

动力系統典型式的不稳定域

胡 金 昌

(数学力学系)

前文[1]曾将辛群与动力系統典型式的稳定域的一系列文献,作了綜合报导。本文专就不稳定域提出个人見解。余按 В. А. Якубович 对于不稳定域的主要工作[3],开头經過一連串綫性变換来达到辛陣的分类,而从未証明(且亦不可能証明)在該各变換的每一过程其过渡微程組能够持續地保持典型式的形式。但这类問題的研究过程一刻不能越出函数空間 $\{H(t)\}$ 之外的;其次,縱使該工作[3]提高到拓扑群观点,有其优点,但对这样特殊形式的問題,亦似乎小題大做。因此,本文将写出另一方法。

1. 典型系統形式的保持。人們习知保持典型系統形式的变換为某一定形式的母函数所产生的‘切变換’,但亦有說辛变換者[6]。在本文这特殊形式其所要求的变換可以淺易化。設所考虑的动力系統其典型式为

$$\frac{d}{dt} X = JH(t)X, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix}$$

其間 $2k$ 阶对称陣 $H(t)$ 的各元素为 t 的片段連續实函数,具有公共周期 ω 。設这方程組的基解陣为 $X(t)$, $X(0) = E$, 則計算驗證得

$$X'(t) J X(t) = J. \quad (J \text{ 表轉置})$$

故这基解陣 $X(t)$ 为辛陣子。反过來說,每个实辛陣子 $X(t)$ ($0 \leq t \leq \omega$, $X(0) = E$) 适合一个这样形式的动力系統,其間取

$$H = -J \left[\frac{d}{dt} X(t) \right] X^{-1}(t),$$

可計算驗證之。故 $X(t)$ 与 $H(t)$ 成一一对应关系。更且若在函数空間 $\{X(t)\}$ 賦以适宜的尺度,則可証明两个函数空間 $\{X(t)\}$ 与 $\{H(t)\}$ 同胚。

因为一切实辛方陣构成簡單群——辛群,由其群性立即証明:

凡辛变換保持典型系統这特殊形式 $H(t)$ 。

2. 单程陣的辛分类。由于 $H(t)$ 的周期性推得

$$X(t+\omega) = X(t)X(\omega)$$

关于本文論題的关键在于利用 М. Г. Крейн 的乘子理論[5]来考虑单程陣 $X(\omega)$ 。因此我們要求在实辛群 $\{X\}$ 之內作諸 $X(\omega)$ 的分类。华罗庚教授的“辛方陣的辛相似一文[2]恰当地提供給作者所需要的資料。在[2] § 7 有:

每一实辛方陣实辛等价于一‘直和’，其支量为如下九种之一:

$$(i) \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_r'^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{实 } r > 1$$

$$(ii) \begin{pmatrix} J_{\rho, \bar{\rho}} & \\ 0 & J_{\rho, \bar{\rho}}'^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho = re^{i\theta}, \quad r > 1, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$(iii_1) \begin{pmatrix} J_{(\theta)}^{(l)} & \pm SJ_{(\theta)}'^{-1} \\ 0 & J_{(\theta)}'^{-1} \end{pmatrix}, \quad l \text{ 为偶数}$$

$$(iii_2) \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \pm \sin \theta & \mp \sin \theta u J_{(\theta)}'^{-1} \\ u' & J_{(\theta)}^{(l-1)} & 0 & \pm SJ_{(\theta)}'^{-1} \\ \mp \sin \theta & 0 & \cos \theta & \cos \theta u J_{(\theta)}'^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & J_{(\theta)}'^{-1} \end{pmatrix}, \quad l \text{ 为奇数}$$

$$(iv) \begin{pmatrix} J_{\pm 1} & 0 \\ 0 & J_{\pm 1}'^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(v) \begin{pmatrix} J_{\pm 1} & \pm SJ_{\pm 1}'^{-1} \\ 0 & J_{\pm 1}'^{-1} \end{pmatrix},$$

这儿

$$J_r = \begin{pmatrix} r & \\ & \varepsilon r \\ & & r \end{pmatrix}, \quad J_{\rho, \bar{\rho}} = \begin{pmatrix} rU & \\ & \varepsilon E_2 & rU \\ & & & rU \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \varepsilon & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$J(\theta) = J_{\alpha, \bar{\alpha}}, \quad \text{其間 } \alpha = e^{i\theta}, \quad u = (\varepsilon, 0, 0, \dots, 0)$$

其間 $\varepsilon > 0$ 可以很小, 而对在字母前的土号取上号或下号各占一种。并注意所謂‘直和’的定义:

$$\text{設} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{則其直和为} \quad A + B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 \\ a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & b_4 \end{pmatrix}$$

这儿每一个 $2l$ 阶支量对应于 J 中的一个 $2l$ 阶支量

$$\begin{pmatrix} 0 & E_l \\ -E_l & 0 \end{pmatrix}$$

3. 对角綫化法。由上述九种支量出发, 跟着 В. А. Якубович 的共同語試 (見 [3] стр. 331) 把这些支量来对角綫化, 作

$$J_r(\mu) = \begin{pmatrix} r & & \\ \mu & r & \\ & & \ddots & \\ & & & r \end{pmatrix}; \quad J_{\rho, \bar{\rho}}(\mu) = \begin{pmatrix} rU & & \\ \mu E_2 & rU & \\ & & \ddots & \\ & & & rU \end{pmatrix},$$

$$S(\mu) = \text{diag} \{ \mu, 0, \dots, 0 \}, \quad u(\mu) = (\mu, 0, \dots, 0),$$

則仍得九种支量各含参数 μ , 作 μ 的形变由 ε 到 0。此时 $X(\omega)$ 的各乘子 $\rho = re^{i\theta}$ 不受变动, 但这九种分量便蜕化为如下五种支量:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad 0 < |\theta| < \pi,$$

$$V = \begin{pmatrix} rU & 0 \\ 0 & r^{-1}U \end{pmatrix}, \quad 0 < \theta < \pi, \quad r > 0,$$

$$W = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}, \quad r > 0, \quad \pm E_2,$$

由是得結論：

在实辛群之內通过辛变换及在群空間內的形变，每一个单程陣可以标准化为上列五种支量的直和。

几何意义显然：U表在单位圓周上对实軸成对称的二个成为一組的乘子 $\left\{ e^{i\theta}, e^{-i\theta} \right\}$ ；V表对单位圓周成对称又对实軸成对称的四个成为一組的乘子 $\left\{ e^{i\theta}, e^{-i\theta}, e^{-i\theta}, e^{i\theta} \right\}$ ；W表在实軸上对单位圓周成对称的二个成为一組的乘子 $\left\{ r, r^{-1} \right\}$ ； E_2 与 $-E_2$ 反映出在动力系統中对应的部分变元的周期运动与半周期运动。

4. 单程陣的稳定型与不稳定型。在〔1〕已經作了詳細总结，茲可簡括提出：

若其直和的各分量皆为U种，其中相等的乘子为同种乘子，則 $X(\omega)$ 称为稳定型陣，其集合以 $\tilde{D}$ 表之。在函数空間 $\{H(t)\}$ 里各(强)稳定域的并集 D 已經被 И.М. Гельфанд〔4〕弄清楚了。

若其直和的各分量中最少有一个分量为V种或为W种，則 $X(\omega)$ 称为不稳定型陣，其集合以 $\tilde{Y}$ 表之。在函数空間 $\{H(t)\}$ 里各(强)不稳定域的并集对应地以 Y 表之。

这是本文的論題。

若其直和的各分量中最少有一个 $U+U$ ，其中的乘子相等而不同类者，則 $X(\omega)$ 称为属于集合 $\tilde{\Gamma}$ 的陣。茲从集合 $\tilde{Y}-\tilde{\Gamma}$ 說起。

$\tilde{D}$ 与 $\tilde{Y}$ 的公共边界为諸 $E_2, -E_2, U$ 的各直和所組成(但其中所有 ΣU 不属于 $\tilde{D}$)。

5. 集合 $\tilde{Y}-\tilde{\Gamma}$ 的結構。为确定起见指定两个分支：

$$W^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad W^- = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

先論不在单位圓周上的乘子：通过不夸过圓周的移动，总可使有

$$1) \quad W(r) \rightarrow W^+ \text{ 当 } r > 0, \quad W(r) \rightarrow W^- \text{ 当 } r < 0$$

$$2) \quad V \rightarrow W^+ + W^+$$

$$3) \quad W(r_1) + W(r_2) \rightarrow V \quad (r_1 < 0, \quad r_2 < 0)$$

由此， $X(\omega)$ 在集合 $\tilde{Y}-\tilde{\Gamma}$ 之內可化为如下两情形之一：

$$(甲) \quad X(\omega) \rightarrow \Sigma U + \Sigma W^+$$

$$(乙) \quad X(\omega) \rightarrow \Sigma U + \Sigma W^+ + W^-$$

这儿 ΣU 表在 $X(\omega)$ 內所应有的U种分支的直和。余类推。(下文皆仿此)。

其次，論 ΣU 的内容：这些U不能属于 $\tilde{\Gamma}$ ，即是說，在单位圓周上不同类乘子不

能叠合。故唯有遵守在文[4]中乘子布置的规则。又在情形(甲) ΣW^+ 为非空集,而在(乙)最少有一个 W^- 。故两者尽其可能各只有 j 个 U , $j=0, 1, \dots, k-1$, 以此为分域的标志, 共有

$$2 \sum_{j=0}^{k-1} 2^j = 2(2^k - 1)$$

个连通集。即

$\tilde{\mathcal{Y}} - \tilde{\Gamma}$ 可以分解为 $2(2^k - 1)$ 个域, 分别以 $\tilde{\mathcal{Y}}^{(v)}$ ($v=1, 2, \dots, 2(2^k - 1)$) 表之。

6. 集合 $\tilde{\mathcal{Y}}$ 的结构。既然在 $\tilde{\mathcal{Y}}$ 内容许有 $\tilde{\Gamma}$, 便是说, 在 $X(\omega)$ 的形变过程中容许在单位圆周上不同类乘子相碰撞。于是尽量利用 М.Г. Крейн 的乘子理论[5], 来把 $\tilde{\mathcal{Y}}$ 内各元素连通。

(甲) 在款5(甲)情形, 经过乘子运动碰撞之后, 每个 U 可化为 V 或 W , 从而在 $\tilde{\mathcal{Y}}$ 内各元素皆可化为 ΣW^+ 。

(乙) 当 $k > 1$ 时, 在款5(乙)情形, $\dot{\Sigma}U + \dot{\Sigma}W^+$ 为非空集, 故于此总可延致两个不同类乘子在点 $(-1, 0)$ 上相碰撞[注意在此情形下, $-E_2 + W^- + \dots$ 为 $\tilde{\mathcal{Y}}$ 的内点], 碰撞之后 $-E_2$ 再可化为 W^- 。连同原有的 W^- 由款5之3)可化得 V , 于是

$$X(\omega) \rightarrow \dot{\Sigma}U + \dot{\Sigma}W^+ + V \rightarrow \dot{\Sigma}W^+.$$

但当 $k=1$ 时, 在款5(乙)情形,

$$X(\omega) = W^-$$

注意此情形, $E_2, -E_2$ 都是 $\tilde{\mathcal{Y}}$ 的边界点, 不能利用它们来作形变的过渡, 故 W^- 不能形变为 W^+ 。

因此, 当 $k > 1$ 时, $\tilde{\mathcal{Y}}$ 为一个域, 而当 $k=1$ 时, $\tilde{\mathcal{Y}}$ 分解为两个域 $\tilde{\mathcal{Y}}^{(1)}$ 与 $\tilde{\mathcal{Y}}^{(2)}$ 。

7. 域 $\tilde{\mathcal{Y}}^{(v)}$ 的单连通性。在同一域 $\tilde{\mathcal{Y}}^{(v)}$ 内凡共同端点的任何两条曲线 $X_1(s)$ 与 $X_2(s)$ [其间 $0 \leq s \leq 1$, $X_1(0) = X_2(0)$, $X_1(1) = X_2(1)$] 为同伦。

特别是当 $X_1(1) = X_2(1) = E_{2k}$ 时, 此论断仍成立。

证。由款3, 对每 s 有 $G_1(s)$ 与 $G_2(s)$ 使

$$X_i(s) = G_i(s)R_i(s)G_i^{-1}(s), \quad i=1, 2.$$

其间 $R_i(s) = \dot{\Sigma}U_i(s) + \dot{\Sigma}V_i(s) + \dot{\Sigma}W_i(s)$, $i=1, 2$ 。

首先注意 $\tilde{\mathcal{Y}} - \tilde{\Gamma}$ 的定义, 在域 $\tilde{\mathcal{Y}}^{(v)}$ 内的形变使各乘子的支量 $U_i(s)$, $V_i(s)$, $W_i(s)$ 恒保持着其一贯性态——在单位园上者恒在园上, 在园内(外)者恒在园内(外), 兹把 $R_i(s)$ 的各分支分别讨论之:

1° $U_i(s)$ 经常在上(或下)半平面, 这因为点 $(1, 0)$ 为 $\tilde{\mathcal{Y}}^{(v)}$ 的边界点, 是不能越过的

2° $V_1(s)$ 則由其 $0 < \theta < \pi$ 的假設, 只需考慮上半平面。

3° $W_1(s)$ 若是單乘子, 則經常在實軸上; 若是重乘子, 只許能化為 $V_1(s)$, 則便納入2°。

由此, 又因 $R_1(0) = R_2(0)$, $R_1(1) = R_2(1)$ 故 $R_1(s)$ 與 $R_2(s)$ 可用形變來疊合。

其次, $G_1(s)$ 與 $G_2(s)$ 則未必能用形變來疊合的。它們的 Arg 變差可能不會相等,

例如

$$\text{Arg } G_1(s) \Big|_0^1 = \text{Arg } G_2(s) \Big|_0^1 + 2\pi m$$

這里 Arg 的意義是依照文 [4] 中 25 所規定。則利用一個與 $R_2(s)$ 可易相乘的正交辛陣 $N(s)$ 來右乘 $G_2(s)$, 即

$$\hat{G}_2(s) = G_2(s)N(s)$$

便可使它們適合同倫條件

$$\text{Arg } G_1(s) \Big|_0^1 = \text{Arg } \hat{G}_2(s) \Big|_0^1$$

1° 若 $R_2(s)$ 實際含有一個支量 $U(s)$, 不妨說, 例如, 擺在第一位置, 即考慮

$$G_2(s)N(s) \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix} N^{-1}(s)G_2^{-1}(s)$$

於是取 $N(s)$ 為

$$N(s) = \begin{pmatrix} \cos 2ms\pi & 0 & \sin 2ms\pi & 0 \\ 0 & E_{k-1} & 0 & 0 \\ -\sin 2ms\pi & 0 & \cos 2ms\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{k-1} \end{pmatrix}$$

2° 若 $R_2(s)$ 不含有 $U(s)$, 但含有一個 $V(s)$, 不妨說, 例如, 擺在第一位置, 依同理取 $N(s)$ 為

$$N(s) = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{k-1} \end{pmatrix}, \text{ 其間 } v = \begin{pmatrix} \cos ms\pi & \sin ms\pi \\ -\sin ms\pi & \cos ms\pi \end{pmatrix}$$

在這兩情形皆得

$$\begin{aligned} \text{Arg } \hat{G}_2(s) \Big|_0^1 &= \text{Arg } G_2(s) \Big|_0^1 + \text{Arg } N(s) \Big|_0^1 \\ &= \text{Arg } G_2(s) \Big|_0^1 + 2\pi m \end{aligned}$$

故我們不妨用 $\widehat{G}_2(s)$ 来代替 $G_2(s)$. 从此两曲线 $X_1(s)$ 与 $X_2(s)$ 同伦。

3° 若 $R_1(s)$ 只含有 $W(s)$, 即是說, 当 s 由0到1的过程中, 各乘子經常因在实軸上的区間 $(0;1)$ 之內或 $(-1,0)$ 之內。在此情形, 两曲线 $X_1(s)$ 与 $X_2(s)$ 自当相重合。(証毕)

8. 諸不稳定域。最后, 轉到寻求在函数空間 $\{H(t)\}$ 內的各不稳定域。由款1这亦即是在实辛群 $\{X\}$ 空間內的各不稳定域。茲指定一个域 $\tilde{\mathfrak{A}}^{(V)}$ 来論。設 $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ 同在 $\tilde{\mathfrak{A}}^{(V)}$ 之內, 則由款5可以通过形变把它們叠合为 $X(\omega)$ 。由 E_{2k} 到此共同端点 $X(\omega)$ 而在群 $\{X\}$ 內的两曲线 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$, $(0 \leq t \leq \omega)$, 为同伦的充分必要条件为: (見文[4]стр.25)

$$\text{Arg } X_1(t) \Big|_0^\omega = \text{Arg } X_2(t) \Big|_0^\omega$$

茲进行証明: 凡适合这同伦条件其終点在 $\tilde{\mathfrak{A}}^{(V)}$ 內所有这些曲线 $\{X(t), 0 \leq t \leq \omega\}$ 在群 $\{X\}$ 空間內构成的集合 $\mathfrak{A}_n^{(V)}$ 为一个域, 将以某个整数 n 为其标志。

設在这集合內任取一条曲线 $X(t)$, 則在域 $\tilde{\mathfrak{A}}^{(V)}$ 內有

$$X(\omega) = GRG^{-1}$$

这儿 $R = \dot{\Sigma}U + \dot{\Sigma}V + \dot{\Sigma}W$

作曲线 $X_\theta(t) = G^{-1}X(t)G$,

显然 $X_\theta(t)$ 与 $X(t)$ 都是同在集合 $\mathfrak{A}_n^{(V)}$ 之內。——这因为 $X_\theta(0) = E_{2k}$, $X_\theta(\omega) = R$, 且当 G 形变为 E 时, $X_\theta(t)$ 化为 $X(t)$ 。茲作曲线 $R(s)$ 联结 R 到 E , 即是說, 作各 $\widehat{U}(s)$, $\widehat{V}(s)$, $\widehat{W}(s)$ 其形如

$$\widehat{U}(s) = \begin{pmatrix} \cos(1-s)\theta & \sin(1-s)\theta \\ -\sin(1-s)\theta & \cos(1-s)\theta \end{pmatrix},$$

$$\widehat{V}(s) = \begin{pmatrix} r\widehat{U}(s) & 0 \\ 0 & r^{-1}\widehat{U}(s) \end{pmatrix} \quad (0 \leq s \leq 1)$$

$$\widehat{W}(s) = \begin{pmatrix} 1+s(r-1) & 0 \\ 0 & (1+s(r-1))^{-1} \end{pmatrix}$$

$$R(s) = \dot{\Sigma}\widehat{U}(s) + \dot{\Sigma}\widehat{V}(s) + \dot{\Sigma}\widehat{W}(s)$$

这儿各 $\dot{\Sigma}$ 內的各项与在 R 內各 $\dot{\Sigma}$ 的各项相对应。于是用閉曲线 $X_\theta(s) \cup R(s)$ 来决定 $\mathfrak{A}_n^{(V)}$ 的标志数 n

$$n = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{Arg} X_{\theta}(t) \Big|_0^{\omega} + \operatorname{Arg} R(s) \Big|_0^1 \right],$$

这儿 n 与 $X(t)$ 的选择无关。更一般說，在指定的 n 与 ν ，凡集合 $\mathfrak{R}_n^{(\nu)}$ 內的各曲綫皆同倫。事实上，在 $\mathfrak{R}_n^{(\nu)}$ 內任取兩曲綫 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ ，其端点当然可用形变来叠合，故对应地写出

$$\operatorname{Arg} X_{1\theta}(t) \Big|_0^{\omega} + \operatorname{Arg} R_1(s) \Big|_0^1 = \operatorname{Arg} X_{2\theta}(t) \Big|_0^{\omega} + \operatorname{Arg} R_2(s) \Big|_0^1,$$

注意到 $R_1(t)$ 与 $R_2(s)$ 除了端点 E 之外整条在 $\tilde{\mathfrak{R}}^{(\nu)}$ 之內，故由款 7 它們同倫，即

$$\operatorname{Arg} R_1(s) \Big|_0^1 = \operatorname{Arg} R_2(s) \Big|_0^1$$

$$\text{因} \quad \operatorname{Arg} X_{i\theta}(t) \Big|_0^{\omega} = \operatorname{Arg} X_i(t) \Big|_0^{\omega} \quad i=1,2$$

$$\text{得} \quad \operatorname{Arg} X_1(t) \Big|_0^{\omega} = \operatorname{Arg} X_2(t) \Big|_0^{\omega}.$$

在此同倫的意义下，每一端点 $X(\omega)$ 有一且只有一条同倫曲綫。因 $\tilde{\mathfrak{R}}^{(\nu)}$ 为域，故每个集 $\mathfrak{R}_n^{(\nu)}$ 也是域。故得結論：

不稳定集的子集 $\mathfrak{R} - \Gamma$ 可分解为 $2(\xi^k - 1)$ 串每串含有可数无穷多个不稳定域 $\mathfrak{R}_n^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2, \dots, \nu(\xi^k - 1)$), $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。

其次，考虑不稳定集 $\mathfrak{R}$ 。在 $k=1$ 情形， $\tilde{\Gamma}$ 为空集，即 $\tilde{\mathfrak{R}} - \tilde{\Gamma} = \tilde{\mathfrak{R}}$ ，故納入前段，得下結論：

当 $k=1$ 时，不稳定集 $\mathfrak{R}$ 可分解为二串，每串含有可数无穷多个不稳定域 $\mathfrak{R}_n^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2, \dots, \nu$), $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。

至于 $k > 1$ 情形，则由款 6 已知 $\tilde{\mathfrak{R}}$ 为一个域包含 $\tilde{\Gamma}$ 在其內，又因当 $k > 1$ 时 $(\pm E_2) + \dots$ 都不是边界点，故可令 $X(t)$ 的終点 $X(\omega)$ 的某一对乘子在单位圆周上随意再环行若干匝，即 $\operatorname{Arg} X(t) \Big|_0^{\omega}$ 可以随意地增減 $2\pi m$ 使在 $\mathfrak{R}$ 內凡同一終点 $X(\omega)$ 的各曲綫都可导致适合同倫条件。故得結論：

当 $k > 1$ 时，不稳定集 $\mathfrak{R}$ 为一个域。

参 考 文 献

- 〔1〕 胡金昌，辛群与典型系統的穩定域。中山大學學報 自然科學 4 (1962) 42—54
- 〔2〕 華羅庚，辛方陣的辛相似。中山大學學報，自然科學 4 (1962) 1—12

- [3] Якубович В.А. Строение группы симплектических матриц и структура неустойчивых канонических систем с периодическими коэффициентами. Матем. сб 44 No.3(1958)313—352 [см. Опечатка, Матем.сб 55 No.3 (1961) 278].
- [4] Гельфанд И.М. и Лидский В.Б. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. УМН 10 вы. 1 (1955) 3—10.
- [5] Крейн М.Г Основны положения теории λ -зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Памяти А. А. Андропова. Изд. АН СССР (1955) 413—498.
- [6] Wintner A. The analytical foundations of celestial mechanics. 1941. 特别是在 p.414 所举出的原始文献, 此后用辛群者还见于: Siegel C.L. Vorlesungen ueber Himmelsmechanik, 1956.

On the Regions of Instability of Hamiltonian Systems.

Jinchang Hu