

二阶常系数綫性双曲型偏微分方程組的对頂点定理及其应用

馬汝念 陈宝耀 吳茲潛 肖应昆

(数学力学系)

摘 要

本文給出含两个自变数两个未知函数的常系数二阶綫性双曲型方程組

$$A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

的关于特征綫四边形的两个对頂点定理, 及应用它們証明在任何閉若当曲綫所围成的域上提 Dirichlet 問題, Neumann 問題一般是不可能的。从而方程組的双曲型性质得到較深刻的刻划。

命 A、B、C 代表三个二行二列的实数方陣, 含两个自变数两个未知函数的常系数二阶綫性方程組写为

$$A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

行列式

$$Q(\xi, \eta) = |A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2|$$

定义为方程組(1)的特征四次型。如果特征方程

$$Q(\xi, \eta) = 0$$

的根全为实根而且不是四重实根, 則方程組(1)称为双曲型的。此时对应特征方程的根有下列四种情形: i) 四个不同实根, ii) 两个二重实根, iii) 三个不同实根, iv) 一个单实根和一个三重根。因此方程組(1)相应分为四种类型。每一种类型都可化

1964年11月24日收到

为标准型^[1]和証明其通解存在^[2]。

本文将給出双曲型方程組(1)的第一及第二对頂点定理,从而証明双曲型方程組(1)在相当广泛一类的任意閉若当曲綫围成的域上提 Dirichlet 問題, Neumann 問題一般是不可能的。

§1 四个不同实特征根的情形

此类方程組的标准型是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad (2)$$

其中 $b_3 = b_1^2 - \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{k} \right) b_1 + \frac{1}{4}$ 。此时方程組(2)的特征根是: $0, \infty, k$ 和 $\frac{1}{k}$ ($0 < k < 1$)。其通解是

$$\begin{aligned} u &= f_2(y) + f_3(x - ky) + f_4\left(x - \frac{y}{k}\right) \\ v &= f_1(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 2b_1 \right) f_3(x - ky) + \frac{1}{2} (k - 2b_1) f_4\left(x - \frac{y}{k}\right), \end{aligned}$$

其中 f_1, f_2, f_3, f_4 均是任意的二阶可微函数。

設 $\square ABCD, \square EFGH$ 及 $\square IJKL$ 是以特征綫

$$x - ky = \text{常数} \quad x - \frac{y}{k} = \text{常数}$$

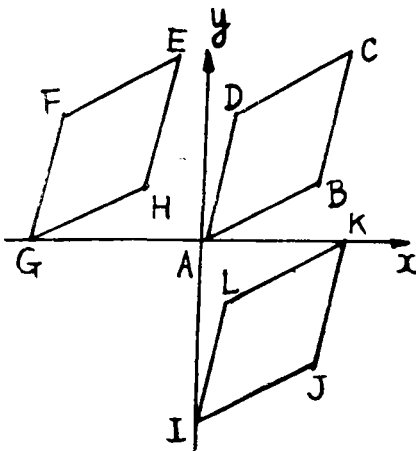


图1

为边的三个全等的特征平行四边形,其中 $\square ABCD$ 和 $\square EFGH$ 同在一水平綫之上, $\square ABCD$ 及 $\square IJKL$ 在鉛垂綫的同一側, (如图1)由通解易証下面的第一和第二对頂点定理:

定理1.1 (第一对頂点定理) 方程組(2)的正规解 u 在两个特征平行四边形的两对对頂点 ($A, C; F, H$) 上的值的和等于另外两对对頂点 ($B, D; E, G$) 上的值的和, v 在两个特征平行四边形的两对对頂点 ($A, C; J, L$) 上的值的和等于另外两对对頂点 ($B, D; I, K$) 上的值的和。即

$$\begin{aligned} u(A) + u(C) + u(F) + u(H) &= u(B) + u(D) + u(E) + u(G), \\ v(A) + v(C) + v(J) + v(L) &= v(B) + v(D) + v(I) + v(K). \end{aligned}$$

由此可以推证, 由通过 A、B、C、D、E、F、G、H 或 A、B、C、D、I、J、K、L、諸点的任一闭若当曲线所围成的域上提 Dirichlet 问题一般是不可能的。

定理 1.2 (第二对顶点定理) 方程组 (2) 的正规解的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 在特征平行四边形的一对对顶点上的值的和等于另外一对对顶点上的值的和, 偏导数 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 在两个特征平行四边形的两对对顶点 (A, C; F, H) 上的值的和等于另外两对对顶点 (B, D; E, G) 上的值的和, 偏导数 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 在两个特征平行四边形的两对对顶点 (A, C; J, L) 上的值的和等于另外两对对顶点 (B, D; I, K) 上的值的和, 即

$$\begin{aligned} u_x(A) + u_x(C) &= u_x(B) + u_x(D), \\ v_y(A) + v_y(C) &= v_y(B) + v_y(D), \\ u_y(A) + u_y(C) + u_y(F) + u_y(H) &= u_y(B) + u_y(D) + u_y(E) + u_y(G), \\ v_x(A) + v_x(C) + v_x(J) + v_x(L) &= v_x(B) + v_x(D) + v_x(I) + v_x(K). \end{aligned}$$

任取一条含有直线段 GH, AB, FE 和 DC 的光滑闭若当曲线 l , 则由定理 1.2 易证在 l 上的内法线方向导数恒有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(A)}{\partial n} - \frac{\partial u(B)}{\partial n} - \frac{\partial u(C)}{\partial n} + \frac{\partial u(D)}{\partial n} + \frac{\partial u(E)}{\partial n} - \frac{\partial u(F)}{\partial n} \\ - \frac{\partial u(G)}{\partial n} + \frac{\partial u(H)}{\partial n} = 0. \end{aligned}$$

由此推知, 不能在若当曲线 l 上任意给定 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的值, 因此在上述曲线 l 所围成的域上提 Neumann 问题一般是不可能的。

§2 两个二重实特征根情形

此类方程组的标准型是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} - k & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad (3)$$

其中 $k \neq 0, \frac{1}{4}$. 特征根为 $0, +\infty$, 相应的通解为

$$\begin{aligned} u &= x f_1(y) + f_2(y) - 2 \int_0^y f_3(t) dt \\ v &= -\frac{1-4k}{2} \int_0^y f_1(t) dt + y f_3(x) + f_4(x), \end{aligned}$$

其中, f_1, f_2, f_3, f_4 是二阶任意可微的函数。

设 $\square ABCD, \square EFGH$ 和 $\square IJKL$ 是以特征线

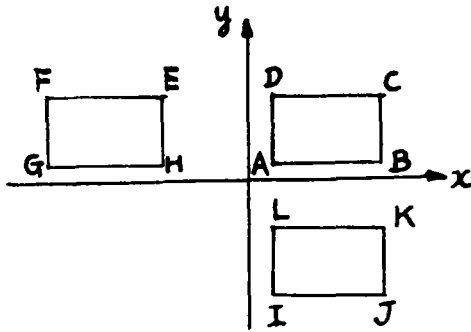


图2

$x = \text{常数}$ $y = \text{常数}$

为边的三个全等的特征矩形，其中 $\square ABCD$ 和 $\square EFGH$ 在同一水平綫之上， $\square ABCD$ 和 $\square IJKL$ 在鉛垂綫的同一側（如图2）由通解容易証得类似于定理1.1及1.2的两个对頂点定理即

定理2.1 方程組(3)的正规解

u, v 在特征矩形上恒有

$$\begin{aligned} u(A) + u(C) + u(F) + u(H) &= u(B) + u(D) + u(E) + u(G), \\ v(A) + v(C) + v(J) + v(L) &= v(B) + v(D) + v(I) + v(K). \end{aligned}$$

显然由通过 A, B, C, D, E, F, G, H, 或 A, B, C, D, I, J, K, L 各点的任一閉若当曲綫围成的域上提Dirichlet問題，一般是不可能的。

定理2.2 方程組(3)的正规解的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}$ 在特征矩形上

恒有

$$\begin{aligned} u_x(A) + u_x(C) &= u_x(B) + u_x(D), \\ v_y(A) + v_y(C) &= v_y(B) + v_y(D), \\ u_y(A) + u_y(C) + u_y(F) + u_y(H) &= u_y(B) + u_y(D) + u_y(E) + u_y(G), \\ v_x(A) + v_x(C) + v_x(J) + v_x(L) &= v_x(B) + v_x(D) + v_x(I) + v_x(K). \end{aligned}$$

取一含有水平直綫段 AB, CD 的光滑閉約当曲綫 l ，其中 A 与 D, C 与 B 有相同的横坐标。那么

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(A)}{\partial n} &= \frac{\partial v(A)}{\partial y}, \\ \frac{\partial v(B)}{\partial n} &= \frac{\partial v(B)}{\partial y}, \\ \frac{\partial v(C)}{\partial n} &= -\frac{\partial v(C)}{\partial y}, \\ \frac{\partial v(D)}{\partial n} &= -\frac{\partial v(D)}{\partial y}. \end{aligned}$$

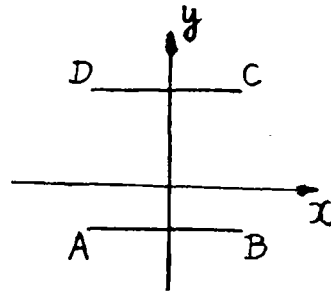


图3

于是由上对頂点定理立得

$$\frac{\partial v(A)}{\partial n} - \frac{\partial v(B)}{\partial n} - \frac{\partial v(C)}{\partial n} + \frac{\partial v(D)}{\partial n} = 0.$$

这就是說，在以上述閉約当曲綫 l 所围成的域上提Neumann問題一般是不可能的。

§3 三个不同实特征根(其中一个为重根)情形

此类方程组的标准型是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

其中 $b_3^2 = b_1^2 - b_1 + \frac{1}{4}$, $b_1 \neq 0$. 特征

根为 0, ∞ 及 1. 通解是

$$\begin{aligned} u &= f_1(x-y) - (1-2b_1)[xf_1'(x-y) + f_2(x-y)] + f_3(y) \\ v &= -2b_3[xf_1'(x-y) + f_2(x-y)] + f_4(x), \end{aligned}$$

其中 f_1, f_2, f_3, f_4 是任意二阶可微的函数.

设 $\square A_1 B_1 C_1 D_1$ 和 $\square E_1 F_1 G_1 H_1$ 是以特征线

$$y = \text{常数} \quad \text{和} \quad x - y = \text{常数}$$

为边的一对全等的特征平行四边形(如图4a). $\square A_2 B_2 C_2 D_2$ 和 $\square E_2 F_2 G_2 H_2$ 是以特征线 $x = \text{常数}$ 和 $x - y = \text{常数}$ 为边的一对全等的特征平行四边形, (如图4b).

同理从通解立即推得类似定理 1.1 的定理.

定理 3.1 方程组(4)的正规解 u, v 在特征平行四边形上恒有

$$\begin{aligned} u(A_1) + u(C_1) + u(F_1) + u(H_1) &= \\ &= u(B_1) + u(D_1) + u(E_1) + u(G_1), \\ v(A_2) + v(C_2) + v(F_2) + v(H_2) &= \\ &= v(B_2) + v(D_2) + v(E_2) + v(G_2). \end{aligned}$$

显然在通过 $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i$ ($i=1, 2$) 各点的任一闭若当曲线所围成的域上提 Dirichlet 问题一般是不可能的.

定理 3.2 方程组(4)的正规解的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ 在特征四边形上有

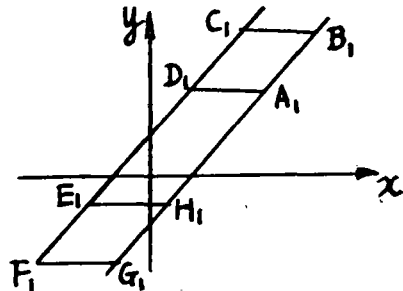


图 4 a

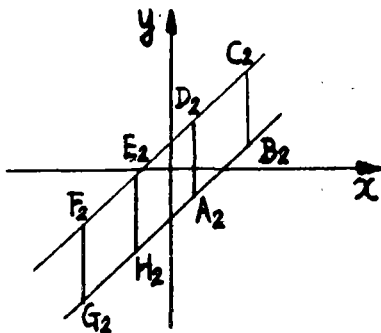


图 4 b

$$(u_x + u_y)(A_1) + (u_x + u_y)(C_1) = (u_x + u_y)(B_1) + (u_x + u_y)(D_1),$$

$$(v_x + v_y)(A_2) + (v_x + v_y)(C_2) = (v_x + v_y)(B_2) + (v_x + v_y)(D_2).$$

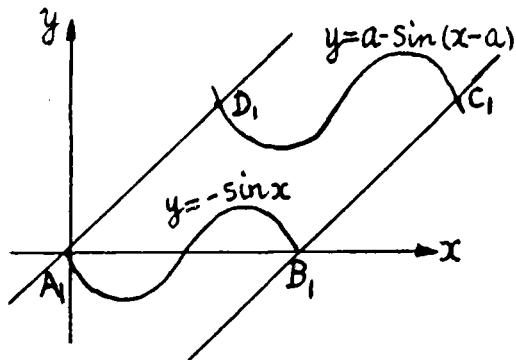


图5

取一含有曲线段
 $y = -\sin x$ 和 $y = a - \sin(x-a)$
 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的光滑若当闭曲线 l , 其中 a 为任意实数由定理3.2可得

$$\frac{\partial u(A_1)}{\partial n} + \frac{\partial u(B_1)}{\partial n} =$$

$$= \frac{\partial u(C_1)}{\partial n} + \frac{\partial u(D_1)}{\partial n}.$$

由此可见一般是不能在 l 所围的域上提 Neumann 问题。

§4 一个单实根和一个三重根情形

此类方程的标准型是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & k \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad (5)$$

其中 $k \neq 0$, 对应特征根为 $0, \infty$. 通解是

$$u = x^2 f_1'(y) + 2x \{ 2k f_1(y) + f_2(y) \} + f_3(y)$$

$$v = -x f_1(y) - \int_0^y f_2(t) dt + f_4(x),$$

其中 f_1, f_2, f_3, f_4 是任意二阶可微的函数。

$\square ABCD$ 和 $\square EFGH$ 是以特征线 $x = \text{常数}$, $y = \text{常数}$ 为边的两个全等的特征矩形(如图6)由通解易得

定理4.1 方程组(5)的正规解 u 若在特征线 $y = \text{常数}$ 上给定三点的值, 则完全确定 u 在该特征线上的值, 而 v 在特征矩形上则有

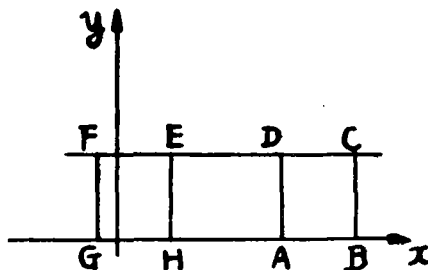


图6

$$v(A) + v(C) + v(F) + v(H) = v(B) + v(D) + v(E) + v(G).$$

由此推得, 在含有一段水平特征线段的任意闭若当曲线 l 所围成的域上或以通过

A, B, C, D, E, F, G, H , 的若当闭曲线所围成的域上提 Dirichlet 问题是不能的。

定理 4.2 方程组 (5) 的正规解 u 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 若在特征线 $y = \text{常数}$ 上二点的值给出, 则完全可以确定 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在该特征线 $y = \text{常数}$ 上的值。 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 在特征线上的值则由其上三点的值所确定, 而正规解 v 则有

$$\begin{aligned} v_x(A) + v_x(C) &= v_x(B) + v_x(D), \\ v_y(A) + v_y(C) + v_y(F) + v_y(H) &= v_y(B) + v_y(D) + v_y(E) + v_y(G). \end{aligned}$$

如果闭曲线 l 有一段与水平特征线重合则显然不能在 l 所围成的域上提 Neumann 问题。或者取图 3 的闭曲线, 在其上易证

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(A)}{\partial n} - \frac{\partial v(B)}{\partial n} + \frac{\partial v(C)}{\partial n} - \frac{\partial v(D)}{\partial n} - \frac{\partial v(E)}{\partial n} \\ + \frac{\partial v(F)}{\partial n} - \frac{\partial v(G)}{\partial n} + \frac{\partial v(H)}{\partial n} = 0. \end{aligned}$$

从而在其上亦不能提 Neumann 问题。

从上结果得出: 含两个自变数两个未知函数的常系数二阶线性双曲型方程组一般是不能提 Dirichlet 问题和 Neumann 问题。也就是说, 方程组 (1) 的双曲型性质能深刻地刻划出来。

除此, 还可以应用第一和第二对顶点定理探讨双曲型方程组的其他各种定解问题。

参 考 文 献

- (1) 华罗庚、吴兹潜 林伟: 常系数二阶两个自变数两个未知函数的偏微分方程组的标准型 科学通报 1964 年 12 期
- (2) 吴兹潜 林伟: 常系数二阶两个自变数两个未知函数的线性双曲方程组 (I)(II)(III)(IV) (其中 II, III, IV, 未发表) 中山大学学报 1964 3 期

The Opposite Vertex Theorems of Second Order Linear Partial Differential System of Hyperbolic Type with Constant Coefficients and Their Applications

Ma Ju-nien, Chen Bou-yew, Wu Tze-chine, Siao Ing-kuen

Abstract

Let A, B, C denote three 2×2 matrices of real constants. Then a linear system of partial differential equations of the second order with constant coefficients and with two independent variables and two unknown functions is written as

$$A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

The determinant

$$Q(\xi, \eta) = |A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2|$$

is defined as the biquadratic characteristic form of (1). If the roots of the characteristic equation

$$Q(\xi, \eta) = 0$$

are real and not all equal, then (1) is said to be of hyperbolic type. In this case, the roots of the corresponding characteristic equation belong to one of the following four cases: (i) four distinct real roots, (ii) two multiple real roots, (iii) three distinct real roots, (iv) one single real root and one triple real root.

In this paper we shall present the first and second opposite vertex theorems of the hyperbolic system (1) and hence prove that to propose the Dirichlet Problem, the Neumann Problem of the hyperbolic system (1) on any domain surrounded by a closed Jordan curve is generally impossible.