

关于馬尔科夫鏈的若干概率 性質与遍历定理*

戴 永 隆

(数学力学系)

提 要

- §1 对常返类¹⁾ 求出方程組 $u_i = \sum_{j \in C} u_j P_{ji}$ 之解的一种新的表达形式, 它可作为(1) §7定理1, §9定理7的补充
- §2 求出馬氏鏈的某些概率性質, 特別得出 f_{ik}^* , e_{ik} 的一个极限表达式, 解决了 ${}^K P_{ij}^{(n)}$, ${}^{(K)} P_{ij}^{(n)}$ (定义見 §2) 当 $n \rightarrow \infty$ 的极限問題等。
- §3 对(1) §15 的遍历定理給出一个新的表达式, 利用这一表达式求出了几个新的极限, 例如出現这样的 i 的个数, 两次出現 i 之間夾有 k 的出現, 这样的 i 的出現頻率在正常返类的情况下完全解决。本节与 §1 的結果互相印証。
- §4 对馬氏鏈軌道的“走向”問題得出几点結論。

§ 1

設 $\{x_n, n \geq 0\}$ 是一具有离散参数的馬氏鏈, 状态空間为 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ $\{P_{ij}, i, j \in I\}$ 为其轉移概率, 当 ${}_K P_{ij}^* < \infty$, ${}_i P_{Kj}^* < \infty$ 时, 引入如下記号

$${}_K \pi_{ij} = {}_K P_{ij}^* + {}_i P_{Kj}^*$$

由(1) §9定理3 可以看出, 对基本类 C ${}_K \pi_{ij} < \infty$ 对一切 $i, j, k \in C$ 成立

定 理 1 如果 C 是常返类, 則方程系

$$u_i = \sum_{j \in C} u_j P_{ji} \quad i \in C \quad (1)$$

的非負解由 $u_j = a {}_K \pi_{ij}$ 給出, 此处 $k, i \in C$ 为任意, 但 $k \neq i$, $a \geq 0$ 为任意常数。

* 作者衷心地感謝梁之冀导师的热心指导及林向清老师对本文一个錯誤的指正。

1) 本文沒有定义的名称与記号見(1) Part I

証明 令 $\alpha=1$ 則因

$${}_K\pi_{ij} = {}_K P_{ij}^* + {}_i P_{Kj}^* = \sum_{n=1}^{\infty} ({}_K P_{ij}^{(n)} + {}_i P_{Kj}^{(n)})$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{j \in C} {}_K\pi_{ij} P_{ji} &= \sum_{j \in C} \sum_{n=1}^{\infty} ({}_K P_{ij}^{(n)} + {}_i P_{Kj}^{(n)}) P_{ji} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in C} {}_K P_{ij}^{(n)} P_{ji} + \sum_{j \in C} {}_i P_{Kj}^{(n)} P_{ji} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ({}_K P_{ii}^{(n+1)} + {}_K P_{iK}^{(n)} P_{Ki}) + \sum_{n=1}^{\infty} ({}_i P_{Ki}^{(n+1)} + {}_i P_{Ki}^{(n)} P_{ii}) \end{aligned}$$

$$\left(\text{此处用到 } \sum_{j \neq k} {}_K P_{ij}^{(n)} P_{ji} = {}_K P_{ii}^{(n+1)}, \sum_{j \neq i} {}_i P_{Kj}^{(n)} P_{ji} = {}_i P_{Ki}^{(n+1)} \right)$$

$$\text{上式} = ({}_K P_{ii}^* - P_{ii} + {}_K P_{iK}^* P_{Ki}) + ({}_i P_{Ki}^* - P_{Ki} + {}_i P_{Ki}^* P_{ii})$$

$$= {}_K P_{ii}^* + {}_i P_{Ki}^* = {}_K\pi_{ii}$$

$$(\text{用到 } {}_K P_{iK}^* = f_{iK}^* = {}_i P_{Ki}^* = f_{Ki}^* = 1)$$

故方程系(1)之解由 $u_j = {}_K\pi_{ij}$ 給出。

推論 1 若 C 是正常返, 則当 $k \neq i$

$$\frac{{}_K\pi_{ij}}{{}_K\pi_{ih}} = \frac{e_{ij}}{e_{ih}} = \frac{\pi_j}{\pi_h} \quad (2)$$

証明 由(1) § 9 定理 7, 方程系(1)只有唯一非負解 $u_j = ce_{ij}$ ($c \geq 0$)
故 ${}_K\pi_{ij} = ce_{ij}$, 此处 c 为正常数, 从而(2)中第一个等号成立, 又因对正常返类 $e_{ij} = \pi_j / \pi_i$, $\therefore$ (2)得以完全証明。

从推論中直接看出, 比 ${}_K\pi_{ij} : {}_K\pi_{ih}$ 与 $k, i \in C$ 无关, 只要 $k \neq i$ 。

对常返类說来, (2)的第一个等式仍成立, 这个結果在 § 3 中还要証明。

§ 2

給了馬氏鏈 $\{x_n, n \geq 0\}$, 令

$${}_K P_{ij}^{(n)} = P \{x_n = j; \text{ 存在 } v, 0 < v \leq n \mid x_0 = k\} \quad (3)$$

称为由 i 出发, 过 k , n 步到 j 之概率。

$$({}_K) P_{ij}^{(n)} = P \{x_n = j; \text{ 存在 } v, 0 < v \leq n \mid x_0 = k, x_s = j, 0 < s < v \mid x_0 = i\} \quad (4)$$

称为由 i 出发, 先过 k , n 步到 j 之概率。

由定义易知, 当 $n = 1$ 时

$${}_K P_{ij}^{(1)} = {}^{(K)} P_{ij}^{(1)} = P_{ij} \quad \text{如 } k = j$$

$${}_K P_{ij}^{(1)} = {}^{(K)} P_{ij}^{(1)} = 0 \quad \text{如 } k \neq j$$

注意 ${}_K P_{ij}^{(n)}$ 与 ${}^{(K)} P_{ij}^{(n)}$ 的区别, 例如直线上以概率为 $\frac{1}{2}$ 向左向右作自由随机游动有

$${}_2 P_{01}^{(3)} = \frac{1}{8} \quad \text{而} \quad {}^{(2)} P_{01}^{(n)} = 0 \quad \text{对一切 } n \geq 1$$

显然 I 的子集 C 形成一类 (class), 当且仅当, 对任意 $i, j, k \in C$, 存在 $n \geq 1$ 使 ${}_K P_{ij}^{(n)} > 0$ 。

用‘首次进入法’可以证明: ((1) 中称为 the first entrance formulas)

$${}_K P_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^n {}_K P_{iK}^{(v)} P_{Kj}^{(n-v)} \quad (5)$$

$${}^{(K)} P_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^n {}_K P_{iK}^{(v)} P_{Kj}^{(n-v)} \quad (6)$$

用最后进入法可以证明: (the last entrance formula)

$${}_K P_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^n P_{iK}^{(v)} {}_K P_{Kj}^{(n-v)} \quad (7)$$

因而又有: (当有一边存在时)

$${}_K P_{ij}^* = {}_K P_{iK}^* P_{Kj}^* \quad \text{此处} \quad {}_K P_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} {}_K P_{ij}^{(n)}$$

$${}_K P_{ij}^* = P_{iK}^* {}_K P_{Kj}^*$$

$${}^{(K)} P_{ij}^* = {}_K P_{iK}^* P_{Kj}^* \quad \text{此处} \quad {}^{(K)} P_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} {}^{(K)} P_{ij}^{(n)}$$

定 理 2 当 $i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow k$ 有极限公式

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N {}_K P_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=0}^N P_{Kj}^{(n)}} = f_{iK}^* \quad (8)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N \kappa P_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=0}^N P_{iK}^{(n)}} = c_{Kj} \quad (9)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N {}^{(K)}P_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=0}^N P_{Kj}^{(n)}} = {}_{K,j}P_{iK}^* = {}_{ij}f_{iK}^* \quad (10)$$

証明 (8) (10) 利用 (5) (6) 从 1 到 N 求和, 再以 $\sum_{n=1}^N P_{Kj}^{(n)}$ 除之, 然后利用(1) §5 引理 A 取极限便知, (9) 可以用同法証之, 証毕。

注1) (8) 如 i, j, k 属于同一常返类, 则有渐近公式

$$\sum_{n=1}^N \kappa P_{ij}^{(n)} \sim \sum_{n=1}^N P_{Kj}^{(n)} \quad (11)$$

馬氏鏈基本类 C 称为公平类, 如果对任意 $i, j \in C$ 均有 $c_{ij} = 1$ 。对于公平类則有下面的注意。

注2) 如果 i, j, k 属于同一公平类, 則有渐近公式

$$\sum_{n=1}^N \kappa P_{ij}^{(n)} \sim \sum_{n=0}^N P_{iK}^{(n)} \sim \sum_{n=0}^N P_{Kj}^{(n)} \quad (12)$$

(12) 的前半之所以成立是因为 $c_{Kj} = 1$ 及 (9)。又因公平类恒是常返类故 (11) 可用, (12) 就得以証明。

定理 3 一基本类 C 是一公平类, 当且仅当存在 $i \in C$, 使对每 $j \in C$ 有 $c_{ij} = 1$

証明 必要性是公平类定义的特殊情形。

充分性: 由于公平类是一常返类, 因此輪換 (11) 有

$$\sum_{n=1}^N \kappa P_{ji}^{(n)} \sim \sum_{n=1}^N P_{Ki}^{(n)} \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^N {}_{ij}P_{Kj}^{(n)} \sim \sum_{n=0}^N P_{ij}^{(n)} \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^N {}_{ij}P_{iK}^{(n)} \sim \sum_{n=0}^N P_{jK}^{(n)} \quad (15)$$

(13) (14) 相比利用 (9) 得

$$\frac{\sum_{n=1}^N K P_{ji}^{(n)}}{\sum_{n=0}^N P_{ij}^{(n)}} \sim \frac{\sum_{n=0}^N P_{Ki}^{(n)}}{\sum_{n=1}^N i P_{Kj}^{(n)}} \sim \frac{1}{e_{ij}} = 1 \quad (16)$$

结合 (15), (16) 得

$$\frac{\sum_{n=1}^N K P_{ji}^{(n)}}{\sum_{n=0}^N P_{ij}^{(n)}} \sim \frac{\sum_{n=0}^N P_{jK}^{(n)}}{\sum_{n=1}^N i P_{iK}^{(n)}} \sim 1$$

即

$$\frac{\sum_{n=1}^N K P_{ji}^{(n)}}{\sum_{n=0}^N P_{jK}^{(n)}} \sim \frac{\sum_{n=0}^N P_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^N i P_{iK}^{(n)}}$$

取极限得 $e_{Ki} = \frac{1}{e_{jK}}$ 令 $k = i$ 得 $e_{ji} = 1$ 对任意 $j \in C$ 再重复应用这一关系知对一切 $j, k \in C$ $e_{jK} = 1$. 证完.

定理 3 在 [2] 中已有, 这里给出新的证明.

下面的定理给出了 $K P_{ij}^{(n)}$, $(K) P_{ij}^{(n)}$ 的极限性质, 首先引进:

$$\begin{aligned} (K) f_{ij}^{(n)} &= P(x_n = j, \text{存在 } v, 0 < v \leq n, x_v = k, \text{而 } x_t \neq k, \\ &\quad 0 < t \leq v; x_s \neq j, 0 \leq s < n | x_0 = i) \quad \text{当 } k \neq j \end{aligned}$$

$$(K) f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} \quad \text{当 } k = j$$

$$\begin{aligned} K f_{ij}^{(n)} &= P(x_n = j, x_s \neq j, 0 < s < n, \text{存在 } v, 0 < v \leq n, \\ &\quad x_v = k | x_0 = j) \quad \text{当 } k \neq j \end{aligned}$$

$$K f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} \quad \text{当 } k = j$$

$$\text{再令 } (K) f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} K f_{ij}^{(n)} \quad (K) f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} (K) f_{ij}^{(n)}$$

如果类 C 的周期为 d , 则令

$$(K) f_{ij}^*(r) = \sum_{n=r \pmod{d}} (K) f_{ij}^{(n)}$$

$$K f_{ij}^* = \sum_{n=r \pmod{d}} K f_{ij}^{(n)}$$

定理4 I) 如 j 非常返, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} K P_{ij}^{(n)} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} K P_{ij}^{(n)} < \infty$, 因而

$K P_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$, $(K) P_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时。

II) 如 j 常返, 周期为 d , 常返时间期望为 m_{jj} , 则

- a) 如 i, j 属于不同基本类, 则 $K P_{ij}^{(n)} = (K) P_{ij}^{(n)} = 0$, 对一切 n 及任意 k ; 如 k, j 属于不同基本类, 则 $K P_{ij}^{(n)} = (K) P_{ij}^{(n)} = 0$, 对一切 n 及任意 i 。
- b) 如 i, j, k 属于同一基本类, $j \in C_r(i)$ 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K P_{ij}^{(nd+r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(nd+r)} = \frac{d}{m_{jj}} \quad (17)$$

且 $K P_{ij}^{(n)} = 0$ 如 $n \neq r(mod d)$

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} (K) P_{ij}^{(nd+r)} = (K) f_{ij}^* \frac{d}{m_{jj}}$ 如 $j \in C_r(i)$ (18)

且 $(K) P_{ij}^{(n)} = 0$ 如 $n \neq r(mod d)$

c) 如 i 非基本, 则对每个 r 及 k 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K P_{ij}^{(nd+r)} = K f_{ij}^*(r) \frac{d}{m_{jj}} \quad (19)$$

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} (K) P_{ij}^{(nd+r)} = (K) f_{ij}^*(r) \frac{d}{m_{jj}} \quad (20)$

证明 I) 及 II) a) 是明显的, 以下的证明主要由 [1] § 6 已有的结果, 并且注意: (17), (19) 的证明利用

$$K P_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{v=0}^n K f_{ij}^{(vd+r)} P_{jj}^{(nd-vd)}$$

(18) 与 (20) 的证明则利用

$$(K) P_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{v=0}^n (K) f_{ij}^{(vd+r)} P_{jj}^{(nd-vd)} \quad \text{証完}$$

推论: 下面的关系式成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n K P_{ij}^{(u)} = K \pi_{ij} \quad \text{此处 } K \pi_{ij} = \frac{K f_{ij}^*}{m_{jj}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (K) P_{ij}^{(k)} = (K) \pi_{ij} \quad \text{此处 } (K) \pi_{ij} = \frac{(K) f_{ij}^*}{m_{jj}}$$

(上述二关系, 当 j 非常返, 则令 $m_{ij} = \infty$)

注) 若令

$${}_K P_i^{(n)} = P(x_n = i, \text{ 存在 } v \quad 0 < v < n, x_v = k) \quad i \neq k$$

$$({}^K) P_i^{(n)} = P(x_n = i, \text{ 存在 } v \quad 0 < v < n, x_v = h, x_s \neq i, 0 < s < v) \quad i \neq k$$

则 ${}_K P_i^{(n)}, ({}^K) P_i^{(n)}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 之极限容易由上面的定理解决, 至于它们的概率意义十分明显的

下面的结果在 § 3 中要用到。

定理 5 如 i, j, k 属于同一常返类 C , 则

$${}_K f_{ij}^* = 1 \quad ({}^K) f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} {}_i f_{iK}^{(n)} = {}_i f_{iK}^*$$

证明 如 $k = j$, 则上述关系显然。

$$\begin{aligned} \text{若 } k \neq j, \text{ 则当 } n > 1 \quad {}_K f_{ij}^{(n)} &= \sum_{v=1}^{n-1} {}_i f_{iK}^{(v)} \cdot {}_K f_{Kj}^{(n-v)}, \quad ({}^K) f_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_{v=1}^{n-1} {}_i f_{ij}^{(v)} \cdot {}_K f_{Kj}^{(n-v)}, \end{aligned}$$

对 n 求和即得上述关系。证完。

下面的结果十分整齐, 首先引进

$${}_K m_{ij}^{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \cdot {}_K f_{ij}^{(n)} \quad ({}^K) m_{ij}^{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^p ({}^K) f_{ij}^{(n)} \quad p > 0$$

当 $p = 1$, 简写为 ${}_K m_{ij}$, $({}^K) m_{ij}$. 又记

$${}_K m_{ij}^{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \cdot {}_K f_{iK}^{(n)} \quad p > 0, \quad {}_K m_{ij} = {}_K m_{ij}^{(1)}.$$

定理 6 设 p 为正整数, $k \neq j$, 若 $m_{iK}^{(p)}, m_{Kj}^{(p)}$ 存在, 则

$${}_K m_{ij}^{(p)} = \sum_{s=0}^p C_p^s \cdot m_{iK}^{(s)} \cdot m_{Kj}^{(p-s)}$$

$$({}^K) m_{ij}^{(p)} = \sum_{s=0}^p C_p^s \cdot ({}^K) m_{iK}^{(s)} \cdot m_{Kj}^{(p-s)}$$

其中 C_p^s 为牛顿二项系数, ${}_i f_{iK}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_i f_{iK}^{(n)} = {}_i f_{iK}^*$, 特别 ${}_K m_{ij} = m_{iK} + m_{Kj}$

$$({}^K) m_{ij} = {}_i f_{iK}^* + m_{Kj}$$

证明 第一个关系式由下面的计算得到:

$$\begin{aligned}
K m_{ij}^{(p)} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^p K f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} n^p \sum_{v=1}^{n-1} f_{iK}^{(v)} f_{Kj}^{(n-v)} \\
&= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{iK}^{(v)} f_{Kj}^{(n)} (v+n)^p \\
&= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{iK}^{(v)} f_{Kj}^{(n)} \sum_{s=0}^p C_p^s v^s n^{p-s} \\
&= \sum_{s=0}^p C_p^s m_{iK}^{(s)} m_{Kj}^{(p-s)}
\end{aligned}$$

第二个关系式一样計算可以求出。証完

§ 3

設 $\{x_n, n \geq 0\}$ 为一馬氏鏈，状态空間 I 是周期为 d 的常返类，由定理 5 $K f_{ij}^* = 1$ 对一切 $i, j, k \in I$

固定 $\omega \in \Omega$, $i, k \in I$ 且 $k \neq i$. 令 $\eta_1^K(i, \omega)$ 为滿足如下条件的最小正整数: $x_{\eta_1^K(i, \omega)} = i$, 存在 u , $0 < u < \eta_1^K(i, \omega)$ $x_u = k$. 再令 $\eta_2^K(i, \omega)$ 为滿足如下条件的最小正整数: $x_{\eta_2^K(i, \omega)} = i$, 且存在 u , $\eta_1^K(i, \omega) < u < \eta_2^K(i, \omega)$, $x_u = k$. 設 $\eta_v^K(i, \omega)$ 已經定义, 令 $\eta_{v+1}^K(i, \omega)$ 为滿足如下条件的最小正整数: $x_{\eta_{v+1}^K(i, \omega)} = i$, 且存在 u , $\eta_v^K(i, \omega) < u < \eta_{v+1}^K(i, \omega)$ $x_u = k$, 于是我們得到随机变量序列

$$\eta_1^K(i, \omega) < \eta_2^K(i, \omega) < \dots < \eta_v^K(i, \omega) < \dots$$

对每自然数 n 找到 v , 使

$$\eta(n, \omega) = \eta_v^K(i, \omega) \leq n < \eta_{v+1}^K(i, \omega) = \eta'(n, \omega)$$

設 $\{Y_n = f(x_n) \quad n \geq 0\}$ 为鏈 $\{x_n \quad n \geq 0\}$ 的泛函, 令

$$Y_v^K(i, \omega) = \sum_{n=\eta_v^K(i, \omega)}^{\eta_{v+1}^K(i, \omega)} Y_n$$

由于对每 $n \geq 0$, $\{\omega: \eta_v^K(i, \omega) = n\} \in \mathcal{A}\{x_s, s \leq n\}$ 故 $\eta_v^K(i, \omega)$ 是隨意随机变量 (optional r.v.) 应用 [1] § 13 的結果类似于 [1] § 14 定理 3 的証明可显然看出 $\{Y_v^K, v \geq 0\}$ 具有独立同分布。

下面要計算 $E(y_n^k(i, \omega))$ 首先引进两点:

設 α 是一随意随机变量, 令 α' 是滿足如下条件的最小正整数, $x_{\alpha'} = i$, 存在 $u, \alpha < u < \alpha' \quad x_u = k$

$$\text{令} \quad \zeta(t, w) = \begin{cases} x(\alpha + t, w) & 1 \leq t < \alpha' - \alpha \\ x(\alpha', w) & t \geq \alpha' - \alpha \end{cases} \quad (21)$$

对相空间任意序列 $i_1, i_2, \dots, i_k, \dots$ 令

$$\hat{f}(i_s) = \begin{cases} f(i_s) & \text{如 } i_s \neq i \text{ 或 } i_s = i, \text{ 存在 } t < s \text{ 使 } i_t \neq i \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases} \quad (22)$$

定理 7 $k \neq i$ 有

$$E\left(Y_v^k(i, w)\right) = \sum_j f(j) {}_k\pi_{ij} \quad \text{当 } \sum_j |f(j)| {}_k\pi_{ij} < \infty \quad (23)$$

此处 ${}_k\pi_{ij} = {}_kP_{ij}^* + {}_iP_{kj}^*$ (见 § 1)

証明 由(21)(22)

$$Y_v^k(i, w) = f(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(\zeta(n, w))$$

显然与 v 无关, 記作 $Y^k(i, w)$ 則有

$$E\left(Y^k(i, w)\right) = f(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_j \hat{f}(j) E\left[\delta_j(\zeta(n, w))\right] \quad (24)$$

但使上式之和不为 0 之項为

$$E\left[\delta_j(S(n, w))\right] = P(\zeta(n, w) = j) \\ = \begin{cases} {}_kP_{ij}^{(n)} & \text{当 } i = j \\ {}_kP_{ij}^{(n)} + \sum_{q=1}^{n-1} f_{ik}^{(q)} {}_iP_{kj}^{(n-q)} & n \geq 2 \text{ 当 } i \neq j \end{cases}$$

把这結果代入 (24) 得到

$$E\left(Y^k(i, w)\right) = f(i) + \sum_j f(j) {}_kP_{ij}^* + \sum_{j \neq i} f(j) f_{ik}^* {}_iP_{kj}^*$$

又因 $f_{ik}^* = 1, f_{ki}^* = {}_iP_{ki}^* = 1$ 故

$$E\left(Y^k(i, w)\right) = \sum_j \left({}_kP_{ij}^* + {}_iP_{kj}^*\right) f(j) = \sum_j {}_k\pi_{ij} f(j) \quad \text{証完}$$

定义 $l_n(i, n, w), \quad \rho_n^k(i, w)$ 如下

$$\rho_v^k(i, w) = \eta_{n+1}^k(i, w) - \eta_v^k(i, w)$$

对每自然数 n , 取 $l_K(i, n, w)$ (簡記为 $l_K(n)$) 使

$$\eta_{l_K}^k(n) \leq n < \eta_{l_K}^k(n) + 1$$

显然 $\rho_v^k(i, w)$ 有分布

$$P\left(\rho_v^k(i, w) = n\right) = {}^k f_{ii}^{(n)}$$

从而 [见定理 6]

$$E\left(\rho_v^k(i, w)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n {}^k f_{ii}^{(n)} = m_{ik} + m_{ki}$$

定理 8 如果 $S_i^k(f) = \sum_j {}^k \pi_{ij} f(j)$ $S_i^k(g) = \sum_j {}^k \pi_{ij} g(j)$

存在, 有限, 不同时为 0, 則

$$P \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n f(x_s)}{\sum_{s=0}^n g(x_s)} = \frac{S_i^k(f)}{S_i^k(g)} \quad (25)$$

此处 $P \lim$ 表示以概率为 1 地取极限

証明 我們有

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^n f(x_s) &= \sum_{s=0}^{\eta_{l_K}^k(i, w)-1} f(x_s) + \sum_{v=1}^{l_K(n)-1} Y_v^k + \sum_{s=l_K(n)}^n f(x_s) \\ &= \bar{Y}_K + \sum_{v=1}^{l_K(n)-1} Y_v^k + \bar{Y}^k \end{aligned}$$

显然有 $P \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{Y}^k}{l_K(n)} = 0$ (因 $l_K(n) \rightarrow \infty$ a.e.)

应用强大数定律得

$$P \lim_{l_K(n) \rightarrow \infty} \frac{1}{l_K(n)} \sum_{v=1}^{l_K(n)-1} Y_v^k = S_i^k(f)$$

即

$$P \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{l_K(n)} \sum_{s=0}^n f(x_s) = S_i^k(f)$$

同理

$$P \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{l_K(n)} \sum_{s=0}^n g(x_s) = S_i^k(g)$$

証完

推論 1 当 $T_i(f) = \sum_j e_{ij} f(j)$ [见(1) § 15], $T_i(g)$ 有

$$\text{限时, } \frac{S_i^k(f)}{S_i^k(g)} = \frac{T_j(f)}{T_i(g)} \quad k \rightarrow i \quad (26)$$

这个推論比較 [1] § 15 定理 1 及上面的定理即可得知。由此推論立得

推論 2 当 $K\pi_{ij} < \infty$ 有

$$\frac{K\pi_{ij}}{K\pi_{in}} = \frac{e_{ij}}{e_{in}}$$

这个結果比 § 1 的結果广泛, 如 I 是正常返类則

$$S_i^k(f) = K\pi_{ii} \sum_j \frac{\pi_j}{\pi_i} f(j) = \frac{K\pi_{ii}}{\pi_i} \sum_j \pi_j f(j) \quad (27)$$

推論 3, 如 I 是周期为 1 的正常返类, 則

$$P_{n \rightarrow \infty}^{Lin} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^n f(x_s) = \sum_j \pi_j f(j) \quad (28)$$

証明 在(27)中令 $g \equiv 1$, 則 $S_i^k(g) = \frac{K\pi_{ii}}{\pi_i}$, 再代入(25) 即得

推論 3 是 [1] § 15 定理 2 此处可以說是利用类似的推理, 而从不同角度得到。

我們还要求出下面两个极限

$$P_{n \rightarrow \infty}^{Lin} \frac{l_u(n)}{n} \quad \text{及} \quad P_{n \rightarrow \infty}^{Lin} \frac{\eta_{l_K(n)}}{n}$$

这两个极限是本文遍历定理的推論, 它們是新的結果, 其概率意义非常容易解释, (其中第一个在提要中已經解释。)

首先令

$$M_i^k = \frac{E(y^K(i, v))}{P(\rho^K(i))} = \frac{K\pi_{ii} T_i(f)}{m_{ik} + m_{ki}} \quad (29)$$

其中 $E(\rho^K(i)) = E(\rho_v^K(i))$ 因右边与 v 无关, 故略去之。

定理 9 如 I 是正常返类, $T_i(f)$ 有限, 則

$$P_{n \rightarrow \infty}^{Lin} \frac{\eta_{l_K(n)}}{n} = \frac{\pi_i}{K\pi_{ii}} (m_{iK} + m_{Ki}) \quad (30)$$

証明 如定理 8 証明中, 写

$$\sum_{s=0}^n f(x_s) = \bar{y}^K + \sum_{v=1}^{l_K(n)-1} y_v^K + \bar{y}^K$$

显然有

$$P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{\bar{\eta}^K}{n} = P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{\bar{\eta}^K}{n} = 0$$

若令 $Z_v^K = y_v^K - M_i^K \rho_v^K$ 則 $E(Z_v^K) = 0$

从而

$$P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{1}{l_K(n)} \sum_{v=0}^{l_K(n)-1} Z_v^K = Z(E_v^K) = 0$$

故

$$P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^n f(x_s) = M_i^K P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{1}{n} (\eta_{l_K(n)}^K - 1) \quad (31)$$

另一方面, 由定理 8 推論 3

$$P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^n f(x_s) = \pi_i T_i(f)$$

代入 (31) 再利用 (29) 得到

$$\pi_i T_i(f) = \frac{\kappa \pi_{ii} T_i(f)}{m_{iK} + m_{Ki}} P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{1}{n} \eta_{l_K(n)}^K \quad \text{証完}$$

推論 如 I 为正常返类, 則

$$P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{1}{n} l_K(n) = \frac{\pi_i}{\kappa \pi_{ii}}$$

証明 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \eta_{l_K(n)}^K &= \frac{1}{n} \eta_1^K + \sum_{v=1}^{l_K(n)-1} \frac{\rho_v^K}{n} \\ &= \frac{1}{n} \eta_1^K + \frac{l_K(n)-1}{n} \frac{1}{l_K(n)-1} \sum_{v=1}^{l_K(n)-1} \rho_v^K \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{\eta_{l_K(n)}^K}{n} &= P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{l_K(n)-1}{n} E(\rho_v^K) \\ &= P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{l_K(n)-1}{n} (m_{Ki} + m_{iK}) \end{aligned}$$

从而得到

$$P_{n \rightarrow \infty}^{Lim} \frac{l_K(n)}{n} = \frac{\pi_i}{\kappa \pi_{ii}}$$

§ 4

若 $(K) P_{ij}^{(n)} = P_{ij}^{(n)}$ 对一切 $n \geq 1$ 成立, 則称 i 到 j 必須过 k , 記作 $i \rightarrow j[k]$,

記号 $k_0 \rightarrow k_s [k_1, \dots, k_n]$ 意味着 $k_u \rightarrow k_v [k_w]$ $0 \leq u < v < w \leq n$ 且 $k_0 \rightarrow k_s [k_n]$

定理10 設 $i \rightarrow j$, 則必存在滿足如下条件的最大有限集 $[k_1, \dots, k_n]$, 使 $i \rightarrow j [k_1, \dots, k_n]$

証明, 若不存在 $k \in \mathbb{I}$ 使 $i \rightarrow j [k]$ 則事情作完, 此时 $n = 0$

若有 $k_1^{(1)}$ 使 $i \rightarrow j [k_1^{(1)}]$, 又分別选取 $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ 使

$$i \rightarrow k_1^{(1)} [k_1^{(2)}] \quad k_1^{(1)} \rightarrow j [k_1^{(2)}]$$

这种作法若在某方面不存在, 就在某方面終止。如此下去, 这个步骤有限次即可終止, 因为否則 i 到 j 必須經過无穷多状态, 而这是不可能的, 最后把选好的状态排成次序, 这种选法的唯一性不說自明, 証完。

定理11 如 i, j, k 同类, 則

$${}^{(K)}P_{ij}^* = 0 \iff i \rightarrow k [j]$$

証明 必要性: 如 $i \rightarrow k [j]$ 不成立, 則 i 到 k 不必过 j , 但 k 可到 j , 因此由 i 出发到 j 之前可能过 k , 此与 ${}^{(K)}P_{ij}^* = 0$ 矛盾。

充分性: 設 ${}^{(K)}P_{ij}^* \neq 0$, 因此 i 到 j 之前有可能过 k , 也即 i 到 k 之前不必过 j , 此与 $i \rightarrow k [j]$ 矛盾, 証完

$$\text{定理 12} \quad i \rightarrow j [k] \iff {}_i f_{ik}^* f_{kj}^* = f_{ij}^*$$

証明 必要性: 由 $i \rightarrow j [k]$ 显然推知

$${}_i f_{ik}^{(n)} = f_{ik}^{(n)} \text{ 对一切 } n$$

因此由 $f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 及 $f_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^n f_{ik}^{(v)} f_{kj}^{(n-v)}$ (因 $i \rightarrow j [k]$) 得

$$f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^n f_{ik}^{(v)} f_{kj}^{(n-v)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ik}^{(n)} \sum_{N=1}^{\infty} f_{kj}^{(N)} = {}_i f_{ik}^* f_{kj}^*$$

充分性 令若 $i \rightarrow j [k]$ 不成立, 則必存在 n 使

$${}^{(K)}f_{ij}^{(n)} < f_{ij}^{(n)}$$

从而 ${}^{(K)}f_{ij}^* < f_{ij}^*$ 然而 ${}^{(K)}f_{ij}^* = {}_i f_{ik}^* f_{kj}^* < f_{ij}^*$ 此与假设矛盾, 故 $i \rightarrow j [k]$ 成立。証完,

推論 若 $i \rightarrow j [k_1, \dots, k_n]$, 則

$$f_{ij}^* = {}_{K_2} f_{ik_1}^* {}_{K_3} f_{k_1 k_2}^* \cdots {}_{K_n} f_{K_{n-1} K_n}^* f_{K_n j}^*$$

参 考 文 献

- [1] K.L.Chung Markov chains with stationary transition probabilities, Part I
- [2] K.L.Chung Some remarks on taboo probabilities II, J. of Math 1961 V 5

On Some Probability Properties of Markof Chain and the Ergodic Theorems

Dai Yung-lung

In the present paper we consider some probability properties of markof chain. In section 1 one representation of solutions $(u_i, i \in C)$ of systems $u_i = \sum_{j \in C} u_j p_{ji}$, where C is a recurrent class, is given. In section 2 some limite formulas are obtained. In section 3 and section 4 we have given some notes for the ergodic theorems and the paths of markof chain respectively.