

$\check{C}^J, \hat{C}^J$ 函数类与強馬氏过程

司徒 榮

(数学力学系)

本文受[2][5]之启发,在梁之舜副教授的指导下,提出了 $\check{C}^J$ 、 $\hat{C}^J$ 函数类(这两类函数在 J 取成不同集族时,可得出不同函数类,例如:可得出全体有界連續可測函数类,及具紧支柱的連續可測函数类等),对其积分上、下半連續性之等价命题及与可測函数之关系,积分相等之等价命题等进行了研究,得出了看来会有广泛应用之定理。然后在将[3]之強馬氏过程定义作了等价之簡化后,将上述研究应用于馬氏过程及強馬氏过程,使統一地得出了在相当广泛的一类拓扑可測空間上,馬氏过程成強馬氏过程的充分必要条件或充分条件等,从而概括了[2][3][5]中一系列的結果。最后,应用这些結果又提供了在更广泛的空間里考虑特征算子之可能性,并将[5]这方面之若干結果作了推广。

§1. $\hat{C}^J, \check{C}^J$ 函数类的性質

1. $\hat{C}^J, \check{C}^J$ 函数类的积分上、下半連續性

以下,恒設:

(E, C, B) 为任一拓扑可測空間, Y 为拓扑空間, 对任意 $y \in Y$, 对应了一个 B 上之有限测度 μ_y , 用 f 表 (E, C, B) 上之实值函数, 記

$$C = \{f : f \text{ 为連續可測, 且 } 0 \leq f \leq 1\}$$

$$C'' = \left\{ G : G \subset E, \text{ 存在 } f \in C, G = \{f \neq 0\} \right\}$$

$$F'' = \{F : F \subset E, \bar{F} \in C''\}$$

(其中 $\bar{F}$ 表 F 在 E 中之余集, 以下同此) 又設 J 为 E 之任意一个子集族。

称 $G \subset E$ 具有 J —包围, 若存在 $\Gamma \in J$, 使 $G \subset \Gamma$ 。称 f 具 J —支柱, 若存在 $F \in J$, 使 $f(x) = 0$, 当 $x \in \bar{F}$ 。記 J — $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 若任給 $\varepsilon > 0$, 存在

$F \in J$, 使 $|f(x)| < \epsilon$, 当 $x \in \bar{F}$ 。又記

$$\check{C}^J = \{f: f \in C, f \text{ 具 } J \text{ 一支柱}\}$$

$$\hat{C}^J = \{f: f \in C, J\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$$

$$\text{易知 } \check{C}^J \subset \hat{C}^J \subset C$$

以下关于 J 所附加之条件, 仅在某些定理中用到其中之若干个, 为方便计, 先全部罗列于此: $J.1^\circ F \in J \rightarrow$ 存在 $G \in C''$, G 具 J 一包围, 使 $F \subset G$

$J.2^\circ F_1, F_2 \in J \rightarrow F_1 \cup F_2$ 具 J 一包围

$J.3^\circ J \subset F''$

定理 1.1.1. 对任意集族 J (不要求满足任何附加条件), 设 $y_0 \in Y$, 则下列命题等价:

$1^\circ f \in \hat{C}^J \rightarrow \int_E f d\mu_{y_0}$ 在 y_0 下半連續

$2^\circ f \in \check{C}^J \rightarrow \int_E f d\mu_{y_0}$ 在 y_0 下半連續

$3^\circ G \in C''$, 且 G 具 J 一包围 $\rightarrow \mu_{y_0}(G)$ 在 y_0 下半連續

$4^\circ \Gamma \in B$, 且对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $G \in C''$, G 具 J 一包围, $G \subset \Gamma$, 使 $\mu_{y_0}(\Gamma \setminus G) < \epsilon \rightarrow \mu_{y_0}(\Gamma)$ 在 y_0 下半連續

(注) 自然地把满足 4° 左边假设之集 Γ 称为 μ_{y_0} 之下半連續集。

未証此定理前, 先注意到下面的事实:

引理 1.1.1. $1^\circ G \in C'' \rightarrow G = \bigcap_{K=1}^{\infty} F_K, F_K \in F'', \text{ 且 } F_K \uparrow$, ①

$2^\circ F_1, F_2 \in F'', F_1 \cap F_2 = \emptyset \rightarrow$ 存在 $f \in C$, 使 $F_1 = \{f=1\}, F_2 = \{f=0\}$ ②

以下往証定理 1.1.1.

(証) $1^\circ \rightarrow 2^\circ$ 是显然的。往証 $2^\circ \rightarrow 3^\circ$: 設 $G \in C''$, 且具 J 一包围。按上面引理, 有 $G = \bigcup_{K=1}^{\infty} F_K, F_K \in F'', F_K \uparrow$, 及存在 $g_n \in C$, 使 $g_n(x) = 1$, 当 $x \in F_n$; $g_n(x) = 0$, 当 $x \in \bar{G}$ 。令

$f_n = \max(g_1, g_2, \dots, g_n)$, 易知 $0 \leq f_n \uparrow \chi_G, f_n \in \check{C}^J$; 故由 $\int_E f_n d\mu_{y_0}$ 在 y_0 下半連續对一切 n 真, 可推知 $\int_E \chi_G d\mu_{y_0} = \mu_{y_0}(G)$ 在 y_0 亦下半連續。

証 $3^\circ \rightarrow 4^\circ$: 設 Γ 为滿足 4° 左边假设之集。任給 $\epsilon > 0$, 按假设应存在 $G \in C''$, G 具有 J 一包围, $G \subset \Gamma$, 使 $\mu_{y_0}(\Gamma \setminus G) < \epsilon$, 但对 G , 由 3° 知, 应存在 y_0 之邻域 U_{y_0} , 使 $y \in U_{y_0} \rightarrow$

① $G_K \downarrow$ 表: $G_K \supset G_{K+1}, K = 1, 2, \dots, G_K \uparrow$ 表: $G_K \subset G_{K+1}, K = 1, 2, \dots$,

② $\{f=1\}$ 表集合 $\{x: f(x)=1\}$

$\mu_{y_0}(\Gamma) - 2\varepsilon \leq \mu_{y_0}(G) - \varepsilon \leq \mu_y(G) \leq \mu_y(\Gamma)$, 得证4°.

证4°→1°: 设 $f \in \hat{C}^J$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 便存在 $\Gamma \in J$, 使 $0 \leq f(x) < \varepsilon$, 当 $x \in \bar{\Gamma}$, 因为 $\mu_{y_0}f^{-1}$ 是数直线上之有限测度, 故 $\mu_{y_0}f^{-1}(\{t\}) > 0$ 之 t 点至多可数个, 取分点 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $t_0 < 0$, $t_n > 1$, 使 $t_K (K=0, 1, \dots, n)$ 满足 $\mu_{y_0}f^{-1}(\{t_K\}) = 0$, 且 $\text{Max}(t_K - t_{K-1}) < \varepsilon$.

令 $E_K = \{t_{K-1} < f \leq t_K\} \cap \{f > \varepsilon\}$,

$$S_y = \sum_{K=1}^n t_{K-1} \mu_y(E_K).$$

易知 E_K 为满足4°左边假设之集①, 故对 $\varepsilon > 0$, 应存在 y_0 之邻域 U_{y_0} , 使 $y \in U_{y_0} \rightarrow$

$\mu_y(E_K) \geq \mu_{y_0}(E_K) - \frac{\varepsilon}{n} \rightarrow S_y \geq S_{y_0} - \varepsilon$. 但另一方面, 又有

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu_y - S_y &= \int \{f \leq \varepsilon\} f d\mu_y + \int \{f > \varepsilon\} f d\mu_y - S_y = \\ &= \int \{f \leq \varepsilon\} f d\mu_y + \sum_{K=1}^n \int_{E_K} (f - t_{K-1}) d\mu_y \geq 0, \end{aligned}$$

$$0 \leq \int_E f d\mu_{y_0} - S_{y_0} = \int \{f \leq \varepsilon\} f d\mu_{y_0} + \int \{f > \varepsilon\} f d\mu_{y_0} - S_{y_0} \leq \varepsilon \mu_{y_0}(E),$$

故 $y \in U_{y_0} \rightarrow \int_E f d\mu_y - \int_E f d\mu_{y_0} = \int_E f d\mu_y - S_y + (S_y - S_{y_0}) + (S_{y_0} - \int_E f d\mu_{y_0}) \geq -\varepsilon - \varepsilon \mu_{y_0}(E)$, 得证1°. ②

定理1.1.2. 对满足条件J.1°之集族 J , 若还有: 存在 y_0 之邻域 U_{y_0} , 使 $y \in U_{y_0} \rightarrow 0 \leq \mu_y(E) \leq M$ (M 为常数), 则对 $y_0 \in Y$, 有下列命题等价:

1° $f \in \hat{C}^J \rightarrow \int_E f d\mu_y$ 在 y_0 上半连续

2° $f \in \check{C}^J \rightarrow \int_E f d\mu_y$ 在 y_0 上半连续

3° $F \in F''$, 且 F 具 J ——包围 $\rightarrow \mu_y(F)$ 在 y_0 上半连续

4° $\Gamma \in B$, 且任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $F \in F''$, F 具 J ——包围, $\Gamma \subset F$, 使 $\mu_{y_0}(F \setminus \Gamma) < \varepsilon \rightarrow \mu_y(\Gamma)$ 在 y_0 上半连续③

① 事实上, 作 $E'_K = \{t_{K-1} < f < t_K\} \cap \{f > \varepsilon\}$, 便有 $E'_K \in C''$, 具 J ——包围 ($\{f > \varepsilon\} \subset \Gamma \in J$), $E'_K \subset E_K$, 且 $0 \leq \mu_{y_0}(E_K \setminus E'_K) \leq \mu_{y_0}f^{-1}(\{t_K\}) = 0$

② 由定理之证明可见, 在定理1.1.1.中下面的命题也是一个等价命题:

5° $\Gamma \in B$, 且存在 $G \in C^J, F \in F^J, F, G$ 均具 J ——包围, $G \subset \Gamma \subset F$, 使 $\mu_{y_0}(F \setminus G) = 0 \rightarrow \mu_y(\Gamma)$ 在 y_0 下半连续.

③ 自然地满足4°左边假设之集称为 μ_{y_0} 之上半连续集.

[証] $1^\circ \rightarrow 2^\circ$ 显然, 在証 $2^\circ \rightarrow 3^\circ$ 时, 只需注意到: 若 F 滿足 3° 左边之假設, 由引理1.1.1.及 $J.1^\circ$ 之性質, 不难重新作得 $G_K \in C''$, G_K 具 J —包围, $G_K \downarrow$, 使 $F = \bigcap_{K=1}^{\infty} G_K$, 剩下之証明用类似于上面定理之 $2^\circ \rightarrow 3^\circ$ 之証法便可完成。最后, 往証 $4^\circ \rightarrow 1^\circ$ 时, 仅需注意到: 当 $f \in \hat{C}^J$ 时, $\{f \geq \varepsilon\} \in F''$, 且具 J —包围, 仿上令 $E_K = \{t_{K-1} < f \leq t_K\} \cap \{f \geq \varepsilon\}$ (其中 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $t_0 < 0$, $t_n > 1$, $\mu_{y_0} f^{-1}(\{t_K\}) = 0$, $\text{Max}(t_K - t_{K-1}) < \varepsilon$) 及 $S_y = \sum_{K=1}^n t_K \mu_y(E_K)$ 时, 便不难驗證 E_K 滿足 4° 左边假設及 $|\int_K f d\mu_y - S_y| \leq \varepsilon \mu_y(E) < M\varepsilon$, 当 $y \in U_{y_0}$ 时故按設 4° 及仿前类似証法, 可得証 $4^\circ \rightarrow 1^\circ$ 。①

由上二定理, 即得

定理1.1.3. 設集族 J 滿足 $J.1^\circ$, 且存在 y_0 之邻域 U_{y_0} , 使 $y \in U_{y_0} \rightarrow 0 \leq \mu_y(E) \leq M$, (M 为常数) 則对 $y_0 \in Y$, 下列命題等价:

$$1^\circ \quad f \in \hat{C}^J \rightarrow \int_E f d\mu_y \text{ 在 } y_0 \text{ 連續}$$

$$2^\circ \quad f \in \check{C}^J \rightarrow \int_E f d\mu_y \text{ 在 } y_0 \text{ 連續}$$

$$3^\circ \quad G \in C'', G \text{ 具 } J\text{—包围} \rightarrow \mu_y(G) \text{ 在 } y_0 \text{ 下半連續}$$

$$F \in F'', F \text{ 具 } J\text{—包围} \rightarrow \mu_y(F) \text{ 在 } y_0 \text{ 上半連續}$$

$4^\circ \quad \Gamma$ 为 μ_{y_0} 之連續集 (定义为: 任給 $\varepsilon > 0$, 存在 $G \in C''$, $F \in F''$, G 与 F 均具 J —包围, $G \subset \Gamma \subset F$, 使 $\mu_{y_0}(F \setminus G) < \varepsilon$) $\rightarrow \mu_y(\Gamma)$ 在 y_0 为連續

若仅討論 $\check{C}^J$ 中函数之积分上半連續性, 可不假設测度 μ_y 为在 y_0 邻域內一致有界之条件, 但需加設集族 J 滿足 $J.3^\circ$:

定理1.1.4. 設集族 J 滿足 $J.1^\circ$ 及 $J.3^\circ$, $y_0 \in Y$, 則下列命題等价:

$$1^\circ \quad f \in \check{C}^J \rightarrow \int_E f d\mu_y \text{ 在 } y_0 \text{ 上半連續}$$

$$2^\circ \quad F \in F'', F \text{ 具 } J\text{—包围}, \rightarrow \mu_y(F) \text{ 在 } y_0 \text{ 上半連續}$$

$$3^\circ \quad \Gamma \in B, \text{ 且对任給 } \varepsilon > 0, \text{ 存在 } F \in F'', F \text{ 具 } J\text{—包围}, \Gamma \subset F, \text{ 使 } \mu_{y_0}(F \setminus \Gamma) < \varepsilon \rightarrow \mu_y(\Gamma) \text{ 在 } y_0 \text{ 上半連續}$$

[証] $1^\circ \rightarrow 2^\circ \rightarrow 3^\circ$ 之証明与定理1.1.2之 $2^\circ \rightarrow 3^\circ \rightarrow 4^\circ$ 全同。在証明 $3^\circ \rightarrow 1^\circ$ 时也是类似于該定理之 $4^\circ \rightarrow 1^\circ$ 的, 仅需注意到: 改令

$$E_K = \{t_{K-1} < f \leq t_K\} \cap \Gamma \text{ (其中 } \Gamma \in J, \text{ 使 } f(x) = 0, \text{ 当 } x \in \bar{\Gamma} \text{)} \text{ 及令 } S_y = \sum_{K=1}^n t_K \mu_y(E_K),$$

① 同139頁之脚注②一样, 定理1.1.2.也能加上类似的等价命題。以下之定理均可有类似的附注, 茲从略。

由于 $J \subset F''$, 故不难验证 E_K 满足 3° 左边假设, 及易知 $\int_E f d\mu_y - S_y = \sum_{K=1}^n \int_{E_K} (f - t_K) d\mu_y \leq 0$, $0 \leq S_{y_0} - \int_E f d\mu_{y_0} < \mathcal{E}\mu_{y_0}(E)$, 故仿前用类似办法便可证明得 $3^\circ \longrightarrow 1^\circ$ 真.

由定理 1.1.1. 及定理 1.1.4., 又立即可得

定理 1.1.5. 设集族 J 满足 $J.1^\circ$ 及 $J.3^\circ$, $y_0 \in Y$, 则下列命题等价:

- 1° $f \in \bigvee J \longrightarrow \int_E f d\mu_y$ 在 y_0 连续
- 2° $G \in C''$, G 具 J -包围 $\longrightarrow \mu_y(G)$ 在 y_0 下半连续,
 $F \in F''$, F 具 J -包围 $\longrightarrow \mu_y(F)$ 在 y_0 上半连续
- 3° Γ 为 μ_{y_0} -之连续集 (定义同定理 1.1.3. 之 4°) $\longrightarrow \mu_y(\Gamma)$ 在 y_0 连续

2. $\bigvee J$ 函数类与可测函数类之间的关系

在这里, 恒设:

(E, C, B) 为任一拓扑可测空间, J 为 E 之一个子集族, 满足 $J.1^\circ$ 及 $J.2^\circ$.

又设 J_1 为 E 之任意子集族, 满足下述条件:

- $J_{1.1}^\circ$ $J_1 \subset F''$
- $J_{1.2}^\circ$ $F_1, F_2 \in J_1 \longrightarrow F_1 \cap F_2 \in J_1$
- $J_{1.3}^\circ$ $F \in J_1 \longrightarrow F$ 存在 J -包围

并设拓扑可测空间 (E, C, B) 满足 $B = \sigma(J_1)$, $E = \bigcup_{K=1}^\infty E_K$, $E_K \in F''$, E_K 具

J -包围, 则有

定理 1.2.1. 设 L 为 (E, C, B) 上任一实值函数系, 满足 $f \in L \longrightarrow \text{Max}(f, 0)$ 及 $-\text{Min}(f, 0) \in L$, 称 (E, C, B) 上之实值函数系 H 为 L' -系, 若

- 1) $f, g \in H \longrightarrow \alpha f + \beta g \in H$, 其中 α, β 为任意实数;
- 2) $f_n \in H$, $0 \leq f_n \uparrow f$, 且 f 为有界或 $\in L \longrightarrow f \in H$

则有 L' -系 H 包含 $\bigvee J \longrightarrow H$ 包含全体 B -可测且 $\in L$ 之函数

[证] 先证 $1 \in H$: 由设易得 $E = \bigcup_{K=1}^\infty E_K$, $E_K \uparrow$ 且 $\in F''$, E_K 具 J -包围, 按 F'' 及 J 之性质, 不难作得 $G_K \in C''$, $G_K \uparrow$, G_K 具 J -包围, 使 $E_K \subset G_K$, 故由引理 1.1.1., 知存在 $\varphi_K \in C$, 使 $\varphi_K(x) = 1$, 当 $x \in E_K$; $\varphi_K(x) = 0$, 当 $x \in \bar{G}_K$. 取 $f_n = \text{Max}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, 易知 $f_n \in \bigvee J$, 且 $f_n \uparrow 1$, 故 $1 \in H$.

现任取 $F \in J_1$, 由 $J_{1.3}^\circ$ 及 $J_{1.1}^\circ$ 与 $J.1^\circ$, 不难作得 $G_K \in C''$, $G_K \downarrow$ 且具 J -包围, 使 $F = \bigcap_{K=1}^\infty G_K$, 故利用引理 1.1.1., 不难作得 $f_n \in \bigvee J$, $f_n \downarrow \chi_F$, 从而 $0 \leq 1 - f_n \uparrow 1 - \chi_F$.

由于上面已证 $1 \in H$, 且 H 对线性运算封闭, 故可知 $1 - f_n \in H$, 从而 $1 - \chi_F \in H$, 故 $\chi_F \in H$.

但 J_1 对有限交封闭, 故含有 1 的 L' -系便必含有全体关于 $B = \sigma(J_1)$ 可测且 $\in L$ 之函

数 ([3]引理1.2.)。

定理1.2.2. 設 μ, ν 为 B 上之二个有限测度, 則 下列命题等价: (在 $E = \bigcup_{K=1}^{\infty} E_K$ 中加設 $E_K \in J_1$) ①

$$1^\circ \quad \Gamma \in B \longrightarrow \mu(\Gamma) = \nu(\Gamma)$$

$$2^\circ \quad G \in C'', \text{ 且 } G \text{ 具 } J\text{-包围} \longrightarrow \mu(G) = \nu(G)$$

$$3^\circ \quad F \in F'', \text{ 且 } F \text{ 具 } J\text{-包围} \longrightarrow \mu(F) = \nu(F)$$

$$4^\circ \quad F \in J_1 \longrightarrow \mu(F) = \nu(F)$$

$$5^\circ \quad f \in \overset{\vee}{C} \longrightarrow \int_E f d\mu = \int_E f d\nu$$

$$6^\circ \quad f \in \hat{C} \longrightarrow \int_E f d\mu = \int_E f d\nu$$

$$7^\circ \quad f \in C \longrightarrow \int_E f d\mu = \int_E f d\nu$$

$$8^\circ \quad f \in B \longrightarrow \int_E f d\mu = \int_E f d\nu \text{ ②}$$

$9^\circ \quad \Gamma$ 为 μ, ν 之公共連續集 (即 $\Gamma \in B$, 且任給 $\epsilon > 0$, 存在 $F_i \in F'', G_i \in C'', F_i, G_i$ 均具 J -包围, 使 $G_i \subset \Gamma \subset F_i (i=1, 2)$, 及 $\mu(F_1 \setminus G_1) < \epsilon, \nu(F_2 \setminus G_2) < \epsilon$) $\longrightarrow \mu(\Gamma) = \nu(\Gamma)$

$$10^\circ \quad f \in \overset{\vee}{C}, S \text{ 为 } (0, +\infty) \text{ 上之Borel集} \longrightarrow \mu f^{-1}(S) = \nu f^{-1}(S)$$

[証] 显然 $1^\circ \longrightarrow 2^\circ \longrightarrow 3^\circ$ (∵ $F \in F''$ 且具 J -包围时, 不难作得 $G_K \in C''$ 且具 J -包围, $G_K \downarrow$, 使 $F = \bigcap_{K=1}^{\infty} G_K$)。 $3^\circ \longrightarrow 4^\circ$ 亦显然。而 $4^\circ \longrightarrow 1^\circ$, 由 J_1 对有限交封闭, 且 $B = \sigma(J_1)$, 及 $E = \bigcup_{K=1}^{\infty} E_K, E_K \in J_1$, 故可知真 ([3]引理1.1.)。故 1° 至 4°

等价。而 $5^\circ \longrightarrow 8^\circ$, 注意到若取 $L = \{ \text{全体有界实值函数} \}$, H 为使 $\int_E f d\mu = \int_E f d\nu$ (其中 $f \in B$) 的 f 全体, 則由定理1.2.1., 便可知真。但 $8^\circ \longrightarrow 7^\circ \longrightarrow 6^\circ \longrightarrow 5^\circ$ 是不足道的, 故又可得 5° 至 8° 之等价性。再注意到 $8^\circ \longrightarrow 1^\circ$ 是不足道的, 及 $1^\circ \longrightarrow 8^\circ$ 亦显然的 ([3]引理1.2.), 故至此得到了 1° 至 8° 全部等价。

最后, $1^\circ \longrightarrow 9^\circ$ 是显然的, 故仅需証 $9^\circ \longrightarrow 10^\circ$, 及 $10^\circ \longrightarrow 5^\circ$, 定理之証明便可全部完成。

証 $9^\circ \longrightarrow 10^\circ$ 設 $f \in \overset{\vee}{C}$, 則存在 $F \in J$, 使 $f(x) = 0$, 当 $x \in \bar{F}$, 在 $(0, +\infty)$ 上取一个可数稠集 T , 使 $t \in T$ 时, $\mu f^{-1}(\{t\}) = \nu f^{-1}(\{t\}) = 0$, 往証: 任意 $t', t'' \in T \longrightarrow \mu f^{-1}((t', t'')) = \nu f^{-1}((t', t''))$

① 若把等价命题 4° 除去, 則此假设可以不加。

② B 表: 全体 (E, C, B) 上之有界实值可测函数。

(此点若得证, 则 μf^{-1} 与 νf^{-1} 便成为 $(0, +\infty)$ 上关于Borel集恒等之测度)注意到

$$f^{-1}((t', t'')) \subset f^{-1}([t', t'']) \subset F' (\because f(x) = 0, \text{ 当 } x \in \bar{F})$$

及 $\mu(f^{-1}([t', t'']) \setminus f^{-1}((t', t''))) = \mu f^{-1}(\{t'\}) + \mu f^{-1}(\{t''\}) = 0$

$$\nu(f^{-1}([t', t'']) \setminus f^{-1}((t', t''))) = \nu f^{-1}(\{t'\}) + \nu f^{-1}(\{t''\}) = 0,$$

故 $f^{-1}((t', t''))$ 是 μ, ν 之公共连续集, 按9°之设, 有 $\mu f^{-1}((t', t'')) = \nu f^{-1}((t', t''))$ 真。

证10 $\longrightarrow$ 5° 设 $f \in \hat{C}^{\vee}$, 按10°之设, 有

$$\int_{(0,1)} y d\mu f^{-1}(y) = \int_{(0,1)} y d\nu f^{-1}(y), \text{ 即 } \int \{f > 0\} f d\mu = \int \{f > 0\} f d\nu, \text{ 故}$$

$$\int_E f d\mu = \int_E f d\nu.$$

3. 几种特殊情形

下面指出上面一般定理的几种重要特殊情形。

若在任意拓扑可测空间 (E, C, B) 中取 $J = \{E\}$, 则 J 之条件自然都被满足, 且易见此时有 $\hat{C}^{\vee} = \check{C}^{\vee} = C$, 故在第一段中之定理1.1.1., 定理1.1.4.及定理1.1.5., 便分别说明了任意拓扑可测空间上, 关于全体有界连续可测函数之积分之上、下半连续性之等价命题。①

若再要求 $B = \sigma(F'')$, 并取 $F'' = J_1$, 则易见

关于 J_1 之全部条件也自然地被满足, 故在第二段中之定理1.2.1.及1.2.2., 便成为了: 满足 $B = \sigma(F'')$ 之任意拓扑可测空间 (E, C, B) 上, $L' \longrightarrow$ 系含 C 便含全体 B —可测且 ϵL —函数之命题及关于函数类 C 之积分相等之等价命题。这二命题无疑地是[3]引理1.8及[2]定理1之推广。

若在任意拓扑可测空间中, 取 $J = \{\text{全体紧子集}\}$, 则定理1.1.1.便说明了, 任意拓扑可测空间上, 关于具紧支柱之有界连续可测函数类(即 $\hat{C}^{\vee}$), 及在无穷远点极限为零之有界连续可测函数类(即 $\hat{C}^{\vee}$)之积分下半连续性之等价命题。

若在任意拓扑可测空间中, 取 $J = \{\text{全体紧的且}\epsilon F''\text{的集}\}$, 并设空间为局部伪紧的(定义为: 任 $x \in E$, 均存在邻域 $\epsilon C''$, 使该邻域被某紧的 $\epsilon F''$ 之集所包含)②, 容易验证此时关于 J 之条件全部均被满足, 故此时第一段中之全部定理(定理1.1.1.至1.1.5)便分别说明了: 任意局部伪紧之拓扑可测空间上, 关于具紧 F'' 之支柱之有界连续可测函数类(及 $\hat{C}^{\vee}$ 类)之积分之上下半连续性之等价命题。易知, 若取 $J = \{\text{全体紧集}\}$, 空间满足: 凡 $x \in E$, 有 $x \in$ 某 $G \in C''$, G 具 J —包围

① 这些等价命题显然地包含了[2]定理2之等价命题(除1°外), 并且空间更为广泛。

② 这种空间是存在的, 例如 (E, C) 为通常的局部紧、完正规空间, 且 $B = \sigma(C)$, 则拓扑可测空间 (E, C, B) 便是一个局部伪紧空间。

(此時空間可稱為：局部擬緊)，則定理1.1.1.至1.1.3.仍真①

若再要求 $B = \sigma(J_1)$ ，(此處 J_1 表全體緊 F'' 集 J 仍取全體緊集)，并要求 $E = \bigcup_{K=1}^{\infty} E_K$ ， $E_K \in J$ ，容易驗證此時關於 J_1 之全部條件也被滿足，故此時第二段中

之定理1.2.1.及定理1.2.2.便成為了：滿足 $B = \sigma(J_1)$ ，及 $E = \bigcup_{K=1}^{\infty} E_K$ ， $E_K \in J_1$ (其

中 $J_1 = \{ \text{全體緊 } F'' \text{ 集} \}$)之局部擬緊拓撲可測空間 (E, C, B) ②上， L' 一系列含 $\check{C}^j$ 便含全體 B 一可測且 $\in L$ 之函數之命題及關於函數類 $\check{C}^j$ 與 $\hat{C}^j$ 之積分相等之等價命題。這二命題無疑地是[3]引理1.8.及[2]定理1在另一類空間中之加強。

§2. 強馬氏過程的等價定義

下面指出非齊次可斷強馬氏過程的一個等價定義，使[3]中強馬氏過程的定義得到簡化。

引理2.1. 設 (E, B) 為任一可測空間， X 為其上馬氏過程③， $\tau(w)$ 為 s —馬時 (簡稱與 s 過去及將來無關之隨機變量為 s —馬時，定義見[3]中之5.1.) 且 $\tau(w) \leq t$ ，

對任意 $A \in M_{\tau}^s$ (M_{τ}^s 定義見[3]中5.1.)，令 $\tau'(w) = \begin{cases} \tau(w), & \text{當 } w \in A \\ \max(\zeta(w), s), & \text{當 } w \in \bar{A}, \zeta \leq t \\ t, & \text{當 } w \in \bar{A}, \zeta > t \end{cases}$

則 $\tau'(w)$ 仍為 s —馬時

[証] 首先，易知 $s \leq \tau'(w) \leq \max(\zeta(w), s)$ ；其次，若 $u \geq t$ ，有 $\{\tau'(w) \leq u < \zeta(w)\} = \{A, \tau(w) \leq u < \zeta(w)\} \cup \{\bar{A}, t < \zeta(w), t \leq u < \zeta(w)\} = \{A, \tau(w) \leq u < \zeta(w)\} \cup \{A, \tau(w) \leq u < \zeta(w)\} \in M_u^s$ ，若 $s \leq u < t$ ，有 $\{\tau'(w) \leq u < \zeta(w)\} = \{A, \tau(w) \leq u < \zeta(w)\} \in M_u^s$ ，得証。

以下設： (E, B) 為任一可測空間， X 為取值其上之可測馬氏過程，且轉移函數 $P(s, x, t, \Gamma)$ 關於 s, x 二元可測④，我們有

定理2.1. 下列命題等價：

1° X 為強馬氏過程

- ① 這種空間是存在的，例如 (E, C) 為通常的局部緊、全正則空間，且 B 為使全體滿足 $0 \leq f \leq 1$ 之連續函數可測的最小 σ —代數。
- ② 這種空間是存在的，例如我們取 (E, C) 為通常的局部緊、 σ —緊、全正則空間，並令 $B = \sigma(F^*)$ ，則拓撲可測空間 (E, C, B) 便是一個這種空間的例子。
- ③ 馬氏過程定義見[3]第二章 §1.
- ④ 參閱[3]第五章 §2.5.3.

2° 对任意 $x \in E, s \geq 0, s$ —马时 $\tau(w)$, 及 M_τ^s —可测函数 $\eta(w)$ ($w \in \Omega_\tau$), $\eta \geq \tau$, 有凡 $\Gamma \in B$, $P_{s,x}(x_\eta \in \Gamma) = \int_{\Omega_\tau} P_{\tau, x_\tau}(x_\eta \in \Gamma) P_{s,x}(dw)$

3° 对任意 $x \in E, t > s \geq 0$, 及任意的满足 $t \geq \tau(w)$ 之 s —马时 $\tau(w)$, 有凡 $\Gamma \in B$,

$$P_{s,x}(x_t \in \Gamma) = \int_{\Omega_\tau} P_{\tau, x_\tau}(x_t \in \Gamma) P_{s,x}(dw)$$

[証] 显然 $1^\circ \longrightarrow 2^\circ \longrightarrow 3^\circ$. 往证 $3^\circ \longrightarrow 1^\circ$:

由[6], 仅需证: 对任意 $x \in E, t > s \geq 0$, 及任意的满足 $t \geq \tau(w)$ 之 s —马时 $\tau(w)$, 有凡 $\Gamma \in B, A \in M_\tau^s$, $P_{s,x}(x_t \in \Gamma, A) = \int_A P_{\tau, x_\tau}(x_t \in \Gamma) P_{s,x}(dw)$. 注意到, 若令

$$\tau'(w) = \begin{cases} \tau(w), & \text{当 } w \in A \\ \max(\zeta(w), s), & \text{当 } w \in \{\bar{A}, \zeta \leq t\}, \\ t, & \text{当 } w \in \{\bar{A}, \zeta > t\} \end{cases}$$

则 $\tau(w) \leq \tau'(w) \leq t$, 且按引理 2.1., $\tau'(w)$ 为 S —马时. 故若 3° 真, 则

$$P_{s,x}(x_t \in \Gamma) = \int_{\Omega_\tau} P_{\tau', x_{\tau'}}(x_t \in \Gamma) P_{s,x}(dw). \text{ 由于上式左边} = P_{s,x}(x_t \in \Gamma, A) +$$

$$P_{s,x}(x_t \in \Gamma, \bar{A}, t < \zeta), \text{ 而右边} = \int_A P_{\tau, x_\tau}(x_t \in \Gamma) P_{s,x}(dw) +$$

$$\int_{\{\bar{A}, \zeta > t\}} P_{t, x_t}(x_t \in \Gamma) P_{s,x}(dw) = \int_A P_{\tau, x_\tau}(x_t \in \Gamma) P_{s,x}(dw) +$$

$$\int_{\{\bar{A}, \tau \leq t < \zeta\}} P_{t, x_t}(x_t \in \Gamma) P_{s,x}(dw) (\because \text{在 } \{\bar{A}, \zeta \leq t\} \text{ 上 } \tau'(w) \geq \zeta(w), \text{ 有 } w \in \Omega_\tau), \text{ 但 } \{\bar{A}, \tau \leq t < \zeta\} \in M_t^s, \text{ 故由马氏性从上面左边等于右边可推得}$$

$$P_{s,x}(x_t \in \Gamma, A) = \int_A P_{\tau, x_\tau}(x_t \in \Gamma) P_{s,x}(dw) \text{ 凡 } \Gamma \in B, A \in M_\tau^s \text{ 真.}$$

[注] 1° 用类似证法不难将引理 2.1. 加强为如下形式:

引理 2.1' 设 (E, B) 为任一可测空间, X 为其上马氏过程, $\tau(w)$ 为 s —马时, $\eta(w)$ 为 M_τ^s —可测, 且 $\eta \geq \tau$, 对任意 $A \in M_\tau^s$. 令

$$\tau'(w) = \begin{cases} \tau(w), & \text{当 } w \in A \\ \max(\zeta(w), s), & \text{当 } w \in \{\bar{A}, \zeta \leq \eta\}, \\ \eta(w), & \text{当 } w \in \{\bar{A}, \zeta > \eta\} \end{cases}$$

则 $\tau'(w)$ 为 S —马时.

但是值得注意的是: 仿照上面 $3^\circ \longrightarrow 1^\circ$ 之证法来直接证明 $2^\circ \longrightarrow 1^\circ$ 看来却有困难, 原因是: 此时马氏性条件无法用上.

2° [8] 中直接用 2° 来定义强马氏过程 (见 [8] (2.8) 式), 但并没说明与一般定义是否等价. 并且, [8] 中之过程是不断的 (即 $\zeta(w) \equiv +\infty$). 这里所得之定理

說明：對一般的可斷馬氏過程，強馬氏過程之定義等价于簡化條件3°。

§3. 強馬氏過程的充分必要條件

下面將 § 1. 中關於 $\check{C}^J, \hat{C}^J$ 函數性質之研究，及 § 2. 中關於強馬氏過程的簡化定義，應用於討論

1. 擬隨機連續性、擬 Feller 性^①之等价命題

在這段中，恒設 (E, C, B) 為任意拓撲可測空間， J 為 E 之任意子集族，滿足下述條件：

$J. 1^\circ F \in J \longrightarrow$ 存在 $G \in C''$ ， G 具 J —包圍，使 $F \subset G$

$\check{C}^J, \hat{C}^J$ 等之意義同 § 1.1.。

又設 $p(s, x, t, \Gamma)$ 為 (E, C, B) 上之馬氏轉移函數^②，記 $T_{s,t}f(x) = \int_E f(y) P(s, x, t, dy)$ ，則可有

定理 3.1.1.③ 下列命題等价： $0 \leq s_n \leq t_n, x_0 \in E$

$1^\circ \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{s_n, t_n} f(x_0) = f(x_0)$ ，凡 $f \in \hat{C}^J$

$2^\circ \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{s_n, t_n} f(x_0) = f(x_0)$ ，凡 $f \in \check{C}^J$

$3^\circ \lim_{n \rightarrow +\infty} P(s_n, x_0, t_n, U_{x_0}) = 1$ ，凡 $U_{x_0} \supset \{x_0\}$ ， $U_{x_0} \in C''$ ，且具有 J —包圍

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(s_n, x_0, t_n, F) = 0$ ，凡 $F \supset \{x_0\}$ ， $F \in F''$ ，且具有 J —包圍

〔証〕 令 $Y = \{1, 2, \dots, n, \dots, +\infty\}$ ，以全体有限子集之余集及不含 $+\infty$ 點之子集為開集，又令 $n \in Y$ 對應 B 上之測度 $P(s_n, x_0, t_n, \Gamma)$ ，令 $+\infty \in Y$ 對應測度 $\chi_{\Gamma}(x_0)$ ，則由定理 1.1.3. 便可知真。

〔注〕 若稱 3° 為擬隨機連續性，則定理 3.1.1. 說明了擬隨機連續性之等价條件。

定理 3.1.2. 下列命題等价： $0 \leq s_0 \leq t, x_0 \in E$

$1^\circ f \in \hat{C}^J \longrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ s \downarrow s_0}} T_{s,t} f(x) = T_{s_0,t} f(x_0)$

① 在下面的定義中，讀者不難發現；擬隨機連續性的特殊情形便是通常的隨機連續性；擬 Feller 性之特殊情形便是通常的 Feller 性。

② 馬氏轉移函數定義見 [3] 第四章 § 1。

③ 定理 3.1.1. 顯然地包含了 [4] 之引理 7.2，並把它作為特例（只要取 $J = \{E\}$ ， $B = \sigma(F'')$ ，參閱本文 § 1.3.）。

$$2^\circ \quad f \in \check{C}^J \longrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ s \downarrow s_0}} T_{s,t} f(x) = T_{s_0,t} f(x_0)$$

$$3^\circ \quad G \in C'', G \text{ 具 } J\text{-包围} \longrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ s \downarrow s_0}} P(s, x, t, G) \geq P(s_0, x_0, t, G)$$

$$F \in F'', F \text{ 具 } J\text{-包围} \longrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ s \downarrow s_0}} P(s, x, t, F) \leq P(s_0, x_0, t, F)$$

$$4^\circ \quad \Gamma \in B, \text{ 且 } \Gamma \text{ 是 } P(s_0, x_0, t, \cdot) \text{ 之連續集 (定义見定理1.1.3.之 } 4^\circ) \longrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ s \downarrow s_0}} P(s, x, t, \Gamma) = P(s_0, x_0, t, \Gamma)$$

此定理由定理1.1.3.知真。

[注] 若称 2° 为拟非齐次Feller性, 則此定理說明了拟非齐次Feller性之等价条件。①

利用定理1.1.1.及1.1.2.不难将定理3.1.2.改写为上、下半連續性之等价条件, 茲从略。

在齐次时, 特別写出下面的有趣定理:

定理3.1.3.② 設馬氏轉移函数是齐次的(即: 可写为 $P(t, x, \Gamma)$), 記 $T_t f(x) = \int_E f(y) P(t, x, dy)$, 則有下列命题等价: $t \geq 0$,

$$1^\circ \quad T_t \check{C}^J \subset C$$

$$2^\circ \quad T_t \check{C}^J \subset C$$

$$3^\circ \quad G \in C'', G \text{ 具 } J\text{-包围} \longrightarrow \lim_{y \rightarrow x} P(t, y, G) \geq P(t, x, G)$$

$$F \in F'', F \text{ 具 } J\text{-包围} \longrightarrow \lim_{y \rightarrow x} P(t, y, F) \leq P(t, x, F)$$

(二式均是对一切 $x \in E$ 真)

$$4^\circ \quad \Gamma \text{ 为 } P(t, x, \cdot) \text{ 之連續集 } \lim_{y \rightarrow x} P(t, y, \Gamma) = P(t, x, \Gamma), \quad (\text{凡 } x \in E)$$

此定理也是由定理1.1.1.知真。

[注] 若称 $T_t \check{C}^J \subset C$ (凡 $t \geq 0$)为拟齐次Feller性, 則此定理說明了拟齐次Feller性之等价条件。

① 若取 $J = \{E\}$, $B = \sigma(F^*)$, 便得到了通常之Feller性之等价条件。

② 易知, 在特殊之空間里, 定理3.1.3.之 $2^\circ \rightarrow 3^\circ$ 可推出^[5]之引理5.4.例如, 可取 (E, C) 为通常的局部紧、全正则空間, $J = \{\text{全体紧集}\}$; 則此处之 $2^\circ 3^\circ$ 所得之結論便强于^[5]之引理5.4 (且空間較它弱得多) (參閱本文 § 1.3.)

2. 强馬氏过程的充分必要条件

以下恒設 (E, C, B) 为任意拓扑可測空間, J 为 E 的任意子集族, 滿足

$J_1.1^\circ$ $F \in J \longrightarrow$ 存在 $G \in C''$, G 具 J -包围, 使 $F \subset G$

$J_1.2^\circ$ $F_1, F_2 \in J \longrightarrow F_1 \cup F_2$ 具 J -包围

又設 J_1 为 E 之任意子集族, 滿足:

$J_1.1^\circ$ $J_1 \subset F''$

$J_1.2^\circ$ $F_1, F_2 \in J_1 \longrightarrow F_1 \cap F_2 \in J_1$

$J_1.3^\circ$ $F \in J_1 \longrightarrow F$ 存在 J -包围

設拓扑可測空間 (E, C, B) 滿足 $B = \sigma(J_1)$, 及 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in J_1$; 則有

定理 3.2.1. 設 $X = (x_t, \zeta, M_{t, s}^s, P_{s, x})$ 为取值于上述空間之可測馬氏过程, 且轉移函数 $P(s, x, t, \Gamma)$ 关于 s, x 为二元可測, 則 X 为强馬氏过程等价于下述之任一条件:

对任意 $x \in E, t > s \geq 0$, s -馬时 $\tau(\omega) \leq t$, 有

$$1^\circ \quad \Gamma \in B \longrightarrow P_{s, x}(x_t \in \Gamma) = \int_{\Omega_\tau} P_{\tau, x_\tau}(x_t \in \Gamma) P_{s, x}(d\omega)$$

$$2^\circ \quad G \in C'', G \text{ 具 } J\text{-包围} \longrightarrow P_{s, x}(x_t \in G) = \int_{\Omega_\tau} P_{\tau, x_\tau}(x_t \in G) P_{s, x}(d\omega)$$

$$3^\circ \quad F \in F'', F \text{ 具 } J\text{-包围} \longrightarrow P_{s, x}(x_t \in F) = \int_{\Omega_\tau} P_{\tau, x_\tau}(x_t \in F) P_{s, x}(d\omega)$$

$$4^\circ \quad F_1 \in J_1 \longrightarrow P_{s, x}(x_t \in F_1) = \int_{\Omega_\tau} P_{\tau, x_\tau}(x_t \in F_1) P_{s, x}(d\omega)$$

$$5^\circ \quad f \in C^J \longrightarrow \int_E f(y) P_{s, x}(x_t \in dy) = \int_E f(y) \psi(dy)$$

(其中 $\psi(\Gamma) = \int_{\Omega_\tau} P_{\tau, x_\tau}(x_t \in \Gamma) P_{s, x}(d\omega)$, 以下同此)

$$6^\circ \quad f \in \hat{C}^J \longrightarrow \int_E f(y) P_{s, x}(x_t \in dy) = \int_E f(y) \psi(dy)$$

$$7^\circ \quad f \in C \longrightarrow \int_E f(y) P_{s, x}(x_t \in dy) = \int_E f(y) \psi(dy)$$

$$8^\circ \quad f \in B \longrightarrow \int_E f(y) P_{s, x}(x_t \in dy) = \int_E f(y) \psi(dy) \textcircled{1}$$

$$9^\circ \quad \Gamma \text{ 是 } P_{s, x}(x_t \in \cdot) \text{ 及 } \psi(\cdot) \text{ 之公共連續集 (定义見定理 1.2.2. 之 } 9^\circ) \longrightarrow$$

$$P_{s, x}(x_t \in \Gamma) = \int_{\Omega_\tau} P_{\tau, x_\tau}(x_t \in \Gamma) P_{s, x}(d\omega)$$

① B 表 (E, C, B) 上全体有界可測实函数 (見 158 頁脚注)

10° $f \in C^V$, M 为 $(0, +\infty)$ 上之 Borel 集 $\longrightarrow$ 记 $\mu(M) = P_{s,x}(x_t \in f^{-1}(M))$,

$\nu(M) = \int_{\Omega_\tau} P_{\tau, x_\tau}(x_t \in f^{-1}(M)) P_{s,x}(d\omega)$ 时, 有 $\mu(M) = \nu(M)$

11° 存在至多只取可列个值之 $\tau'(\omega)$, $s \leq \tau'(\omega) \leq t$, $\tau'(\omega)$ 满足 $\{\tau' \leq u < \zeta\} \in M_u^s$ (对任意 $u \geq s$), 令 $\psi'(\Gamma) = \int_{\Omega_{\tau'}} P(\tau', x_{\tau'}, t, \Gamma) P_{s,x}(d\omega)$, 有

$$f \in C^V \longrightarrow \int_E f(y) \psi(dy) = \int_E f(y) \psi'(dy)$$

12° 存在一串至多只取可列个值之 $\tau_n(\omega)$,

$s \leq \tau_n \leq t$, τ_n 满足 $\{\tau_n \leq u < \zeta\} \in M_u^s$ (凡 $u \geq s$), 令

$$\psi_n(\Gamma) = \int_{\Omega_{\tau_n}} P(\tau_n, x_{\tau_n}, t, \Gamma) P_{s,x}(d\omega), \text{ 有}$$

$$f \in C^V \longrightarrow \int_E f(y) \psi(dy) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f(y) \psi_n(dy)$$

13° $G \in C''$, G 具 J -包围 $\longrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(G) \geq \psi(G)$

$F \in F''$, F 具 J -包围 $\longrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(F) \leq \psi(F)$

(此处 ψ_n 之定义及得出同 12°)

14° Γ 为 ψ 之连续集 $\longrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(\Gamma) = \psi(\Gamma)$

15° 令 $T_{s,t}f(x) = \int_E f(y) P(s, x, t, dy)$

$$T_{\tau(\omega), t}f(x_{\tau(\omega)}(\omega)) = \int_E f(y) P_{\tau(\omega), x_{\tau(\omega)}(\omega)}(x_t \in dy)$$

$$\text{有 } f \in \hat{C}^V \longrightarrow \int_{\Omega_\tau} T_{\tau(\omega), t}f(x_{\tau(\omega)}(\omega)) P_{s,x}(d\omega) = T_{s,t}f(x) \text{ (1)}$$

16° 前面说话同 11°, 有

$$f \in C^V \longrightarrow \int_{\Omega_\tau} T_{\tau(\omega), t}f(x_{\tau(\omega)}(\omega)) P_{s,x}(d\omega) = \int_{\Omega_{\tau'}} T_{\tau', t}f(x_{\tau'}) P_{s,x}(d\omega)$$

17° 前面说话同 12°, 有

$$f \in C^V \longrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{\tau_n}} T_{\tau_n, t}f(x_{\tau_n}) P_{s,x}(d\omega) = \int_{\Omega_\tau} T_{\tau, t}f(x_\tau) P_{s,x}(d\omega)$$

① 显然, 由 15° 可以立即推出 [3] 之定理 5.6.; 只需取 $J = \{E\}$, $B = \sigma(F^*)$. (此时, 在此处不需设过程为右连续, 并且关于空间之假设也较 [3] 为弱)

18° 凡上面之等价条件是对 $\check{C}^J$ 叙述者, 均可改为对 $\hat{C}^J$ 来叙述。

19° 上面的10°, 11°, 15°, 16°中, 还可将 $\check{C}^J$ 改为 C 或 B 来叙述。

〔証〕 由定理2.1.已知强馬氏性等价于1°。由定理1.2.2., 可知1°至10°相互等价。11°, 12°与5°等价由强馬氏性对 τ' 及 τ_n 恒真知([3])。12°至14°之相互等价性由定理1.1.3.知。15°至17°与5°, 11°, 12°之等价性由积分交換次序可知。最后, 18°, 19°之成立, 分别由定理1.1.3.及定理1.2.2.可知真。

〔注〕 13°, 14°, 17° 是有用之判別准則。

推論 下列条件之任一个均为 X 是强馬氏过程的充分条件: 对任意 $t \geq s_0 \geq 0$ (s_0 亦任意)

$$1^\circ \quad f \in \check{C}^J \longrightarrow \lim_{s \downarrow s_0} T_{s,t} f(x_s(\omega)) = T_{s_0,t} f(x_{s_0}(\omega))$$

$$2^\circ \quad G \in C'', G \text{ 具 } J\text{---包围} \longrightarrow \lim_{s \downarrow s_0} P(s, x_s(\omega), t, G) \geq P(s_0, x_{s_0}(\omega), t, G),$$

$$F \in F'', F \text{ 具 } J\text{---包围} \longrightarrow \lim_{s \downarrow s_0} P(s, x_s(\omega), t, F) \leq P(s_0, x_{s_0}(\omega), t, F)$$

3° 任 $\omega \in \Omega_{s_0}$ 有 凡 Γ 为 $P(s_0, x_{s_0}(\omega), t, \cdot)$ 之連續集,

$$\lim_{s \downarrow s_0} P(s, x_s(\omega), t, \Gamma) = P(s_0, x_{s_0}(\omega), t, \Gamma)$$

〔証〕 由积分交換次序及定理1.1.3., 可知1°至3°相互等价, 但1°显然是17°之充分条件。

在过程为右連續时, 显然定理3.1.2中之1°至4°中之任一个均为 X 是强馬氏过程的充分条件。①

最后的結果表明, 在这种相当广泛的拓扑可測空間上(滿足本段开始所述之条件), 右連續的拟 Feller 过程必为馬氏过程(拟 Feller 过程指滿足拟 Feller 条件的馬氏过程)。

在 X 为齐次的可測馬氏过程时, 注意到: X 是强馬氏过程 $\iff$ 对任 $x \in E, h \geq 0$, 馬时 $\tau(\omega)$, 有 凡 $\Gamma \in B$, $P_x(x_{\tau+h} \in \Gamma) = \int_{\Omega_\tau} P_{x_\tau}(x_h \in \Gamma) P_x(d\omega)$. (見[7]定理1, 但在[7]中仅就齐次不断过程証明了这一定理。对于齐次可断过程, 我們可以利用这里§2的类似方法加以証明。例如, 对任 $h \geq 0$, 令 $\tau'(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega), & \text{当 } \omega \in A \\ \zeta(\omega), & \text{当 } \omega \in \{\bar{A}, \zeta \leq h\} \cup \{\bar{A}, h > \tau\} \\ h, & \text{当 } \omega \in \{\bar{A}, \zeta > h \geq \tau\} \end{cases}$

① 若取 $J = \{E\}$, $B = \sigma(F'')$, 在这里我們便得到了: D_0 空間(称滿足 $B = \sigma(F'')$ 之 (E, C, B) 为 D_0 空間)上右連續之 Feller 过程必是强馬氏过程这一充分条件。包含了[3]之定理5.9.

不难证明 $\tau^{-1}(\omega)$ 为马氏时, 然后仿定理2.1之证法便可得证。)故不难利用定理1.2.2. 及积分换次序法, 仿照上面类似地得出 X 成强马氏过程之各种充要条件。但在利用定理1.1.3. 将充要条件写成极限形式时, 看来却要加设过程为右连续。同样地, 也可得出各种充分条件, 为节省篇幅计, 兹从略。

最后, 如同§1.3. 中那样, 考虑各种特殊空间时, 由上面的一般定理, 便可得出各种特殊空间上马氏过程成强马氏过程的有趣的充要条件及充分条件。兹从略。①

顺便指出, 利用此节结果, 不难把^[5]中之引理5.5., 引理5.6., 定理5.5., 引理5.7., 全部推广到局部紧、 σ —紧、完正规、Hausdorff 空间(其中 $B = \sigma(C)$)上。使关于特征算子之研究可在较^[5]更为广泛之空间中进行考虑(且其中有些定理不需把关于空间四个拓扑性质之假设全部用上)例如, 引理5.6. 及定理5.5. 可推广如下:

定理. (E, C, B) , 为任意拓扑可测空间, 其中 $B = \sigma(C)$,

1° 若 (E, C) 为局部紧、完正规, X 为其上右连续强马氏过程, U 为其特征算子, $\tilde{A}$ 为其弱无穷小算子, 若对点 x 存在邻域 U_x , 使 $M_x \tau(U_x) < +\infty$ ($\tau(U)$ 表首出集合 U 之内部之时间), 则 $f \in D_{\tilde{A}}$, 且 $\tilde{A}f$ 在点 x 连续 $\rightarrow f \in D_U(x)$, 且 $Uf(x) = \tilde{A}f(x)$

2° 若 (E, C) 为局部紧、完正规、Hausdorff、 σ —紧, 记 C' 为 C 之某子空间, 且 $C' \supset \hat{C}^J$ (此处取 $J = \{\text{全体紧集}\}$), 若 X 为其上之右连续 C' —过程 (即 $T_t C' \subset C'$), 记 A 为其 C' —无穷小算子, $\tilde{A}$ 为其 C' —弱无穷小算子, U 为其特征算子, 则 $A \subset \tilde{A} \subset U$

3° 在 2° 中之 C' 若等于 $\hat{C}^J$ (此处取 $J = \{\text{全体紧集}\}$ 且 X 为正规, 即 $p(s, x, s, E) = 1, s \geq 0$), 则 $Af = \tilde{A}f = Uf$, 当 $f \in D_U \cap \hat{C}^J$, 且 $Uf \in \hat{C}^J$ 。

证明从略。

本文得到梁之舜副教授之热情指导, 特此致谢。

① 例如: 可得出: 局部紧、 σ —紧、全正则空间 (要求 $B = \sigma(F^*)$) 上的右连续齐次弱 Feller 过程 (指满足 $T_t \hat{C} \subset \hat{C}$ 者) 必是强马氏过程。(参阅 §1.3.)

参 考 文 献

- (1) 郑曾同, 綫性泛函的积分表示及测度的弱收敛, 中山大学学报(自然科学), 1962年4期, pp 32—41
- (2) 郑曾同, 测度的弱收敛与强馬氏过程, 数学学报 11 卷 2 期 61 年 6 月 pp126—132
- (3) Е.Б.Дынкин, Основания теории Марковских процессов, 1959
(中譯本: 馬尔科夫过程的理論基础, 王梓桢譯, 科学出版社, 1962)
- (4) Е.Б.Дынкин, 馬氏过程与无穷小算子(讲义)第七章, 1957
- (5) Е.Б.Дынкин, Марковские процессы, 1963
- (6) А.А.Юшкевич, К определению строго Марковского процесса, Т.В.П.вып.2, 1960, pp237—243
- (7) Е.Б.Дынкин и А.А.Юшкевич, Строго Марковские процессы, Т.В.П.вып.1 (1956) pp 149—155.
- (8) А.А.Юшкевич, О строго Марковских процессах, Т.В.П.вып. 2 (1957) pp187—213