

关于 τ -光滑测度的一点註記

吳 占 生

設 X 是一拓撲空間, 用 $C(X)$ 記 X 上的全体有界連續函數空間。對每 $f \in C(X)$ 記

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

則 $C(X)$ 在所引進的范數下是一 Banach 空間。

設

$$\mathcal{J} = \{ Z: Z = f^{-1}[0], f \in C(X) \}$$

$$\mathcal{U} = \{ U: U = Z \text{ 的余集}, Z \in \mathcal{J} \}$$

用 $\mathcal{J}$ 記由 $\mathcal{J}$ (或 $\mathcal{U}$) 生成的代數。

所謂拓撲空間 X 上的測度是指定義在 $\mathcal{J}$ 上的非負、有限、有限可加集函數 m , 且滿足:
對每 $A \in \mathcal{J}$

$$m(A) = \sup \{ m(z): z \subset A, z \in \mathcal{J} \}.$$

用 $m(X)$ 記 X 上全体測度的集。

測度 m 稱為 τ -光滑的, 如果對每下降定向列 $\{Z_\alpha\}: Z_\alpha \in \mathcal{J}, Z_\alpha \downarrow \phi$, 都有 $m(Z_\alpha) \rightarrow 0$ 。

用 $m_\tau(X)$ 記 X 上全体 τ -光滑測度的集。

本文就空間的拓撲結構與其上測度的 τ -光滑性之間的关系提出一點註記。

1 A. Д. Александров 在 [1] 中討論了 σ -拓撲空間上的 real charge, 不難看出: 其結果 ([1] § 9, 定理 8) 相當於解決了拓撲空間測度的一個如下問題: 為了每一個測度 $m \in m(X)$ 都是 τ -光滑的, 充分而且必要 X 是何種拓撲空間; 這種空間就是滿足如下條件(*)的拓撲空間:

X 的任一族 $\mathcal{U}$ 中集合的復蓋, 均存在有限子復蓋。 (*)

下面我們不依賴於 [1], 給予上述結果另一似乎較直接的證明, 并順便得到這一事實: 為了 $m(X) = m_\tau(X)$ 必須且只須每一僅取 0 和 1 兩值的測度是 τ -光滑的。

用 $\mathcal{P}(X)$ 記僅取 0 和 1 兩值的測度的集。

用 $\mathcal{P}_\tau(X)$ 記僅取 0 和 1 兩值的 τ -光滑測度的集。

定理 1 設 X 是拓撲空間, 下面論斷等價:

i) X 滿足條件(*)

ii) $m(X) = m_\tau(X)$

iii) $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_\tau(X)$

証: i) $\Rightarrow$ ii) 及 ii) $\Rightarrow$ iii) 都是顯然的

現証 iii) $\Rightarrow$ i)

設對於空間 X , 條件(*)不成立; 則存在定向列 $\{Z_\alpha\}: Z_\alpha \in \mathcal{J}$ 且 $Z_\alpha \neq \phi, Z_\alpha \downarrow \phi$ 。

先引入定义如下: 非空集族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ 称为 X 上的 Z -filter ([3].2.2), 倘若满足:

- i) $\phi \in \mathcal{B}$.
- ii) $Z_1, Z_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{B}$.
- iii) $Z \in \mathcal{B}$, 任 $Z' \in \mathcal{F}$ 且 $Z \subset Z' \Rightarrow Z' \in \mathcal{B}$.

由于 $\{Z_\alpha\}$ 中任意有限个集之交不空, 则 $\mathcal{F}$ 中所有含有 $\{Z_\alpha\}$ 中集合的有限交集之集成一个 Z -filter $\mathcal{B}'$, 且 $\mathcal{B}' \supset \{Z_\alpha\}$, 由 Zorn 引理知存在一极大 Z -filter $\mathcal{A}$ ([3]2.5) 使得:

1° $\mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$.

2° 若有 Z -filter $\mathcal{B}$: $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ 则 $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. (此即所谓极大性)

现指出 $\mathcal{A}$ 的一些性质: 对任 $Z \in \mathcal{F}$, 若 Z 与 $\mathcal{A}$ 中任一集之交非空, 则 $Z \in \mathcal{A}$. 事实上, 可由 $\mathcal{A} \cup \{Z\}$ 产生一 Z -filter $\mathcal{B}$, 这样 $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, 所以由 2° 得 $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, 这就是说 $Z \in \mathcal{A}$.

由此可知: 若 $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$ 且 $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{A}$ 则 Z_1 与 Z_2 中至少有一个属于 $\mathcal{A}$. 事实上, 若不然, 设 Z_1 和 Z_2 都不属于 $\mathcal{A}$, 则存在 $Z'_1, Z'_2 \in \mathcal{A}$ 使

$$Z_1 \cap Z'_1 = \phi \text{ 和 } Z_2 \cap Z'_2 = \phi.$$

由是 $Z_1 \cup Z_2$ 与 $Z'_1 \cap Z'_2$ 之交是空集. 但 $Z'_1 \cap Z'_2 \in \mathcal{A}$ 和 $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{A}$, 这矛盾于 Z -filter 的定义.

现在集族 $\mathcal{F}$ 上定义仅取 0 与 1 两值的集函数 m 如下:

$$m(Z) = \begin{cases} 0 & \text{当 } Z \in \mathcal{A} \\ 1 & \text{当 } Z \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

$m(Z)$ 是有二项可加性的, 事实上由上面指出的关于 $\mathcal{A}$ 的性质可知: 若 $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$, $Z_1 \cap Z_2 = \phi$ 则 $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{A}$ 当且仅当 Z_1 和 Z_2 中有且只有一个属于 $\mathcal{A}$. 因而有:

$$\text{若 } Z_1 \cap Z_2 = \phi \text{ 则 } m(Z_1 \cup Z_2) = m(Z_1) + m(Z_2).$$

现在把集函数 m 延拓到代数 $\mathcal{F}$ 上去.

对任 $A \subset X$, 令 $m_*(A) = \sup \{m(Z): Z \in \mathcal{F} \text{ 且 } Z \subset A\}$, 则 m_* 也是仅取 0 与 1 两值的集函数.

显然有: 1) 当 $Z \in \mathcal{F}$ 时 $m_*(Z) = m(Z)$.

2) 若 $A \cap B = \phi$ 则 $m_*(A \cup B) \geq m_*(A) + m_*(B)$. 事实上, 对任 $Z_1 \in \mathcal{F}$, $Z_1 \subset A$ 及任 $Z_2 \in \mathcal{F}$, $Z_2 \subset B$ 有 $Z_1 \cap Z_2 = \phi$ 且 $Z_1 \cup Z_2 \subset A \cup B$, 故

$$m(Z_1) + m(Z_2) = m(Z_1 \cup Z_2) \leq m_*(A \cup B).$$

因 Z_1, Z_2 任意, 便得 $m_*(A) + m_*(B) \leq m_*(A \cup B)$.

我们把集 $E \subset X$ 称为 m_* -集 ([4] III, 5.1 Def.), 若对每 $A \subset X$ 有:

$$m_*(A) = m_*(A \cap E) + m_*(A \setminus E).$$

现证每一 $Z \in \mathcal{F}$ 是 m_* -集. 为此只须证: 对每 $A \subset X$ 有:

$$m_*(A) \leq m_*(A \cap Z) + m_*(A \setminus Z).$$

分两种情形证明如下:

(1) 若 $m_*(A) = 0$, 则显然有 $m_*(A) \leq m_*(A \cap Z) + m_*(A \setminus Z)$.

(2) 若 $m_*(A)=1$, 則存在 $Z_1 \in \mathcal{J}$, $Z_1 \subset A$. 使 $m(Z_1)=1$. 因而 $Z_1 \in \mathcal{A}$.

此時若 $Z \in \mathcal{A}$, 則 $Z \cap Z_1 \in \mathcal{A}$. 故 $m(Z \cap Z_1)=1$. 我們有:

$$m_*(A)=m(Z_1) \leq m(Z_1 \cap Z) + m_*(A \setminus Z) \leq m_*(A \cap Z) + m_*(A \setminus Z).$$

若 $Z \in \mathcal{A}$, 則存在 $Z_2 \in \mathcal{A}$ 使 $Z \cap Z_2 = \phi$. 因而有 $Z_1 \cap Z_2 \subset A \setminus E$, 且 $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{A}$. 此時我們也有:

$$m_*(A) \leq m_*(A \cap Z) + m(Z_1 \cap Z_2) \leq m_*(A \cap Z) + m_*(A \setminus Z).$$

一切 m_* -集成一代數 ([4] lemma III 5.2), 現既証得每 $Z \in \mathcal{J}$ 都是 m_* -集, 所以它是包含 $\mathcal{J}$ 的一個代數, 也即包含 $\mathcal{J}$.

對每 $A \in \mathcal{J}$ 令 $m(A)=m_*(A)$, 則 $m(A)$ 便是 $\mathcal{J}$ 上測度.

顯然 m 不是 τ -光滑的, 因 $Z_\alpha \downarrow \phi$ 但 $m(Z_\alpha)=1$ 對每 $Z_\alpha \in \{Z_\alpha\} \subset \mathcal{A}$.

所得証得 iii) $\Rightarrow$ i). 証完.

[註]: 定理 1 的方法也完全可用來討論 σ -光滑測度*的情形. (可參看 [2] 定理 16)

並且也可以得到一個相應的結果: 為了每一個測度都是 σ -光滑的必須且只須每一個僅取 0 和 1 的兩值測度是 σ -光滑的.

2 對於滿足 (*) 的空間, 我們指出一些事實, 它們類似於 I. Glicksberg 關於 Pseudo-Compact 空間的結果 ([2] 定理 16, 21). 証明的基本想法是 Varadarajan 於 [2] 中所提供的.

定理 2: 設 X 是拓撲空間, 下列論斷等價:

i) X 滿足 (*).

ii) 廣義 Dini 定理成立: 對任下降有界連續函數定向列 $\{f_\alpha\}$: $f_\alpha \in C(X)$, $f_\alpha \downarrow 0$, 則 $\{f_\alpha\}$ 一致地趨於零.

iii) $C(X)$ 上每一有界綫性泛函 Λ 都是 τ -光滑的. 即: 對任下降定向列 $\{f_\alpha\}$: $f_\alpha \in C(X)$, $f_\alpha \downarrow 0$ 則 $\Lambda(f_\alpha) \rightarrow 0$.

証 I) i) $\Rightarrow$ ii)

顯然 i) 可改用下面方式陳述: 對任定向列 $\{Z_\alpha\}$: $Z_\alpha \in \mathcal{J}$ 且 $Z_\alpha \downarrow \phi$, 則存在某指標 α_0 , 使得 $Z_{\alpha_0} = \phi$.

現設有定向列 $\{f_\alpha\}$: $f_\alpha \in C(X)$, $f_\alpha \downarrow 0$. 對任 $\varepsilon > 0$, 令 $Z_\alpha = \{x: f_\alpha(x) \geq \varepsilon\}$, 則 $Z_\alpha \in \mathcal{J}$. 且由假設 $f_\alpha \downarrow 0$, 便知 $Z_\alpha \downarrow \phi$. 所以存在指標 α_0 , 使得 $Z_{\alpha_0} = \phi$. 因而當 $\alpha > \alpha_0$ 時, 有 $Z_\alpha = \phi$. 這樣當 $\alpha > \alpha_0$ 時, $f_\alpha(x) < \varepsilon$ 對一切 $x \in X$. 這就証得 $\{f_\alpha\}$ 一致地趨於零.

II) ii) $\Rightarrow$ i)

若對於空間 X , 條件 (*) 不成立, 則存在下降定向列: $Z_\alpha \in \mathcal{J}$, $Z_\alpha \neq \phi$ 且 $Z_\alpha \downarrow \phi$.

令 $G = \{g: g \in C(X), g \geq 0, g=1 \text{ 在某 } Z_\alpha\}$.

將這族函數 G 記作:

$$G = \{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}.$$

* 測度 m 稱為 σ -光滑的, 如果對每下降序列 $\{Z_n\}$: $Z_n \in \mathcal{J}$, $Z_n \downarrow \phi$ 都有 $m(Z_n) \rightarrow 0$.

在指标集 A 中引入序 $\prec$: 設 $\lambda, \mu \in A$. $\lambda \prec \mu$ 当且仅当 $g_\lambda \leq g_\mu$. 現証 A 是定向的, 設 $\lambda, \mu \in A$, 則对于 G 中函数 g_λ 和 g_μ 存在 $Z_{\alpha_1}, Z_{\alpha_2} \in \{Z_\alpha\}$, 使 $g_\lambda = 1$ 在 Z_{α_1} 及 $g_\mu = 1$ 在 Z_{α_2} . 因 $\{Z_\alpha\}$ 是下降定向列, 故有 $Z_{\alpha_3} \in \{Z_\alpha\}$, 使 $Z_{\alpha_3} \subset Z_{\alpha_1} \cap Z_{\alpha_2}$. 由此 $\min(g_\lambda, g_\mu) = 1$ 在 Z_{α_3} , 所以 $\min(g_\lambda, g_\mu) \in G$. 所以存在 $\nu \in A$, 使得 $g_\nu = \min(g_\lambda, g_\mu)$. 显然 $\nu \prec \lambda$ 及 μ .

其次我們不难証明有: $g_\lambda \downarrow 0$. 事实上, 对任 $x_0 \in X$, 因 $Z_\alpha \downarrow \phi$, 故存在指标 α_0 , 使 $x_0 \notin Z_{\alpha_0}$. 取函数 $g_1 \in C(X)$, 使得 $0 \leq g_1 \leq 1$, 而且 $g_1^{-1}[0] = Z_{\alpha_0}$. 令

$$g = \frac{1}{g_1(x_0)} |g_1 - g_1(x_0)|$$

則 $g = 1$ 在 Z_{α_0} , 而且 $g(x_0) = 0$. 由定义显然 $g \in G$, 故存在 $\lambda_0 \in A$ 使 $g_{\lambda_0} = g$.

所以当 $\lambda \succ \lambda_0$ 时, 有 $g_\lambda(x_0) = 0$. 由于 x_0 是任意的, 故証得 $g_\lambda \downarrow 0$.

最后, 因对任 $g_\lambda \in \{g_\lambda\}_{\lambda \in A}$, 均存在某 $Z_\alpha \in \{Z_\alpha\}$, 使 $g_\lambda = 1$ 在 Z_α 上, 且因 $Z_\alpha \neq \phi$, 可取 $x_\lambda \in Z_\alpha$, 則有 $g_\lambda(x_\lambda) = 1$ 对每 $\lambda \in A$. 因而 $\{g_\lambda\}_{\lambda \in A}$ 是不一致收斂于零的.

III) ii) $\Rightarrow$ iii)

設 Λ 是 $C(X)$ 上有界綫性泛函. 对任定向列 $\{f_\alpha\}$: $f_\alpha \in C(X)$, $f_\alpha \downarrow 0$, 由 ii) 知它在 X 上一致收斂, 即: $\|f_\alpha\| \rightarrow 0$, 再由泛函的連續性, 便知 $\Lambda(f_\alpha) \rightarrow 0$.

IV) iii) $\Rightarrow$ i)

設对于空間 X , (*) 不成立. 則有定向列 $\{Z_\alpha\}$: $Z_\alpha \in \mathcal{J}$, $Z_\alpha \neq \phi$ 且 $Z_\alpha \downarrow \phi$. 考虑在 II) 中所得的定向列 $\{g_\lambda\}_{\lambda \in A}$, 它具有性質: $g_\lambda \downarrow \phi$, 而且对每 $g_\lambda \in \{g_\lambda\}$, 都存在某 $Z_\alpha \in \{Z_\alpha\}$, 使 $g_\lambda = 1$ 在 Z_α 上. 取 $x_\lambda \in Z_\alpha$, 这样便得定向点列 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in A}$, 使得对每 $\lambda \in A$, $g_\lambda(x_\lambda) = 1$. 現令

$$\Lambda(f) = \mathcal{L}(f(x_\lambda)),$$

其中 $\mathcal{L}$ 表示定向数列 $\{f(x_\lambda)\}$ 的 Banach 极限**.

这样 Λ 便是 $C(X)$ 上的有界綫性泛函.

对每 $g_{\lambda_0} \in \{g_\lambda\}$, 由于 $\lambda \succ \lambda_0$ 时, $g_{\lambda_0}(x_\lambda) \geq g_\lambda(x_\lambda) = 1$, 所以 $\Lambda(g_{\lambda_0}) = \mathcal{L}(g_{\lambda_0}(x_\lambda)) \geq 1$. 因 g_{λ_0} 是任意的, 所以 $\Lambda(g) \not\rightarrow 0$, 也就是 Λ 不是 τ -光滑的.

定理証完.

[註] 如果有了 A. Д. Александров 关于 $C(X)$ 上非負綫性泛函的积分表示定理, 定理 2 中論断 i) 与論断 iii) 的等价性, 其实就是从泛函角度对定理 1 中 i) 和 ii) 等价性的一个証明.*

最后, 我們来指出何时条件 (*) 就与空間的紧性等价.

对于拓扑空間 X , 在其上我們可以再引入一所謂弱拓扑 W , 即: 使函数族 $C(X)$ 中每一函数都連續的最小拓扑.

显然弱拓扑 W 是以集族 $\mathcal{U}$ 为开基的拓扑, 所以拓扑空間 X 滿足 (*) 等价于弱拓扑空間 (X, W) 是紧的.

** 参看關肇直編“泛函分析讲义”第二章 § 3.99 頁例 3.

很明显看到：为了弱拓扑就等于原拓扑，必須且只須 X 是完全正則空間。

由此，我們有如下事实：

設 X 是完全正則空間，下列命題等价：

i) X 是紧的。

ii) 广义 Dini 定理成立。

iii) $C(X)$ 上每一有界綫性泛函都是 τ -光滑的。

参 考 文 献

- [1] A. Д. Александров Additive set-function in abstract spaces Матем. сб. т 9(51)(1941)
- [2] V. S. Varadarajan. Меры На топологических пространствах Матем. сб. т 55(97)(1961)
- [3] L. Gillman and M. gerison. Rings of Continuous functions (1960)
- [4] Dunford and Schwartz. Linear operators Part I.