(λ, k)型双解析函数

林 偉 吳兹潛

（数学力学系）

摘 要

如果u, v, θ, ω是x, y的連續可微函数，并且适合于方程組

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}&=\theta \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial x}&=\omega \\ k\frac{\partial \theta}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \omega}{\partial y}&=0 \\ k\frac{\partial \theta}{\partial y}-\lambda\frac{\partial \omega}{\partial x}&=0。\end{aligned}\right\}$$

这儿λ, k是实常数，$\lambda\neq 0$，$0<k\leqslant 1$，則我們称$f(z)=u+iv$为(λ, k)型双解析函数，而解析函数$\varphi(z)=k\theta-i\lambda\omega$称为它的相联函数。

本文的主要目的在于研究(λ, k)型双解析函数的性质，拟把解析函数的Cauchy理論推广到这类函上去，先引入这类函数的积分和导数，然后証明Cauchy积分定理，Morera定理，Weierstrass定理，Cauchy积分公式及Taylor展开式，Laurent展开式等。

§1 引 言

如果u, v, θ, ω是x, y的連續可微函数，并且适合于方程組

1964年9月28日收到。

本文于1964.9在上海全国函数論会議宣讀过。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\theta,\\
&\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial x}=\omega,\\
&k\frac{\partial \theta}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \omega}{\partial y}=0,\\
&k\frac{\partial \theta}{\partial y}-\lambda\frac{\partial \omega}{\partial x}=0。
\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

这儿λ, k是实常数，$\lambda\neq0$，$0<k\leqslant1$，則我們称函数$f(z)=u+iv$为(λ,k)型双解析函数。显見$\varphi(z)=k\theta-i\lambda\omega$是解析函数，我們称它为$f(z)$的相联函数。

Sander.J.[1]曾考虑由方程組

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=\theta,\\
&\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\omega,\\
&\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{1}{k_1+1}\frac{\partial \omega}{\partial y}=0,\\
&\frac{\partial \theta}{\partial y}-\frac{1}{k_1+1}\frac{\partial \omega}{\partial x}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

（k_1为实数，$k_1\neq-1$）

及方程組

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=\theta,\\
&\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\omega,\\
&\frac{\partial \theta}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial y}=0,\\
&\frac{\partial \theta}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

所决定的解函数$f(z)=u+iv$的性質。如果命$\frac{1}{k_1+1}=\lambda$，則(1.2)正好是方程組(1.1)在$k=1$的情况。而当$k\neq1$时，方程組確有解函数不属于Sander的函数类。直接計算，易知函数

$$f(z)=u+iv=e^{\frac{k+1}{2k}z+\frac{k-1}{2k}\bar{z}}=$$

$$=e^{x+i\frac{y}{k}}=e^{x}\left(\cos\frac{y}{k}+i\sin\frac{y}{k}\right)\ (0<k<1)\tag{1.4}$$

满足(1.1)。但不满足(1.2)，事实上，命

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}&=\theta,\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=\omega。\end{aligned}\right\}$$

则

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\frac{k-1}{k}e^{x}\cos\frac{y}{k},\\ \omega&=\frac{k-1}{k}e^{x}\sin\frac{y}{k}。\end{aligned}\right\}$$

設(1.4)满足Sander的方程(1.2)，则存在 λ 使

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial x}-\lambda\frac{\partial\omega}{\partial y}&=0,\\ \frac{\partial\theta}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\omega}{\partial x}&=0。\end{aligned}\right\}$$

卽

$$\left.\begin{aligned}\frac{k-1}{k}\left[\left(1-\frac{\lambda}{k}\right)e^{x}\cos\frac{y}{k}\right]&=0,\\ \frac{k-1}{k}\left[\left(-\frac{1}{k}+\lambda\right)e^{x}\sin\frac{y}{k}\right]&=0。\end{aligned}\right\}$$

所以

$$1-\frac{\lambda}{k}=-\frac{1}{k}+\lambda=0,$$

卽

$$1-\left(\frac{1}{k}\right)^{2}=0。$$

得　$k=\pm1$，这是不可能的。

方程組(1.1)所确定的函数类比 Sander 的函数类要广，这事实是很自然的。因为方程組(1.1)相应于二阶椭园型方程組[2]

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{\lambda}{k^2}\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\begin{pmatrix}0&\frac{\lambda-k^2}{k}\\ \frac{\lambda-1}{k}&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0,\quad(1.5)$$

我們知道，当 $0<k<1$ 时，(1.5)的特征方程有两对不同复根，而当 $k=1$ 时，(1.5)的特征方程有一对复重根，这是两类性质很不相同的方程組[2]，而Sander的函数类仅对应予重特征的情况。

本文将考虑方程組(1.1)在 $0<k<1$ 时解函数的性质，拟把解析函数的Cauchy 理論推广到这函数类上去，先引入这类函数的积分和导数，然后証明 Cauchy 积分定理，Morera 定理、Weierstrass 定理，Cauchy 积分公式及 Taylor 展开式，Laurent展

开式等。

本文是在华罗庚教授指导下写成的，特此志謝。

§2 (λ,k)型双解析函数

由§1 我們称 $f(z)=u+iv$ 为(λ,k)型双解析函数，如果 u，v 是

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}&=\theta,\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial x}&=\omega,\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

的解，而 θ，ω 适合于

$$\left.\begin{aligned}k\frac{\partial\theta}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\omega}{\partial y}&=0,\\ k\frac{\partial\theta}{\partial y}-\lambda\frac{\partial\omega}{\partial x}&=0。\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

这儿 λ，k 是实常数，$\lambda\neq 0$，$0<k<1$。由(2.1)得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+ik\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)=k\theta+ik\omega$$

$$\left[\frac{1+k}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)+\frac{1-k}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]f(z)=\frac{1-\frac{k}{\lambda}}{2}(k\theta-i\lambda\omega)+$$

$$+\frac{1+\frac{k}{\lambda}}{2}(k\theta+i\lambda\omega)$$

我們引入符号

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

则得

$$\frac{k+1}{2}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}-\frac{k-1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\lambda-k}{4\lambda}\varphi(z)+\frac{\lambda+k}{4\lambda}\overline{\varphi(z)},\tag{2.3}$$

这是方程組(1.1)的复数形式，这里$\varphi(z)=k\theta-i\lambda\omega$是解析函数，我們称它为$f(z)$的相联函数。如果命 $\Phi(z)=\int_{z_0}^{z}\varphi(z)dz$，則

$$f(z)=\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\Phi(z)+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\Phi(z)}\tag{2.4}$$

是(2.3)的特解，易証(2.3)对应的齐次方程

$$\frac{k+1}{2}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}-\frac{k-1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}=0 \qquad (2.5)$$

的通解是

$$f(z)=\psi_1\left(\frac{k+1}{2}z+\frac{k-1}{2}\bar{z}\right)=\psi\left(\frac{k+1}{2k}z+\frac{k-1}{2k}\bar{z}\right), \qquad (2.6)$$

这几 $\psi(z_1)$ 是 z_1 的解析函数。由(2.4)及(2.6)可知(2.3)的一般解是

$$f(z)=\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\Phi(z)+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\Phi(z)}+\psi\left(\frac{k+1}{2k}z+\frac{k-1}{2k}\bar{z}\right) \qquad (2.7)$$

这是 (λ,k) 型双解析函数的一般表达式。$\psi(z_1)$ 可由 $f(z)$ 完全决定，事实上，如果命 $z_1=\frac{k+1}{2k}z+\frac{k-1}{2k}\bar{z}$，設 G_1 是区域 G 在 z_1 平面上的象，C_1 是 G 的边界 C 的象。則

$$\psi(z_1)=f\left(\frac{1+k}{2}z_1+\frac{1-k}{2}\bar{z}_1\right)-\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\Phi\left(\frac{1+k}{2}z_1+\frac{1-k}{2}\bar{z}_1\right)-$$
$$-\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\Phi\left(\frac{1+k}{2}z_1+\frac{1-k}{2}\bar{z}_1\right)}$$

它可表为 Cauchy 积分

$$\psi(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\left[f\left(\frac{1+k}{2}\zeta_1+\frac{1-k}{2}\bar{\zeta}_1\right)-\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\Phi\left(\frac{1+k}{2}\zeta_1+\frac{1-k}{2}\bar{\zeta}_1\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\Phi\left(\frac{1+k}{2}\zeta_1+\frac{1-k}{2}\bar{\zeta}_1\right)}\right]\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}.$$

所以

$$\psi\left(\frac{k+1}{2k}z+\frac{k-1}{2k}\bar{z}\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\left(\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}\right)-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\Phi(\zeta)+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\Phi(\zeta)}}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\left(\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}\right).$$

代入(2.7)得

$$f(z)=\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\left(\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}\right)-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\Phi(\zeta)+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\Phi(\zeta)}}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\left(\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}\right).$$

即得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\zeta)}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\left(\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\Phi(\zeta)\left[\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\left(\frac{k-1}{2k}\right)\overline{(\zeta-z)}}\right]$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\Phi(\zeta)}\left[\frac{\overline{d\zeta}}{\overline{\zeta-z}}+\frac{\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\right], \tag{2.8}$$

这公式在 $f(z)$ 及 $\Phi(z)$ 的单值区域成立，它用 $f(z)$ 及 $\Phi(z)$ 的边界値来表达了 $f(z)$ 在区域内部的值。在§4中我們将看到，(2.8) 实质上就是 (λ, k) 型双解析函数的 Cauchy 积分公式。

§3　(λ, k)型双解析函数的积分和导数 Cauchy 积分定理

命　$k\Theta - i\lambda\Omega = \Phi(z) = \int_{z_0}^{z}\varphi(z)dz = \int_{z_0}^{z}(k\theta - i\lambda\omega)\,dz.$

则

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\theta,\quad \frac{\partial\Omega}{\partial x}=\omega.$$

由(2.1)得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{v}{k}+\Omega\right),\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{k}-\Theta\right).\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

这可視作 Cauchy－Riemann 条件的推广。因此我們很自然地会考察积分

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}\left[udx+\left(-\frac{v}{k}+\Omega\right)dy\right]+i\int_{z_0}^{z}\left[vdx+\left(\frac{u}{k}-\Theta\right)dy\right]$$

$$=\int_{z_0}^{z}(u+iv)\left(dx+i\frac{dy}{k}\right)-i\int_{z_0}^{z}(\Theta+i\Omega)dy$$

$$= \int_{z_0}^{z} f(z)\left(\frac{k+1}{2k}dz + \frac{k-1}{2k}\overline{dz}\right) + \int_{z_0}^{z}\left[\frac{\lambda-k}{4\lambda}\Phi(z) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda+k}{4\lambda}\overline{\Phi(z)}\right]\frac{\overline{dz}-dz}{k}.$$

这里，綫积分的起点和終点是 z_0 和 z，而积分路經是区域 G 內某一可求长的曲綫 L。我們定义 $F(z)$ 作为双解析函数 $f(z)$ 的积分。

定义 1：如果 $f(z)$ 在 G 內是以 $\varphi(z)$ 为相联函数的 (λ,k) 型双解析函数，命 $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z}\varphi(z)dz = k\Theta - i\lambda\Omega$。設 L 为在 G 內連結点 z_0 与 z 的任一可求长曲綫，則我們称

$$\int_{z_0}^{z}\left[udx + \left(-\frac{v}{k}+\Omega\right)dy\right] + i\int_{z_0}^{z}\left[vdx + \left(\frac{u}{k}-\Theta\right)dy\right] =$$

$$= \int_{z_0}^{z} f(z)\left(\frac{k+1}{2k}dz + \frac{k-1}{2k}\overline{dz}\right) + \int_{z_0}^{z}\left[\frac{\lambda-k}{4\lambda}\Phi(z) + \frac{\lambda+k}{4\lambda}\overline{\Phi(z)}\right]\frac{\overline{dz}-dz}{k}$$

为 $f(z)$ 沿 L 的积分，表为 $\int_{z_0}^{z} f(z)\delta z$.

我們定义导数作为积分的逆运算。即

定义 2：如果 $f(z)$ 是以 $\varphi(z)$ 为相联函数的 (λ,k) 型双解析函数，我們称 $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$ 为 $f(z)$ 的导数，記为 $\frac{\delta f}{\delta z}$。

定理 1：如果 $f(z)$ 是以 $\varphi(z)$ 为相联函数的 (λ,k) 型双解析函数，則其导数 $\frac{\delta f}{\delta z}$ 也是 (λ,k) 型双解析函数，而且 $\frac{\delta f}{\delta z}$ 的相联函数就是 $\varphi'(z)$.

証. 由(2.3)得

$$\frac{k+1}{2}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{k-1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\lambda-k}{4\lambda}\varphi(z) + \frac{\lambda+k}{4\lambda}\overline{\varphi(z)}.$$

分别对 z 及 $\bar{z}$ 求导数得

$$\frac{k+1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}} - \frac{k-1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\lambda-k}{4\lambda}\varphi'(z), \tag{3.2}$$

$$\frac{k+1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} - \frac{k-1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}\partial z} = \frac{\lambda+k}{4\lambda}\overline{\varphi'(z)}。 \tag{3.3}$$

将上二式相加得

)

$$\frac{k+1}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)-\frac{k-1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)=\frac{\lambda-k}{4\lambda}\varphi'(z)+\frac{\lambda+k}{4\lambda}\overline{\varphi'(z)}。\qquad(3.4)$$

因此$\frac{\delta f}{\delta z}$滿足(2.3)，在§4我們將証明$(\lambda,k)$型双解析函数的各級导数存在，因此$\frac{\delta f}{\delta z}$連續可微，即$\frac{\delta f}{\delta z}$是$(\lambda,k)$双解析函数，其相联函数就是$\varphi'(z)$。

定理2，（Cauchy积分定理）。如果区域G的边界C是由有限条可求长的閉Jordan曲綫組成，函数$f(z)$在区域G內是以$\varphi(z)$为相联函数的(λ,k)型双解析函数，$\varphi(z)$，$\Phi(z)$，及$f(z)$在$\overline{G}=G+C$上单值連續，

則

$$\oint_c f(z)\delta z=0.$$

証.

$$\oint_c f(z)\delta z=\oint_c\left[udx+\left(-\frac{v}{k}+\Omega\right)dy\right]+i\oint_c\left[vdx+\left(\frac{u}{k}-\theta\right)dy\right].$$

由Green公式及(3.1)得

$$\oint_c f(z)\delta z=\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{v}{k}+\Omega\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\right]dxdy+i\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{k}-\theta\right)-\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy=0$$

即得所証。

定理3，如果$f(z)$在单連通区域G內是以$\varphi(z)$为相联函数的(λ,k)型双解析函数，則$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)\delta z$也为$(\lambda,k)$型双解析函数，其相联函数就是$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z}\varphi(z)dz$，且$\frac{\delta F}{\delta z}=f(z)$.

証. 由定理2，$F(z)$为单值函数，記$F(z)=U+iV$，

即

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}\left[udx+\left(-\frac{v}{k}+\Omega\right)dy\right]+i\int_{z_0}^{z}\left[vdx+\left(\frac{u}{k}-\theta\right)dy\right]=U+iV,\qquad(3.5)$$

則

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}&=u\\ \frac{\partial U}{\partial y}&=-\frac{v}{k}+\Omega,\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}&=v\\ \frac{\partial V}{\partial y}&=\frac{u}{k}-\theta,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}&=\theta,\\ \frac{\partial U}{\partial y}+\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial x}&=\Omega.\end{aligned}\right\}\qquad(3.6)$$

由于$k\Theta-i\lambda\Omega$解析，故有

$$\left.\begin{aligned} k\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial y}&=0\\ k\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial x}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(3.7)$$

由(3.6)，(3.7)可見$F(z)$是(λ,k)型双解析函数。由(3.5)

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial x}=u+iv=f(z)$$

明所欲証，

定理4.(Morera)，假設函数$f(z)$在区域G內单值連續，而$\varphi(z)=k\theta-i\lambda\omega$在$G$內解析，$\Phi(z)=k\Theta-i\lambda\Omega=\int_{z_0}^{z}\varphi(z)dz$，如果对任一可求长的閉曲綫$c$(其內域全落在$G$內)有

$$\oint_c f(z)\left[\frac{k+1}{2k}dz+\frac{k-1}{2k}\overline{dz}\right]+\oint_c\left[\frac{\lambda-k}{4\lambda}\Phi(z)+\frac{\lambda+k}{4\lambda}\overline{\Phi(z)}\right]\left(\frac{dz-\overline{dz}}{k}\right)\qquad(3.8)$$

$$=\oint_c\left[udx+\left(-\frac{v}{k}+\Omega\right)dy\right]+i\oint_c\left(vdx+\left(\frac{u}{k}-\Theta\right)dy\right)=0$$

則$f(z)$是(λ,k)型双解析函数，且其相联函数就是$\varphi(z)$，

証，命

$$F(z)=U+iV=\int_{z_0}^{z}\left[udx+\left(-\frac{v}{k}+\Omega\right)dy\right]+i\int_{z}^{z}\left[vdx+\left(\frac{u}{k}-\Theta\right)dy\right]$$

由(3.8)可见$F(z)$在G內是单值函数。且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=u,\\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial y}=-\dfrac{v}{k}+\Omega,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}=v\\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial y}=\dfrac{u}{k}-\Theta\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\dfrac{1}{k}\dfrac{\partial U}{\partial x}-\dfrac{\partial V}{\partial y}=\Theta\\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{1}{k}\dfrac{\partial V}{\partial x}=\Omega,\end{cases}$$

而

$$\begin{cases}k\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}=0\\[2mm] k\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}-\lambda\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}=0\end{cases}$$

故$F(z)=U+iV=\int_{z_0}^{z}f(z)\delta z$是$(\lambda,k)$型解析函数，其相联函数就是$\Phi(z)$。按定理1，$f(z)=\frac{\delta F}{\delta z}$也是$(\lambda,k)$型解析函数，其相联函数就是$\varphi(z)$。

定理 5 (Weierstrass)假如$f_n(z)=u_n+iv_n$在区域G内是(λ,k)型双解析函数，其相联函数为$\varphi_n(z)=k\theta_n-i\lambda\omega_n$，$f_n(z)$及$\varphi_n(z)$在$G$内的任一閉区域分别一致收斂于函数$f(z)$及$\varphi(z)$*)，則$f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z)$在$G$内是$(\lambda,k)$型双解析函数，其相联函数就是$\varphi(z)$。

証. 由解析函数的Weiertrass定理，$\varphi(z)=k\theta-i\lambda\omega=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)$在$G$内解析。命

$$k\Theta_n-i\lambda\Omega_n=\int_{z_0}^{z}(k\theta_n-i\lambda\omega_n)dz=\int_{z_0}^{z}\varphi_n(z)dz$$

$$\Phi(z)=k\Theta-i\lambda\Omega=\lim_{n\to\infty}(k\Theta_n-i\lambda\Omega_n)$$

則

$$\Phi(z)=\lim_{n\to\infty}\int_{z_0}^{z}(k\theta_n-i\lambda\omega_n)dz=\int_{z_0}^{z}(k\theta-i\lambda\omega)dz=\int_{z_0}^{z}\varphi(z)dz$$

設C为G内任一可求长的Jordan閉曲綫，其内域全落在G内，由于$f_n(z)=u_n+iu_n$是以$\varphi_n(z)$为相联函数的(λ,k)双解析函数，按Cauchy积分定理有

$$\oint_C f_n(z)\delta z=\oint_C\left[u_n dx+\left(-\frac{v_n}{k}+\Omega_n\right)dy\right]+i\oint_C v_n dx+\left(\frac{u_n}{k}-\Theta_n\right)dy=0$$

令$n\to\infty$，由一致收斂性立得

$$\oint_C\left[udx+(-\frac{v}{k}+\Omega)dy\right]+i\oint_C\left[vdx+(\frac{u}{k}-\Theta)dy\right]=0$$

按Morera定理，$f(z)=u+iv$是(λ,k)双解析函数，其相联函数就是$\varphi(z)$。

§4 (λ,k)型双解析函数的Cauchy公式及冪級数展开式

我們先来确定解析函数与(λ,k)型双解析函数的"乘积"，并定义冪函数。

定义 3：如果$f(z)$是以$\varphi(z)$为相联函数的(λ,k)型双解析函数，$\sigma(z)$为一解析函数，我們称以乘积$\sigma(z)\varphi(z)$为相联函数的(λ,k)型双解析函数为$f(z)$与$\sigma(z)$之乘积，并記为$\sigma\circ f$。如果命$k(z)=\sigma(z)\varphi(z)$，$K(z)=\int_{z_0}^{z}k(z)dz$，則

---

*) 关于$\varphi_n(z)$在G内任一閉区域一致收斂这一假定可由定理的其他条件推出来，这可参考林和曾同志的"(λ,k)双解析函数的特征性质"。(中山大学学报(自然科学)；1965，NO.1)

$$\sigma\circ f=\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}K(z)+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{K(z)}+\psi\left(\frac{k+1}{2k}z+\frac{k-1}{2k}\bar{z}\right)$$

定义 4．我們称

$$Z^{(n)}(z;\lambda,k)=\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\frac{1}{n+1}z^{n+1}+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\frac{1}{n+1}\overline{z^{n+1}},\ (n\neq-1)$$

$$Z^{(-1)}(z;\lambda,k)=\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\ln z+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\ln z}$$

为 n 次幂函数。

显然 $Z^{(n)}(z;\lambda,k)$ 是以 z^n 为相联函数的 (λ,k) 型双解析函数，而 $c_n\circ Z^{(n)}(z;\lambda,k)$ 是以 c_nz^n 为相联函数的 (λ,k) 型双解析函数。而且

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(c_n\circ Z^{(n)}(z;\lambda,h)\right)=\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}cnz^{n-1}+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{c_nz^{n-1}}=$$

$$=n\left(\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\frac{1}{n}c_nz^{n-1}+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\frac{1}{n}\overline{c_nz^{n-1}}\right)=$$

$$=nC_n\circ Z^{(n-1)}(z,\lambda,k)\qquad(n\neq o)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(C_0\circ Z^{(0)}(z;\lambda,k)\right)=\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}C_0+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{C}_0\ 。$$

现在我們先来建立 (λ,k) 型双解析函数的 Cauchy 积分公式。正如解析函数的做法一样，我們从 Cauchy 积分定理出发。

按定义，函数

$$-Z^{(-2)}(\zeta-z;\lambda,k)=\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\frac{1}{\overline{\zeta-z}}\ 。\qquad(4.1)$$

在 $\zeta\neq z$ 时以 $\frac{1}{\zeta-z}$ 为相联函数，設 $f(z)$ 在区域 G 内是以 $\varphi(z)$ 为相联函数的双解析函数。即

$$f(\zeta)=\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\Phi(\zeta)+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\Phi(\zeta)}+\psi\left(\frac{k+1}{2k}\zeta+\frac{k-1}{2h}\bar{\zeta}\right),\qquad(4.2)$$

这里 $\Phi(\zeta)=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\varphi(\zeta)d\zeta$ 則函数

$$\left(\frac{-i}{\zeta-z}\right)\circ f(\zeta)+(-i\Phi(\zeta)\circ\left(-Z^{(-2)}(\zeta-z;\lambda,k)\right)\qquad(4.3)$$

是以函数

$$\frac{-i\varphi(\zeta)}{\zeta-z}+\left(-i\Phi(\zeta)\right)\left(\frac{-1}{(\zeta-z)^2}\right)=\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{-i\Phi(\zeta)}{\zeta-z}\right)\qquad(4.4)$$

为相联函数的(λ,k)型双解析函数。

假設区域G的边界C是由有限条可求长的Jordan閉曲綫組成，z为G內任一点，以z为中心以r为半径作一小园ν：$|\zeta-z|=r$，使$|\zeta-z|\leqslant r$全落在区域G內。記区域G除去这小园后剩下的区域为G_r，其边界为$C+\nu^-$，如果$f(\zeta)$在$\overline{G}$上单值連續，則函数(4.3)在G_r內是(λ,k)型双解析函数，在$\overline{G}_r$上連續，按定理2（Cauchy积分定理）有

$$\oint_{C+\nu^-}\left[\frac{-i}{\zeta-z}\circ f(\zeta)+\Big(-i\Phi(\zeta)\Big)\circ\left(-Z^{(-2)}(\zeta-z;\lambda,k)\right)\right]\delta z=0, \qquad (4.5)$$

即

$$\oint_C\left[\frac{-i}{\zeta-z}\circ f(\zeta)+(-i\Phi(\zeta))\circ(-Z^{(-2)}(\zeta-z;\lambda,k))\right]\delta z=$$

$$=\oint_\nu\left[\frac{-i}{\zeta-z}\circ f(\zeta)+(-i\Phi(\zeta))\circ(-Z^{(-2)}(\zeta-z;\lambda,k))\right]\delta z\text{。} \qquad (4.5)'$$

但

$$\frac{-i}{\zeta-z}\circ f(\zeta)+(-i\Phi(\zeta))\circ(-Z^{(-2)}(\zeta-z;\lambda,k)=$$

$$=\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\left(\frac{-i\Phi(\zeta)}{\zeta-z}\right)+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\left(\overline{\frac{-i\Phi(\zeta)}{\zeta-z}}\right)+\psi_1\left(\frac{k+1}{2k}\zeta+\frac{k-1}{2k}\zeta\right)$$

$$=-i\left\{\frac{f(\zeta)}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}+\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\Phi(\zeta)\right.$$

$$\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\right)-$$

$$-\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\Phi(\zeta)}\left(\overline{\frac{1}{\zeta-z}}+\frac{1}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\right)+$$

$$\left.+i\psi_2\left(\frac{k+1}{2k}\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{\zeta}\right)\right\}$$

所以

$$\oint_\nu\left[\frac{-i}{\zeta-z}\circ f(\zeta)+(-i\Phi(\zeta))\circ(-Z^{(-2)}(\zeta-z;\lambda,k))\right]\delta z$$

$$=-i\oint_\nu\frac{f(\zeta)}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\left(\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}\right)-$$

$$-i\oint_\nu \frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\ \Phi(\zeta)\left[\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\right)\right.$$

$$\left.\left(\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}\right)+\frac{1}{\zeta-z}\left(\frac{1-k}{2k}\right)(\overline{d\zeta}-d\zeta)\right]$$

$$+i\oint_\nu \frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{\Phi(\zeta)}\left[\left(\frac{1}{\overline{(\zeta-z)}}+\frac{1}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\right)\right.$$

$$\left.\left(\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}\right)+\frac{1}{\overline{(\zeta-z)}}\frac{1+k}{2k}(\overline{d\zeta}-d\zeta)\right],$$

故得

$$\oint_\nu\left[\frac{-i}{\zeta-z}\circ f(\zeta)+(-i\Phi(\zeta))\circ(-Z^{(-2)}(\zeta-z;\lambda,k)\right]\delta z \tag{4.6}$$

$$=-i\oint_\nu \frac{f(\zeta)}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\left(\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}\right)$$

$$-i\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\oint_\nu \Phi(\zeta)\left[\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\right]$$

$$+i\left(\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\right)\oint_\nu \overline{\Phi}(\zeta)\left[\frac{\overline{d\zeta}}{\overline{(\zeta-z)}}+\frac{\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\right]$$

另一方面我們有

$$\oint_\nu \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i\Phi(z),\quad \oint_\nu \frac{\overline{\Phi(\zeta)}}{\overline{(\zeta-z)}}\overline{d\zeta}=-2\pi i\overline{\Phi(z)}, \tag{4.7}$$

$$\lim_{r\to 0}\oint_\nu f(\zeta)\frac{\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}=$$

$$=\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})\frac{\frac{k+1}{2k}ire^{i\theta}-\frac{k-1}{2k}ire^{-i\theta}}{\frac{k+1}{2k}re^{i\theta}+\frac{k-1}{2k}re^{-i\theta}}d\theta$$

$$=\lim_{r\to 0} i\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})\frac{e^{i2\theta}-\frac{k-1}{k+1}}{e^{i2\theta}+\frac{k-1}{k+1}}d\theta$$

$$= 2\pi i f(z)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}-\frac{k-1}{k+1}}{e^{i\varphi}+\frac{k-1}{k+1}}d\varphi\right] = 2\pi i f(z). \quad (4.8)$$

同理

$$\lim_{r\to 0}\oint_\gamma \Phi(\zeta)\frac{\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}} = 2\pi i\Phi(z), \quad (4.9)$$

$$\lim_{r\to 0}\oint_\gamma \overline{\Phi(\zeta)}\frac{\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}} = 2\pi i\,\overline{\Phi(z)}. \quad (4.10)$$

将(4.7)(4.8)(4.9)(4.10)代入(4.6)得

$$\lim_{r\to 0}\oint_\gamma\left[\frac{-i}{\zeta-z}\circ f(\zeta)+(-i\Phi(\zeta))\circ(-Z^{(-2)}(\zeta-z;\lambda,k))\right]\delta z = 2\pi f(z).$$

由(4.5)′得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_C\left[\frac{-i}{\zeta-z}\circ f(\zeta)+(-i\Phi(\zeta))\circ(-Z^{(-2)}(\zeta-z;\lambda,k))\right]\delta z.$$

綜合上述，我們得

定理6：(Cauchy 积分公式)假設区域 G 的边界 C 是由有限条可求长的 Jordan 閉曲綫組成，函数 $f(z)$ 在 G 內是以 $\varphi(z)$ 为相联函数的 (λ,k) 型双解析函数，$f(z)$，$\varphi(z)$ 及 $\Phi(z)$ 在 $\overline{G}=G+C$ 上单值連續，則对于 G 內任一点 z 我們有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_C\left[\frac{-i}{\zeta-z}\circ f(\zeta)+(-i\Phi(\zeta))\circ(-Z^{(-2)}(\zeta-z;\lambda,k))\right]\delta z. \quad (4.11)$$

仿照(4.6)的推导，我們可把(4.11)写成

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\left(\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}\right)+$$

$$+\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}\frac{1}{2\pi i}\oint_C\Phi(\zeta)\left[\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\right]-$$

$$-\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\frac{1}{2\pi i}\oint_C\overline{\Phi(\zeta)}\left[\frac{\overline{d\zeta}}{\overline{(\zeta-z)}}+\frac{\frac{k+1}{2k}d\zeta+\frac{k-1}{2k}\overline{d\zeta}}{\frac{k+1}{2k}(\zeta-z)+\frac{k-1}{2k}\overline{(\zeta-z)}}\right]$$

这正是(2.8)的結果。

作为 Cauchy 积分公式的直接推論，我們可証明 (λ,k) 型双解析函数的各級导数存在，其証法正如解析函数的做法一样。我們还可加强 Weierstrass 定理，得

定理7：(Weierstrass) 假設无穷級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的通項 $f_n(z)$ 在 G 內是 (λ,k) 型双解析函数，其相联函数为 $\varphi_n(z)=k\theta_n-i\lambda\omega_n$，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)$ 在 G 內的任一閉区域分别一致收斂于 $f(z)$ 与 $\varphi(z)=k\theta-i\lambda\omega$，則：1) $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 G 內是 (λ,k) 型双解析函数，其相联函数就是 $\varphi(z)$；2) $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\partial f_n}{\partial z}$，其相联函数 $\dfrac{d\varphi}{dz}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{d\varphi_n}{dz}$，而且这导数級数在 G 內的任一閉区域也是一致收斂的。

这定理的証法正如解析函数的 Weierstrass 定理一样。

定理8：(Taylor展开定理) 如果 $f(z)$ 是在园 $|z-z_0|<R$ 內的 (λ,k) 型双解析函数，其相联函数 $\varphi(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 內可展为

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

則在园 $|z-z_0|<R$ 內 $f(z)$ 可展成一个絕对且局部一致收斂的形式冪級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\circ Z^{(n)}(z-z_0;\lambda,k)+\sum_{n=0}^{\infty}d_n\left[\frac{k+1}{2k}(z-z_0)+\frac{k-1}{2k}\overline{(z-z_0)}\right]^n$$

这儿
$$C_n=\frac{1}{n!}\varphi_n^{(n)}(z_0),\quad d_n=\frac{1}{n!}\frac{\partial^{(n)}f(z_0)}{\partial z^n}-\frac{1}{n}\frac{1}{2\lambda}\cdot\left[\frac{\lambda-k}{1-k}C_{n-1}+\frac{\lambda+k}{1+k}\overline{C}_{n-1}\right]。$$

証：作 $S_n(z-z_0;\lambda,k)=\sum\limits_{j=0}^{n}C_j\circ Z^{(j)}(z-z_0;\lambda,k)$，易見 $S_n(z-z_0;\lambda,k)$ 是以 $s_n(z)=\sum\limits_{j=0}^{n}C_j(z-z_0)^j$ 为相联函数的 (λ,k) 型双解析函数。

$$\left|C_n\circ Z^{(n)}(z-z_0;\lambda,k)\right|\leqslant\frac{|\lambda-k|}{|2(1-k)\lambda|}\left|\frac{C_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}\right|+\frac{|\lambda+k|}{|2(1+k)\lambda|}\cdot\left|\frac{\overline{C}_n}{n+1}\overline{(z-z_0)}^{n+1}\right|\leqslant\left[\frac{|\lambda-k|}{1-k}+\frac{|\lambda+k|}{1+k}\right]\frac{|C_n|}{2(n+1)|\lambda|}\left|z-z_0\right|^{n+1}$$

因为 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ 在 $|z-z_0|<R$ 內收斂，故 $S_n(z-z_0;\lambda,k)$ 在 $|z-z_0|\leqslant$

$\leqslant R_0 < R$ 上一致絕对收斂，命

$$f_1(z)=\lim_{n\to\infty}S_n(z-z_0;\lambda,k)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n{}^{\circ}Z^{(n)}(z-z_0;\lambda,k)$$

按Weierstrass定理，$f(z)$是以$\varphi(z)$为相联函数的(λ,k)型双解析函数，故

$$\frac{1-k}{2}\ \frac{\partial(f-f_1)}{\partial z}+\frac{1+k}{2}\ \frac{\partial(f-f_1)}{\partial\bar z}=0。$$

所以

$$f-f_1=\psi\left(\frac{k+1}{2k}z+\frac{k-1}{2k}\bar z\right)$$

$\psi(z_1)$ 是 z_1 的解析函数，命$\psi(z_1)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(z_1-z_0)^n$，则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n{}^{\circ}Z^{(n)}(z-z_0;\lambda,k)+\sum_{n=0}^{\infty}d_n\left[\frac{k+1}{2k}(z-z_0)+\frac{k-1}{2k}\overline{(z-z_0)}\right]^n,$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{k+1}{2k}(z-z_0)+\frac{k-1}{2k}\overline{(z-z_0)}\right]^n=\frac{n(k+1)}{2k}\left[\frac{k+1}{2k}(z-z_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{k-1}{2k}\overline{(z-z_0)}\right]^{n-1},$$
$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\left[\frac{k+1}{2k}(z-z_0)+\frac{k-1}{2k}\overline{(z-z_0)}\right]^n=\frac{n(k-1)}{2k}\left[\frac{k+1}{2k}(z-z_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{k-1}{2k}\overline{(z-z_0)}\right]^{n-1},$$

所以

$$\frac{\delta}{\delta z}\left[\frac{k+1}{2k}(z-z_0)+\frac{k-1}{2k}\overline{(z-z_0)}\right]^n=n\left[\frac{k+1}{2k}(z-z_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{k-1}{2k}\overline{(z-z_0)}\right]^{n-1},$$
$$\frac{\delta^{(n)}f(z)}{\delta z^n}=(n-1)!\ \frac{\delta}{\delta z}\left[C_{n-1}{}^{\circ}Z^{(0)}(z-z_0;\lambda,k)\right]+$$
$$+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)}C_k{}^{\circ}Z^{(k-n)}(z-z_0;\lambda,k)+$$
$$+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)}d_k\left[\frac{k+1}{2k}(z-z_0)+\frac{k-1}{2k}\overline{(z-z_0)}\right]^{k-n}。$$

命 $z=z_0$，則得

$$\frac{\partial^{(n)} f(z_0)}{\partial z^n}=(n-1)!\left[\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}C_{n-1}+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{C_{n-1}}\right]+n!d_n,$$

$$d_n=\frac{1}{n!}\frac{\partial^{(n)} f(z_0)}{\partial z^n}-\frac{1}{n}\left[\frac{\lambda-k}{2(1-k)\lambda}C_{n-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda+k}{2(1+k)\lambda}\overline{C_{n-1}}\right].$$

明所欲証。

类似地我們可以証明

定理9.（Laurent 展开定理）如果在园环 $r<|z-z|<R$ 內 $f(z)$ 是 (λ,k) 型双解析函数，其相联函数 $\varphi(z)$ 在这园环內有如下的Laurent展开式

$$\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

則在园环 $r<|z-z_0|<R$ 內 $f(z)$ 可展成一个絕对且局部一致收斂的形式幂級数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\circ Z^{(n)}(z-z_0;\lambda,k)+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}d_n\left[\frac{k+1}{2k}(z-z_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{k-1}{2k}\overline{(z-z_0)}\right]^n$$

d_n 可由 C_n 与 $f(z)$ 完全确定。

附記：定义Sander函数类的方程組(1.2)，(1.3)可写为如下的复数形式:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{\lambda-1}{4\lambda}\varphi(z)+\frac{\lambda+1}{4\lambda}\overline{\varphi(z)},\qquad(1.2)'$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{4}(\psi(z)+\overline{\psi(z)}),\qquad(1.3)'$$

这儿 $\varphi(z)=\theta-i\lambda\omega$，$\psi(z)=\theta+i\omega$，陈杰先生[3]曾推广了(1.2)′及(1.3)′，考慮由方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=a\varphi(z)+b\overline{\varphi(z)}\qquad(*)$$

所决定的解函数的性质，这儿 a,b 是常数，$\varphi(z)$ 是解析函数。但陈杰先生实質上沒有推广 Sander 的工作，我們証明方程(*)經过函数的綫性变换后可化为(1.2)′或(1.3)′，事实上，設 $a=\alpha e^{i\theta}$，$b=\beta e^{i\psi}$，这儿 $\alpha\geqslant0$，$\beta\geqslant0$，$\alpha+\beta>0$，則(1.4)可写为

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\alpha e^{i\theta}\varphi(z)+\beta e^{i\psi}\overline{\varphi(z)}=$$

$$= e^{i\frac{\theta+\psi}{2}}\left[\alpha e^{i\frac{\theta-\psi}{2}}\varphi(z)+\beta e^{-i\frac{\theta-\psi}{2}}\overline{\varphi(z)}\right]$$

命 $f_1(z)=e^{-i\frac{\theta+\psi}{2}}f(z)$ ， $\varphi_1(z)=e^{i\frac{\theta-\psi}{2}}\psi(z)$ ，则得

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar z}=\alpha\varphi_1(z)+\beta\,\overline{\varphi_1(z)} \qquad (*\ *)$$

如果 $\alpha=\beta$ ，则(* *)可写为

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{4}(4\alpha\varphi_1(z))+\frac{1}{4}\overline{(4\alpha\varphi_1(z))}$$

这是属于(1.3)′的情况。如果 $\alpha\neq\beta$ ，则(* *)可写为

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar z}=\frac{\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}-1}{4\left(\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\right)}(2(\beta+\alpha)\varphi_1(z))+\frac{\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}+1}{4\left(\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\right)}(\overline{2(\beta+\alpha)\varphi_1(z)})$$

这是属于(1.2)′的情况，此时 $\lambda=\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}$ 。

参 考 文 献

〔1〕 Sander,J., Viscous fluids elasticity and function theory, I, Trans. of Amer. Math. Soc., 98(1961),85—147.

〔2〕 华罗庚　吳兹潛　林　伟，二阶两个自变数两个未知函数的常系数綫性偏微分方程組的标准型。科学通报，1964,No.12.P.1100—1103.

〔3〕 陈　杰，关于方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=h$ 的解析函数族，內蒙古大学学报(1962.2)，P.1—10.〔或高等学校自然科学学报，数学、力学、天文学版，(1964.No.3)P.229—240.〕

On the Bi-analytic Functions of Type (λ ,k)

Lin Wei　　Woo Tzy-Chine

Abstract

The function f(z) = u + iv is called the Bi-analytic function of z of

type (λ,k), if u, v for some fixed λ, k satisfy the system of differential equations:

$$\begin{cases} \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \theta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial x} = \omega \\ k\frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \\ k\frac{\partial \theta}{\partial y} - \lambda\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

here λ, k are any real numbers such that $\lambda \neq 0$, $0 < k \leqslant 1$. In this paper we are going to consider the properties of the Bi—analytic function with $\lambda \neq 0$, $0 < k < 1$. We shall show that the elementary properties of analytic functions can be extended to Bi—analytic functions.