

辛群与典型系统的稳定域^{※)}

胡金昌

研究週期系数的典型系统的永久稳定性,用不着李雅普諾夫函数。因此,从另一角度来看,由这系统的稳定域与不稳定域的结构,及这些域的凸性或域内某些子集的凸性,可获得一系列的稳定性判定法。本文只把辛陣的拓扑群来划分稳定域与不稳定域这一项工作,做综合的报导。

I. 乘子理論

討論 $2k$ 阶动力系统典型式

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_{k+i}}, \quad \frac{dx_{k+i}}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_i}, \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

这里对称实二次型 $\bar{H} \equiv \frac{1}{2}(H(t)x, x)$, $H(t) = (h_{ij}(t))_{i,j=1}^{2k}$, 其間 $h_{ij}(t) = h_{ji}(t)$ 为 t 的片段連續实函数, 具有公共週期 ω 。此方程可簡写成陣式

$$(1) \quad \frac{d}{dt} X = JH(t)X, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -E_k \\ E_k & 0 \end{pmatrix}.$$

設方程(1)的实的基解陣为 $X(t)$, 其初值为 $X(0) = E$ 。則陣子 $X(t)$ 在每个固定的 t 时为实的辛陣。即是說:

$$(S) \quad X^*(t)JX(t) = J$$

这里 X^* 表 X 的轉置复共軛, (本文只用到轉置陣 X^T , 因此只需考虑

$$X^T(t)JX(t) = J)$$

如是則所求各辛陣組成一个簡單拓扑群 G 。

反过来說, 在实辛陣群(的空間)里, 每条曲綫 $X(t)$, ($0 \leq t \leq \omega$, $X(0) = E$) 对应于某一个动力系统其方程形如(1)。这因为若把(S)式微分之, 便可直接驗算計得

$$H(t) = J^{-1} \left[\frac{d}{dt} X(t) \right] X^{-1}(t).$$

※) 本文为 1962 年本校校庆科學討論会上作者提出一篇綜合性的报告的原稿。在討論会上承华罗庚教授提出宝贵建議, 认为可以用另方法証明報告中所提的一系列已有的成果。現正在根据华教授的意見进行工作, 待迟日再行发表。

从此在实辛群 G 里曲线 $X(t)$ ($0 \leq t \leq \omega$, $X(0) = E$) 与对称阵 $H(t)$ 成立了一一对应的关系。由群性, 我们不妨指定 t 的值: $t = \omega$ 。因此今后所用的实辛群 $G \equiv \{X(\omega)\}$ 。

由于 $H(t)$ 的週期性, 有

$$X(t + \omega) = X(t)X(\omega)$$

这里 $X(\omega)$ 称为单程阵 (monodromic matrix) 而其特征方程

$$\det(X(\omega) - \rho E) = 0$$

的各根称为方程 (1) 的乘子 (multiplier)。由于辛阵 $X(\omega)$ 为实的, 我们便知道 (由 Poincaré—Ляпунов 定理) 这各乘子成为一对一对关于复平面上单位圆成对称, 又关于实轴成对称。这些乘子的分布, 四个成为一组的形如 $re^{\pm i\varphi}$, $r^{-1}e^{\pm i\varphi}$, 或两个成为一组的形如 $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$ 或形如 r , r^{-1} 。这样的谱分布不只是 $X(\omega)$ 如是, 凡任一个指定的 t 值, 实辛阵 $X(t)$ 皆如是。由此可见线性方程组 (1) 必不会取得渐近稳定; 而方程 (1) 在 $t \in (0, \infty)$ 为稳定当且只当其一切乘子的模等于 1 且在阵 $X(\omega)$ 内只有单初级因子 (简称单构)。同时在 $t \in (-\infty, \infty)$ 方程 (1) 的一切解有界, 即所谓永久稳定。

М. Г. Крейн [1] 讨论参数方程

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = \lambda JH(t)x$$

的 λ -稳定区间集 (这集可分解为有限多个或可数无穷多个开区间见 [11] стр. 415, 因此他命名其为 λ -зон), 设 $H(t)$ 适合如下条件 A_1 :

$$A1) \quad (H(t)\xi, \xi) \geq 0, \quad \text{凡 } \xi \neq 0.$$

$$A2) \quad \int_0^\omega (H(t)\xi, \xi) dt > 0.$$

在此条件 (A) 之下, 方程 (2) 称为正型。[1] 证明:

对于每个非实值 λ , 方程 (2) 有 k 个乘子在单位圆之内 (这称为第一类乘子); 其他 k 个乘子在圆之外 (这称为第二类乘子)。

若 λ 取实值由 α 递升至 β , 又若有某乘子在单位圆上, 则它随着 λ 单调地反时针 [或顺时针] 在圆周上运动, 这乘子仍称为第一类 [或第二类] 乘子。

由此论点 М. Г. Крейн 推广了 А. М. Ляпунов 的关于週期系数方程的稳定区间诸定理。这一文献带头引起了一系列工作关于边界问题中本征值的研究, 即在振动定理中本征值的谱的序列。关于这方面工作 М. Г. Крейн 已经总结在 А. А. Андронов 纪念集 [11], 把以前所提出的定理作了详尽的证明。最近 М. Г. Крейн 与 Г. Я. Любарский [12] 由于声波的研究, 在工作 [12] 举出正型方程

$$\frac{dx}{dt} = J \{ H_1(t) + \lambda H_2(t) \} x$$

的乘子的解析性质。这里所说的正型: 当 $H_2(t) \equiv 0$ 时便是适合于条件 A 之 1), 2) 的 $H_1(t)$ 。若 $H_2(t) \neq 0$ 则把条件 $A2)$ 改为 $A2')$ 如下:

$A2')$ 设方程

$$\frac{dx}{dt} = JH_0(t)x$$

沒有一個非零解 $x(t)$ 能使 $H_1(t)x(t)=0$ (几乎处处), 且 $x(\omega)=\rho x(0)$, ($|\rho|=1$).

在這 $A1)$, $2^1)$ 條件之下, 他們作出乘子 $\rho(\lambda)$ 在 $\rho(\lambda_0)$ 領域的 d 枝代數函數表示式

$$\rho_i(\lambda) = \rho(\lambda_0) + \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}(\lambda - \lambda_0)^{ij} \quad (i=1, 2, \dots, d)$$

于是把在其先的 [6]、[11] 等工作更加推進。作為研究自共軛算子的擾動論的一種工具, 這些是乘子理論發展方向的一方面。本文所要總結的是其另一方面。——即穩定域與不穩定域的結構。

II. 强 穩 定

為着闡明穩定域的涵意, 我們首先考慮各乘子對於參數的倚變性質。M. Г. Нейгауз與 B. Б. Лидский [3] 討論方程組

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = JH_0(t)x + \lambda JH(t)x$$

設當 $\lambda = 0$ 時, 組 (3) 的一切解有界; 又設 H 適合條件 A 。則當 $\lambda = 0$ 時組 (3) 的單程陣為單構。又當 λ 由 0 遞升時, 則有 k 個第一類乘子在單位圓上反時針運動, 而其他 k 個第二類乘子在此上順時針運動。但當 λ 取某個值 λ_i 時, 組 (3) 的單程陣或許出現高次初級因子, 或許某乘子的模不復為 1, 這個轉變只當在某個 $\lambda = \lambda_0$ ($0 < \lambda \leq \lambda_0$) 時發現有不同類乘子相碰撞之後, 才會出現。故各乘子由 $\lambda = 0$ 時開始運動, 直至它們未經碰撞之前, 它們各保持着其屬性及單構性, 在單位圓上單調運動。

由此可以引起強穩定的概念: 若存在有這樣的 $\varepsilon > 0$, 使無論任何對稱陣 Q , 其週期為 ω , 其元素皆為 t 的片段連續函數, 且 $\|Q(t)\| < \varepsilon$ 者, 使方程組

$$\frac{dx}{dt} = J(H(t) + Q(t))x$$

的一切解有界, 則組 (2) 稱為強穩定。在 [11] стр. 449 改成較弱的條件:

$$\int_0^\omega \|Q(t)\| dt < \varepsilon$$

這裡所用的范數 $\|Q(t)\|$ 表示 $\max |\rho_i(t)|$, 而 $\rho_i(t)$ 為在這 t 值時該陣的各固有值。

在這意義下, 使組 (2) 為強穩定當且只當各乘子適合上述的穩定條件; 更且若有相等的乘子, 則必為同類乘子。

И. М. Гельфанд и В. Б. Лидский [6] 考慮兩個強穩定系統:

$$(4) \quad \frac{d}{dt} X = JH_1(t)X$$

$$(5) \quad \frac{d}{dt} X = JH_2(t)X$$

若能求得一个形变系统

$$(6) \quad \frac{d}{dt} X = JH(t, v)X, \quad (0 \leq v \leq 1)$$

在 $0 \leq v \leq 1$ 都是强稳定, 则两个系统 (4) 与 (5) 称为属于同一个稳定域; 否则说它们在不相同的稳定域。这里所用的形变阵 $H(t, v)$, ($0 \leq v \leq 1$) 当然假设它与组 (2) 的性质相同, 且 $H(t, 0) = H_1(t)$, $H(t, 1) = H_2(t)$ 。

III. 稳定域

兹进行研究实辛群 G 对于各个稳定域的结构的作用, 我们首先考虑组 (6) 的单程阵 $X(\omega, v)$ 由 $v=0$ 到 $v=1$ 时能使 (4) 的单程阵 $X_1(\omega)$ 形变为 (5) 的单程阵 $X_2(\omega)$ 所需要的条件。

在单位圆上有 k 个第一类, k 个第二类乘子 (前已说过, s 重乘子当作 s 个同类乘子看待)。这两类乘子的排列共有 2^k 个不相同式样的布置型。由此得:

$X_1(\omega)$ 与 $X_2(\omega)$ 的各乘子可接受形变的必要条件为: 它们的各乘子同型布置。否则在形变过程中如有不同型布置, 便会有互相碰撞的机会了。更且这必要条件也是充分条件。

[証提要] 乘子的属性视乎二次型 $-i(Jf, f)$ 为定正或定负而决定, 这里 f 为对应于该乘子的固有向量 ([11] стр. 425 и 446)。由代数的判定可以推得 ([6] стр. 16—29): 凡稳定型的单程阵皆可以表示为如下形式

$$(7) \quad X(\omega) = GRG^{-1}$$

这里 G 与 R 为实辛阵, 且

$$(8) \quad R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & & \\ & \theta_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \theta_k \end{pmatrix}$$

$$|\theta_s| < \pi, \quad \theta_s \neq -\theta_{s'} \quad (1 \leq s, s' \leq k)$$

这些 $\theta_1, \dots, \theta_k$ 为 $X(\omega)$ 的第一类乘子的各辐角。

因此, 施用于 (4), (5) 得

$$X_1(\omega) = G_1 R_1 G_1^{-1}, \quad X_2(\omega) = G_2 R_2 G_2^{-1}$$

由假设 $X_1(\omega)$ 与 $X_2(\omega)$ 的各乘子同型布置, 故我们可以把 R_1, R_2 进行形变, 然后再把 G_1 形变为 G_2 。

于是在实辛群 G 内两条曲线 $X_1(t), X_2(t)$ 的两端点 $X_1(0) = X_2(0) = E$, $X_1(\omega) = X_2(\omega)$ 已经叠合了, 从此便转到考虑此两曲线的同伦问题。

首先证明: 实辛群 G 与圆周乘单连通拓扑空间的拓扑积同胚。([6] стр 20—24)

[証提要] 設把实辛陣 X 分解为极式

$$X = SU$$

其中按照极式的意义, S 为定正的对称陣, U 为正交陣。然后逐款証明: 1° S 与 U 也是辛陣; 2° 此各 $2k$ 阶定正对称辛陣的集合 $\{S\}$ 与 $k(k+1)$ 維的歐氏空間同胚; 3° 各 $2k$ 阶的正交实辛陣的集合 $\{U\}$ 与 k 阶的复酉陣的群 $\{W\}$ 同胚; 4° 由酉陣的性質有

$$\det W = e^{i\psi}$$

茲作 k 阶酉陣

$$V = \begin{pmatrix} e^{i\psi} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

則得

$$W = V(V^{-1}W)$$

这时 V 与圓周同胚, 而 $V^{-1}W$ 为单位模陣。由群論已知一切单位模的酉陣組成单連通拓扑群。綜上四款得証本題。

因此可見这两条同端点的曲綫 $X_1(t)$, $X_2(t)$ 在实辛群空間之內, 一般不是同倫的。

要使两曲綫 $X_1(t)$, $X_2(t)$ 在实辛群內为同倫, 則它們在圓周上的投影必須同倫, 亦即其旋轉的周数要相等。設 $\det W(t)$ 从 $t=0$ 到 $t=\omega$ 的幅角 ψ 的变差以 $\text{Arg } X(t) \Big|_0^\omega$ 表之, 即

$$\text{Arg } X(t) \Big|_0^\omega = \arg \det W(t) \Big|_0^\omega$$

由此得 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 同倫的充分必要条件为

$$(9) \quad \text{Arg } X_1(t) \Big|_0^\omega = \text{Arg } X_2(t) \Big|_0^\omega$$

最后, 設在实辛群內有諸曲綫的集合 $\{X_\alpha(t)\}$ ($0 \leq t \leq \omega$, $X_\alpha(0) = E$); 其中各 $X_\alpha(t)$ 有片段連續导数; 且 $X_\alpha(\omega)$ 属于稳定型的諸陣的集合的同一分支。若把它們的端点叠合, 則同倫条件 (9) 适合。如此, 这集合 $\{X_\alpha(t)\}$ 將有如下特質, 試推出之:

由 (7) 式有陣 G , 茲設

$$X_\rho(t) = G^{-1}X(t)G.$$

則得

$$X_\rho(t) \in \{X_\alpha(t)\}$$

显見 $X_\rho(t)$ 的端点为在 (8) 式中的 R 。联結 R 至 E 作曲綫 $R(\tau)$:

$$R(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(1-\tau)\theta & -\sin(1-\tau)\theta \\ \sin(1-\tau)\theta & \cos(1-\tau)\theta \end{pmatrix}, \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

其中 θ 如 (8) 所定。則合併 $X_\rho(\tau)$ 与 $R(\tau)$ 成为一条閉曲綫, 其旋轉角为 $2n\pi$. 故得

$$n = \frac{1}{2\pi} \left[\text{Arg } X_\rho(t) \Big|_0^\omega + \text{Arg } R(\tau) \Big|_0^1 \right]$$

这里 n 称为稳定域的标数。这标数可用 $X(t)$ 表出之。在 $X(\omega)$ 的第一类乘子对应固有向量所张成的子空间内, 取任意基底 $h_1, h_2, \dots, h_k$. 作出 k 阶阵子 $Z(t)$:

$$Z(t) = \left((-iJX(t)h_\mu, h_\nu) \right)_{\mu, \nu=1}^k$$

则有

$$(10) \quad n = \frac{1}{2\pi} \left[\text{Arg det } Z(t) \Big|_0^\omega - \sum_{s=1}^k \theta_s \right],$$

其中各 θ_s 分别为各个第一类乘子的幅角的主值。

由是得如下结论 ([6] стр. 10):

每个稳定域由诸乘子的 2^k 个布置型中每个式样及稳定域标数 n ($-\infty < n < +\infty$) 而决定之。

函数空间 $L \equiv \{H(t)\}$ 的结构 (一)。描述上述定理, 以 D 表一切强稳定系统的 $H(t)$ 的集合, 以 $D_n^{(\mu)}$ 表其中各稳定域, $\mu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。则 D 的分解表为

$$D = \bigcup_{\mu=\mu_1}^{\mu_2 k} \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} D_n^{(\mu)};$$

并且由文 [8] 证明对于同一的 μ 值, 每两个域 $D_{n_1}^{(\mu)} D_{n_2}^{(\mu)}$ 为同胚 (任何 n_1, n_2)。

(此处及以后所谓“分解”涵意着各分支每两不相交)。

IV. 特 别 情 形 ($k=1$)

在动力系统 $k=1$ 的情形与一般的 $k \geq 1$ 诸情形, 在表面上已经有了区别。凡二阶方程

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

只要 $A(t)$ 为 Lebesgue 可积且设

$$y = x \exp \int_0^t \text{tr } A \, dt$$

便可化成动力系统典型式:

$$(11) \quad \frac{dx}{dt} = J H(t)x, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

故对于自由度为 1 的动力系统的稳定性问题, 便引到二阶线性方程一般化的研究。

A. M. Ляпунов 关于週期系数的二阶方程研究结果备载在其遗集第二卷 стр. 332—390 及 401—472。自从 M. Г. Крейн [1] 用乘子理论推广 A. M. Ляпунов 工作之后, 即引起週期系数的二阶方程的一系列的研究。首先 K. P. Коваленко и M. Г. Крейн [2] 对于稳定区间集 (λ -зон) 已经达到相当发展。同年間 B. A. Якубович [4], [5] 研

究週期系数的二阶方程的稳定域,其詳在工作[7]做了一个小結。

A. 稳定域。

关于稳定域的研究結果,在 $k=1$ 的情形与一般情形 ($k \geq 1$) 无区别,故由工作[6]或[7]依照上面所說的,便可推証得如下結論:

二阶实辛群与环体的内部同胚。在該群內对应于諸稳定域的併集的边界面 $r = \sin^2 \varphi$ 为在环体的两个錐面[见图1. 在式中的 φ 表經度, r 表經圓內点的輻径]。由此,便动力系统(11)为强稳定的所有 $H(t)$ 的集合 D 可分解为两个无穷序列如:

$$D = \left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} D_n^{(1)} \right) \cup \left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} D_n^{(2)} \right).$$

此分解式当然是一般情形 ($k \geq 1$) 的特例而已。

B. 不稳定域。

在环体的内部而在边界面 $r = \sin^2 \varphi$ 之外的两个区域对应于諸不稳定域的併集。显見它們也被边界面所划分。以 $\tilde{Y}^+$, $\tilde{Y}^-$ 表之。由此,凡使动力系统(11)的解为无界的所有 $H(t)$ 的集合 Y 分解为两个无穷序列

$$Y = \left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n^+ \right) \cup \left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n^- \right).$$

这里在每个 Y_n^+ [或 Y_n^-] 內的 $H(t)$ 所对应的各乘子皆同在正 [或負] 半实軸之上 [見[7] стр. 349]。(須知在 $k=1$ 的情形,实辛陣只有两个乘子:若它們在 $\tilde{D}$, [$\sim$ 号表对应关系: $H(t) \rightarrow X(\omega)$], 則同在单位圓上关于实軸对称;若它們在 $\tilde{Y}$, 則同在实軸上关于单位圓对称。)

对于不稳定域來說,則在 $k=1$ 与 $k > 1$ 两个情形的結論不相同!

B. A. Якубович [7] 对二阶动力系統的稳定域与不稳定域作了細致研究。但因与本文論題不一致 (不是利用辛群为工具), 故只擇取其中某些結果与下文相关者。

他的出发点把基解組 $X(t)$ 写成

$$X(t) = P(t)e^{Kt}$$

其間 $P(0) = E$, $\det P(t) = 1$ 且 $P(t)$ 为週期函数或为反週期函数, 即

$$P(t + \omega) = \pm P(t).$$

且 dP/dt 几乎处处存在且为 L -可积;至于 K 則有

$$\text{tr } K = 0.$$

从此定理推知集合 $\{H(t)\}$ 与集合 $\{X(t)\}$ 亦即集合 $\{P(t), K\}$ 有拓扑对应。于是先作集合 $\{K\}$ 的空間 $\tilde{Y}$ 在其內作 K 的几何表象点 (ξ, η, ζ) , 即

$$K = \begin{pmatrix} -\xi & \eta - \zeta \\ \eta + \zeta & \xi \end{pmatrix} \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$$

从此 K 的特征方程表以双曲綫 $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = \lambda^2$. 于是錐 $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0$ 的頂点, 錐面上

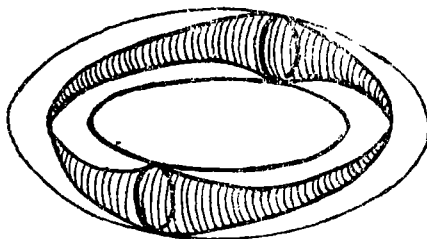


图 1.

各点(顶点除外), 其内部, 其外部各个点集分别记以 $\tilde{0}$, $\tilde{\Pi}$, $\tilde{D}$, $\tilde{\mathcal{R}}$. 特别是在上半空间介乎这锥面与双曲面 $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = \omega^{-2}\pi^2$ 之间的域记之以 $\tilde{D}_1^+$.

其次, 研究集合 $\Omega \equiv \{P(t)\}$. 因单位模二阶阵的群也与环体的内部同胚, 故对于任何向量 a , 向量 $P(t)a$ 在一週期 ω 时间的转动角为 $n\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 其间的奇偶性跟着 $P(t)$ 的反週期或週期性决定之. 由此, Ω 可分解为各连通集

$$\Omega = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_n.$$

函数空间 $L^3 \equiv \{H(t)\}$ 的结构(二). 由上记号有

$$L^3 = \Omega \times (\tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\Pi} \cup \tilde{D}_1^+)$$

把 L^3 划分为四种集合:

$$\mathcal{R}_n = \Omega_n \times \tilde{\mathcal{R}}, \quad \Pi^* = \Omega_n \times \tilde{\Pi},$$

$$D_n = \Omega_n \times \tilde{D}_1^+, \quad \Pi^{**} = \Omega_n \times \tilde{0}.$$

在每种集合的併集内, 动力系统(11)的解有如下性质([7] cnp. 32):

1° 在集 $\mathcal{R} \equiv \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_n$ 之内, (11) 有无界解, 而不含週期解及反週期解.

2° 在集 $D \equiv \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} D_n$ 之内, (11) 的一切解在 $-\infty < t < +\infty$ 有界, 皆为殆週期解(且不是週期或反週期解).

3° 在集 $\Pi^* \equiv \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi_n^*$ 之内, (11) 有一个且只有一个週期解

4° 在集 $\Pi^{**} \equiv \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi_n^{**}$ 之内, (11) 的一切解为週期解或为反週期解.

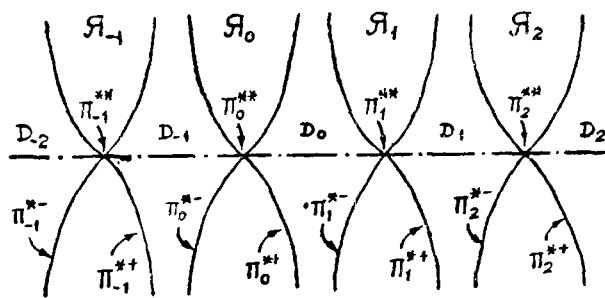


图 2

上述这样的集合分解只依靠于(11)的轨线在一週期 ω 时的端点 $X(\omega)$ 在环体内的位置, 即把单位模阵的群对应于零迹阵的代数 $\mathcal{R}^3$. 借此对应关系, 作出该环体的泛复盖

空間 R^3 [(universal covering space), 見例如 Лонтрягин 的 «連續群» 书 359 頁] 則得同胚关系式

$$L^3 = \Omega_0 \times R^3.$$

把图 2 繞水平軸迴轉, 表示这泛复盖空間 R^3 和在其內諸域的划分。由上同胚关系故这泛复盖空間 R^3 可以用作函数空間 L^3 的模型。

此外, 附带提出如下的比較定理 ([7] стр. 51), 作为当 $k=1$ 时稳定域与不稳定域的凸性定理 ([13] стр. 62) 的先声。

設 $H_1(t) \leq H(t) \leq H_2(t)$

若 $H_1(t)$ 与 $H_2(t)$ 皆 $\subset D_n^{(v)}$ [或 $\mathcal{R}_n^{(v)}$]

則在同此 n, v 有 $H(t) \subset D_n^{(v)}$ [或 $\mathcal{R}_n^{(v)}$]. (12)

这里 $H_1 \leq H_2$ 表示对于任何向量 c 有

$$(H_1 c, c) \leq (H_2 c, c).$$

V. 不 穩 定 域 ($k \neq 1$ 情形)

現在回复到实辛陣群的探討。对于不稳定域而論, 在一般情形 ($k \neq 1$) 与前节結論有所区别。B. A. Якубович [8] 引入实辛陣群的譜 $\zeta = \zeta(X)$ 这概念。譜 ζ 为乘子 (且計及其属性) 的集合:

$$\zeta \equiv \{ \rho_1, \dots, \rho_k; \rho_1^{-1}, \dots, \rho_k^{-1} \}$$

主要規定 $\rho_1, \dots, \rho_k$ 为第一类乘子, 即 $0 < |\rho_j| \leq 1$, 而且若有 $|\rho_j| < 1$, 則 $\rho_j \in \zeta$ 应该跟着有 $\rho_j^{-1} \in \zeta$ 。至于这 k 个乘子 $\rho_1, \dots, \rho_k$ 的排列不論次序。

設集合 $\Sigma \equiv \{ \zeta \}$ 。在 Σ 內与 $\mathcal{R}, D$ 对应的集以 $\hat{\mathcal{R}}, \hat{D}$ 記之。

从此有連續映像 $\zeta = \zeta(X)$ 把辛群 G 映成 Σ 。在工作 [8] стр. 334 証明它是弱性开映像。故推証得: 在 Σ 的任何域其完全原像为在 G 的域。(这里域字会意为連通开集。故在 Σ 內考虑 $\mathcal{R}, \hat{D}, \dots$ 的結構, 便可推知在 G 內 $\hat{\mathcal{R}}, \hat{D}, \dots$ 的拓扑性质。

为着进行研究 G 的結構, B. A. Якубович 在工作 [8] 更引入 $\text{Arg} \zeta$ 的定义:

$$\text{Arg} \zeta = \sum_{j=1}^k \arg \rho_j \quad (\rho_j \in \zeta)$$

从此便用之作为 $\text{Arg} X$, 即

$$\text{Arg} X = \sum_{j=1}^k \arg \rho_j.$$

此定义表面上和上述 И. М. Гельфанд [6] 的定义不相同, 但有其等价性。在 [8] стр. 328 証明: 若同倫条件 (9) 在前定义适合, 則在現时新定义也适合。反之亦然。

$\text{Arg} X$ 的定义許有多种。在工作 [10] 里 B. A. Якубович 証明在 G 里 $\text{Arg} X$ 可用如下抽象定义:

設 $X \in G$, 而 $\text{Arg} X$ 为 X 的可数无穷多个实值的函数, 适合下列条件者:

- 1) 对于任何 $X \in G$, 函数 $\text{Arg } X$ 有定义。
- 2) 若 $(\text{Arg } X)_0$ 为函数 $\text{Arg } X$ 的一个值, 则它的其他各值为
 $(\text{Arg } X)_m = (\text{Arg } X)_0 + 2\pi m, \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$
- 3) 每分支 $(\text{Arg } X)_m$ 为 $X \in G$ 的连续函数。
- 4) 存在有标数为 1 的一个闭曲线 $U(t) \in G$ 使 $\text{Arg } U(t)|_0^\omega = 2\pi$ 。

上述两种 $\text{Arg } X$ 皆适合此定义。在[10]里还列举出好几种 $\text{Arg } X$, 在振动系统需要的。凡适合于上列抽象定义的 $\text{Arg } X$, 都一起适合或一起不合同伦条件(9)。此外, 各种 $\text{Arg } X$ 不独是柔性(拓扑地)等价而且是刚性(尺度地)等价。(见[10]ср. 269)。

根据上述的准备工具——映像 $\zeta(X)$ 和 $\text{Arg } X$ ——便可以推得 $\tilde{D} \subset G (k \geq 1)$ 及 $\tilde{Y} \subset G (k=1)$ 的结构, 其结果与前的相同。但对于 $k \neq 1$ 这情形则 $\tilde{Y}$ 为连通集故:

在 $k \neq 1$ 这情形, 在函数空间 L 内不稳定集 $\tilde{Y}$ 只是一个域。

于是转到如下问题, 在 $k=1$ 这情形有比较定理(12), 但在 $k \neq 1$ 的情形则失效。兹把 $\tilde{Y}$ 再行剖分为可数无穷多个域, 使在其每域中比较定理(12)仍然成立。因此把 $\tilde{Y}$ 作出与 $\tilde{D}$ 相仿拟的剖分。设 $\tilde{\Gamma}$ 表示具有不同类而相等的乘子的诸单程阵 $X(\omega)$ 的集合。对应地在 Σ 内将有 $\hat{\Gamma}$ 。于是考虑在 $\tilde{Y} \setminus \tilde{\Gamma}$ 内乘子的布置型有多少式样

我们说: $X_1, X_2 \in \tilde{Y} \setminus \tilde{\Gamma}$ 内为同型布置若它们的谱 $\zeta(X_1), \zeta(X_2)$ 适合下列条件:

- 1) $\zeta(X_1), \zeta(X_2)$ 在单位圆上的乘子为同型布置(布置型定义同前第三节)
- 2) 它们在正实轴上的乘子耦的偶数同一奇偶性。

如此, 则共可能有 $N=2(2^k-1)$ 个式样的布置型, 故得分解定理:

集 $\tilde{Y} \setminus \tilde{\Gamma}$ 可分解为 N 个在 G 为单连通的域 $\tilde{Y}^{(v)}, (v=1, 2, \dots, N)$, 其中每一分支的各 $X(\omega)$ 为同型布置。

函数空间 $L \equiv \{H(t)\}$ 的结构(三)。由第 1 节所得的映像

$$X(\omega) = \Phi[H(t)] \in G$$

是把 L 映成 G 的连续映像, 故企图由 G 的结构来推求在 L 的完全原像的结构。于是把上文 $\tilde{D}, \tilde{Y}$ 等集总以字母 S 代表之。在 [8] ср. 344-346 有如下结论:

设 $\tilde{S}$ 为在 G 的域, 而 S 为其完全原像, 即

$$\Phi(S) = \tilde{S}.$$

A) 若 $\tilde{S}$ 为在 G 内单连通的集, 则 S 可分解为可数无穷多个互相同胚的域 S_n :

$$S = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_n$$

使凡一切 n 皆有 $\Phi(S_n) = \tilde{S}$ 。

B) 若 $\tilde{S}$ 不是在 G 的单连通的集, 其标数 $m > 0$, 则 S 分解为有限的 m 个互相同胚的集 $S_1, \dots, S_m$ 而已。

註: 在 A) 里 n 字的意义: 设 $X_1(t) \in S_{n_1}, X_2(t) \in S_{n_2}$, 则 n_1, n_2 的关系如:

$$\text{Arg } X_2(t) \Big|_0^\omega - \text{Arg } X_1(t) \Big|_0^\omega = \text{Arg } Y(t) \Big|_0^1 + 2(n_2 - n_1)\pi$$

这里 $Y(t)$ 为在 $\tilde{S}$ 内联结两端点 $X_1(t)$, $X_2(t)$ 的任何曲线, 即 $Y(0)=X_1(\omega)$, $Y(1)=X_2(\omega)$.

在 B) 里 m 字的意义: 因 $\tilde{S}$ 在 G 内不是单连通, 故在 $\tilde{S}$ 内有诸闭曲线 $V(t)$, $0 \leq t \leq 1$, 其

$$\operatorname{Arg} V(t) \Big|_1^0 = 2m_\mu \pi \neq 0.$$

在所有的 m_μ 中取最小的 $m > 0$, 称之为域 $\tilde{S}$ 的标数。

在 $k \neq 1$ 这情形我们也可仿照 $k=1$ 的情形作出 G 的泛复盖空间 U 。设 Ω 为一切由 E 到 E 的零伦路线的集合, (路线意义见前引用 Ловтрянин « 連續群 » 书 346 页。) 则函数空间 L 与拓扑积 $\Omega \times U$ 同胚; 而 U 可以作为函数空间 L 的模型。

从此可得在 $k \neq 1$ 情形不稳定域 $\mathcal{R}$ 的结构:

I. $\mathcal{R}$ 为一个域,

II. 集合 $\mathcal{R} \setminus \Gamma$ 可分解为

$$\mathcal{R} \setminus \Gamma = \bigcup_{v=v_1}^{v_n} \bigcup_{u=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_n^{(v)}$$

其中各分支 $\mathcal{R}_n^v$ 在同一个 v 的互相同胚

VI. 解的增长域

从解的不稳定性再可以进一步研究不稳定的程度, 即是说, 不稳定解的增长与某一条给定曲线的增长相比。已给 $\alpha > 0$, 试研究在函数空间 L 有那些 $H(t)$, 使方程 (2) 的解适合于所给定的估值

$$(13) \quad \|x(t)\| < C e^{\alpha t}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

这题的研究可施用上文同样工具。依同理便得如下结论:

设 $\tilde{M}_\alpha$ 表示这些 $X(\omega)$ 的集合, 其乘子有些在半径 $=e^\alpha (>1)$ 之圆之外者 [即得不适合于估值 (13) 的解]。又设 $\tilde{m}_\alpha$ 表这些 $X(\omega)$ 的集合, 其一切乘子皆在半径 $=e^\alpha (>1)$ 之圆之内者 [即各解适合于 (13)]。则有如下结论

I. 在 $k \geq 1$ 情形; 在 L 内集 m_α 为一个域。

II. 在 $k > 1$ 情形; 在 L 内集 M_α 为一个域

III. 在 $k=1$ 情形; 在 L 内集 M_α 可分解为

$$M_\alpha = \left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} M_{\alpha n}^+ \right) \cup \left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} M_{\alpha n}^- \right),$$

其间对同一的上标各 $M_{\alpha n}^+$ (或 $M_{\alpha n}^-$) 互相同胚; 而在 $\tilde{M}_{\alpha n}^+$ ($\tilde{M}_{\alpha n}^-$) 内的 $X(\omega)$ 的诸乘子在正(负)实轴上。

VII. 凸 性

最后归结到考虑 $H(t)$ 为稳定型的判定法。正如本文开头所说, В. А. Якубович [13] 因此引用稳定域或其子集的凸性, 作为研究这问题的工具。

在函数空间 L 内, 若有集 S 使由关系式:

$$H_1(t) \leq H(t) \leq H_2(t); \quad H_1(t), H_2(t) \text{ 皆 } \subset S$$

便推得 $H(t) \subset S$ 。

如此, 则 S 称为 (在递升方向的) 凸集。

既然稳定域的结构已经解决, 从此可考虑其中的凸性。在 [13] 结论为:

I. 在 $k \leq 2$ 这些情形, 一切稳定域 $D_n^{(P)}$ 皆为凸集。

II. 在 $k > 2$ 的各情形, 设在稳定域 $D_n^{(P)}$ 内有子集 D 适合如下条件: 若把单位圆划分为若干个弧, 能使每个弧都含有所有每个 $H(t) \in D$ 的第一类与第二类乘子, 且不会有两类乘子互相间隔地在这弧上分布。如此则子集 D 为凸集。

由各个凸集的解析性质, 便可推得一系列的稳定性判定法。

引 用 文 献

[1] Крейн М. Г. Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о нелинейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН СССР 73 No. 3, 1950, стр. 445—448.

[2] Коваленко К. Р. и Крейн М. Г. О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. ДАН СССР 75 No. 4, 1950, стр. 495—498.

[3] Нейгауз М. Г. и Лидский В. Б. Об ограниченности решений систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ДАН СССР 77 No. 2, 1951, стр. 189—192.

[4] Якубович В. А. Критерии устойчивости для системы двух уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. ДАН СССР 78, No. 2, 1951, стр. 221—224.

[5] Якубович В. А. Об ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$, $p(t + \omega) = p(t)$ ДАН 74 No. 5, 1950, стр. 901—903

[6] Гельфанд И. М. и Лидский В. Б. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. УМН 10 вы. 1, 1955, стр. 3—40

[7] Якубович В. А. Вопросы устойчивости решений системы двух линейных дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффи-

циентами Матем. сб. 37, No. 1, 1955, стр. 21—68.

[8] Якубович В. А. Строение группы симплектических матриц и структура множества неустойчивых канонических систем с периодическими коэффициентами. Матем. сб. 44 No. 3, 1958, стр. 313—352 [см. Оператка, Матем. Сб. 55 No. 3, 1961, стр. 278]

[9] Якубович В. А. Системы линейных дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. (Автореферат докторской диссертации) УМН 16 вы. 1, 1961, стр. 223—234.

[10] Якубович В. А. Аргументы на группе симплектических матриц. Матем. сб. 55. No. 3, 1961, стр. 255—280.

[11] Крейн М. Г. Основные положения теории л-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Памяти А. А. Андропова. Изд. А. Н. СССР, 1955. стр. 413—498

[12] Крейн М. Г. и Любарский Г. Я. Об аналитических свойствах мультипликаторов периодических канонических дифференциальных систем положительного типа. Изв. АН СССР 26 No. 4, 1962 стр. 548—572.

[13] Якубович В. А. О свойствах выпуклости областей устойчивости линейных гамильтоновых систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Вест. Ленинг. ун-та. No. 13 в. 3, 1962 стр. 61—86.