 470—488.

及

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} = -F$$

可是 T 是 (实) 辛方陣。故

$$\begin{aligned} (30) \quad T^{-1}BT &= \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} R P^{-1} B P R^{-1} \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

現在考慮, Q 既有非負根又有負根的情況 (注意, 无 0 根)。

由于 QF 是斜对称, 故有辛方陣 T 使

$$Q^*F = T \cdot QF \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} O & O & t_1 & O \\ O & O & O & t_2 \\ -t_1' & O & O & O \\ O & -t_2' & O & O \end{pmatrix},$$

这儿 t_1 的特征根非負, 而 t_2 的特征根全負。今命

$$A^* = TAT^{-1}, \quad P^* = TPT^{-1},$$

而相应地定义 Q^* , 則 (4) 变为

$$A^*Q^* = Q^*A^*,$$

即

$$A^* = \begin{pmatrix} a_1 & O & b_1 & O \\ O & a_2 & O & b_2 \\ c_1 & O & d_1 & O \\ O & c_2 & O & d_2 \end{pmatrix},$$

这是可分解的, 故得

定理3. 假定 A 不可分解。如果 A, B 是二实相似的辛方陣, 則 B 或实辛相似于 A , 或实辛相似于

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix}.$$

§7. 构造出所有的实的不可分解的辛方陣

由于复根成对出現, 故不可分解的支量共有五种初等因子,

$$(i) \quad (x-\alpha)^r, \quad \left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^r, \quad \alpha \text{ 是实数} > 1;$$

$$(ii) \quad (x-\alpha)^r, \left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^r, (x-\overline{\alpha})^r, \left(x-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^r,$$

$\alpha = \rho e^{i\theta}$ 是复数; $\rho > 1$, $0 < \theta < \pi$;

$$(iii) \quad (x-e^{i\theta})^r, (x-e^{-i\theta})^r, \quad 0 < \theta < \pi;$$

$$(iv) \quad (x \pm 1)^r, (x \pm 1)^r, \quad r \text{ 奇数};$$

及

$$(v) \quad (x \pm 1)^{2r}.$$

以下的方陣是各以 (i), (ii), (iii), (iv), (v) 为初等因子的实辛方陣:

$$(i) \quad \begin{pmatrix} J_\alpha & O \\ O & J_\alpha'^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{对实 } \alpha > 1.$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} J_{\alpha, \vec{\alpha}} & O \\ O & J_{\alpha, \vec{\alpha}}'^{-1} \end{pmatrix},$$

这儿 $\alpha = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 1$, $0 < \theta < \pi$,

$$J_{\alpha, \vec{\alpha}} = \begin{pmatrix} \rho & \mu & 0 & 0 & \cdots \\ \iota & \rho & \mu & 0 & \cdots \\ 0 & \iota & \rho & \mu & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(iii) 需分为两个情况来讨论: 对偶 r , 有

$$(iii_1) \quad \begin{pmatrix} J_{(\theta)} & S J_{(\theta)}'^{-1} \\ 0 & J_{(\theta)}'^{-1} \end{pmatrix},$$

这儿

$$J_{(\theta)} = J_{\alpha, \vec{\alpha}}, \quad \alpha = e^{i\theta}, \quad S = [1, 0, \cdots, 0];$$

又对奇 r 有

$$(iii_2) \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & -\sin \theta u J_{(\theta)}'^{-1} \\ u' & J_{(\theta)}^{(r-1)} & 0 & S J_{(\theta)}'^{-1} \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & \cos \theta u J_{(\theta)}'^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & J_{(\theta)}'^{-1} \end{pmatrix}$$

这儿 u 表示矢量 $(1, 0, \cdots, 0)$;

$$(iv) \quad \begin{pmatrix} J_{\pm 1} & 0 \\ 0 & J_{\pm 1}'^{-1} \end{pmatrix}$$

及

$$(v) \quad \begin{pmatrix} J_{\pm 1} & SJ_{\pm 1}^{-1} \\ 0 & J_{\pm 1}'^{-1} \end{pmatrix}, \quad S = [1, 0, \dots, 0].$$

应用定理 8 的結果，我們还有三种新类型

$$(iii_1)^{\circ} \quad \begin{pmatrix} J_{(\theta)} & -SJ_{(\theta)}'^{-1} \\ 0 & J_{(\theta)}'^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(iii_2)^{\circ} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & \sin \theta u J_{(\theta)}'^{-1} \\ u' J_{(\theta)} & 0 & & -SJ_{(\theta)}'^{-1} \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & \cos \theta u J_{(\theta)}'^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & J_{(\theta)}'^{-1} \end{pmatrix}$$

及

$$(v)^{\circ} \quad \begin{pmatrix} J_{\pm 1} & -SJ_{\pm 1}'^{-1} \\ 0 & J_{\pm 1}'^{-1} \end{pmatrix}.$$

定理 9. 每一实辛方阵一定实辛等价于一直和，其支量是 (i), (ii), (iii₁), (iii₂), (iv), (v), (iii₁)[°], (iii₂)[°] 及 (v)[°] 九种之一。

附記：考虑有理数域。我們可以分解为支量 T, T(1) 及 T(-1) 的直和，其中 T 的特征根异于 ±1。命

$$T = (I + K)^{-1} (I - K) \quad (\text{或} = (I - K)^{-1} (I + K)).$$

由 Turnbull-Aitken, p. 140 可以求出 KF 的标准型。因而有理域上辛方阵的标准型。

§ 8. 辛 对 合

定义 如果辛方阵 T 适合于 $T^2 = \pm I$ ，则称为辛对合。取上号的称为第一类对合，取下号的称为第二类对合。

由 $T^2 = +I$ 及 $-I$ 显然可推得 TF 是斜对称或对称。

定理 10. 任一第一类辛对合一定辛相似于

$$\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}, \quad H = [1, \dots, 1, -1, \dots, -1];$$

任一第二类辛对合一定辛相似于

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

証：現在只研究第二类辛对合，第一类可以相仿地处理。

考虑方陣对

$$(TF, F)$$

前者对称后者斜对称。\$TF - \lambda F\$ 的初等因子，就是 \$T - \lambda I\$ 的初等因子。由于 \$T^2 = -I\$，所以初等因子是单的，而且特征根是 \$\pm i\$。由定理 3，它們有同样的重数。由于

$$(31) \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

就是有这样的初等因子的，因此得出定理。

§ 9. 把辛方陣表为对合的乘积

定理 11. 每一辛方陣一定是两个第二类辛对合的乘积。

証：只須証明以下的两个特例即足

$$1) \quad T = \begin{pmatrix} J_\alpha & 0 \\ 0 & J_\alpha'^{-1} \end{pmatrix}.$$

命

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}.$$

显然 \$P\$ 是第二类辛对合。又由 \$J_\alpha J = J J_\alpha'\$ 可知

$$(TP)^2 = \begin{pmatrix} 0 & J_\alpha J \\ -J_\alpha'^{-1} J & 0 \end{pmatrix}^2 = -I,$$

即 \$TP\$ 也是第二类辛对合。

2) 現在考虑

$$T = T^{(2^n)} = \begin{pmatrix} J_1' & S J_1'^{-1} \\ 0 & J_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad S = [1, 0, \cdots, 0].$$

这是以下两个第二类辛对合的乘积：

$$P_1 = \begin{pmatrix} iM' & iSM^{-1} \\ 0 & -iM^{-1} \end{pmatrix},$$

及

$$P_2 = \begin{pmatrix} i(MJ_1)' & 0 \\ 0 & -i(MJ_1)^{-1} \end{pmatrix},$$

这儿

$$M=(m_{ij}), \quad m_{ij}=\begin{cases} (-1)^{i-1} \binom{i-1}{j-1}, & \text{若 } i \geq j, \\ 0, & \text{若 } i < j. \end{cases}$$

首先命 $M^2=(t_{ij})$, 則

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \sum_{k=1}^n m_{ik} m_{kj} = (-1)^{i-1} \sum_{j \leq k \leq i} (-1)^{k-1} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{若 } i < j \\ 1 & \text{若 } i = j \\ \binom{i-1}{j-1} \sum_{j \leq k \leq i} (-1)^{k-i} \binom{i-j}{k-i} & \end{cases} \\ &= \binom{i-1}{j-1} \sum_{l=0}^{i-j} (-1)^l \binom{i-j}{l} = 0, \text{ 若 } i > j, \end{aligned}$$

即得

$$M^2=I.$$

又, 命 $MJ_1=(q_{ij})$ 及 $J=(j_{ik})$, 則

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik} j_{kj} = (-1)^{i-1} \binom{i}{j},$$

当 $i < j$ 时, 我們定义 $\binom{i}{j} = 0$ 。不难直接驗算

$$(MJ)^2=I.$$

因此 P_2 是第二类对合。

因为 $M'SM=S$, 也不难驗算 P_1 也是一第二类对合。

最后

$$\begin{aligned} P_2 P_1 &= \begin{pmatrix} iJ_1' M' & 0 \\ 0 & iJ_1^{-1} M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iM' & -iSM^{-1} \\ 0 & -iM^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_1' & J_1' S \\ 0 & J_1^{-1} \end{pmatrix} = T. \end{aligned}$$

故得定理。

这些結果在复数域內成立。对实数域如何? 留給讀者。