

# 常系数二阶两个自变数两个未知函数的綫性双曲方程組(I)

——特征方程具有四个不同实根的情形——

吳茲潛 林 偉

(数学力学系)

## §.1 前 言

命A、B、C代表三个二行二列的实数方陣，矩陣形式的偏微分方程組

$$A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (1,1)$$

实际上是两个自变数 $x, y$ ，两个未知函数 $u, v$ 的两个方程所成的方程組。

行列式

$$Q(\xi, \eta) = |A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2|$$

定义为微分方程組(1,1)的特征四次型，如果特征方程的根全是实根，而且不是实四重根，則(1,1)是双曲型的。

本文研究 $Q(\xi, \eta) = 0$ 有四个不同实根的双曲方程組。

本文是作者在华罗庚教授的直接指导下写成的，可以說是文章<sup>[1]</sup>的繼續，从問題的提出以至解决的方法都是华教授提出的，在整个研究过程中，华教授自始至终都經常給我們耐心的指导和无微不至的关怀，在这里我們对华教授給我們的熱情培养表示衷心的感谢。

方程組(1,1)与方程組

$$A_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2B_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + C_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (1,2)$$

的等价关系是由以下三种运算来定义的：

i) 方程之間的綫性組合：即有一个二行二列的滿秩方陣 $P$ 左乘方程組(1,1)，使

$$A_1 = PA, \quad B_1 = PB, \quad C_1 = PC.$$

ii) 未知函数的綫性变换: 即是有有一个二行二列的满秩方阵  $Q$ , 当作未知函数的綫性变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

时, 方程組 (1,1) 的系数所成的方阵  $A, B, C$  各变成

$$A_1 = AQ, \quad B_1 = BQ, \quad C_1 = CQ.$$

iii) 自变数的綫性变换: 当自变数作綫性变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 方程組 (1,1) 的系数所成的方阵  $A, B, C$  各成为

$$\begin{aligned} A_1 &= p^2 A + 2pqB + q^2 C, \\ B_1 &= prA + (ps + qr)B + qsC, \\ C_1 &= r^2 A + 2rsB + s^2 C. \end{aligned}$$

若方程組 (1,1) 可連續运用以上三种运算而成为方程組 (1,2) 时, 称它是互相等价的。

如果方程組 (1,1) 經過变换 i), ii) 及 iii), 它的系数所成的方阵可变成

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$

則 (1,1) 可以变成解单个方程的情况, 即是方程組的定解問題归結成解 两个二阶常系数綫性方程的定解問題。

方程組 (1,1) 变成解单个方程的情况的充分而且必要的条件是: 存在两个非零矢量  $(a, b)$  和  $(a', b')$  使

$$(a, b)A = \alpha(a', b'), \quad (a, b)B = \beta(a', b'), \quad (a, b)C = \gamma(a', b')$$

这儿  $\alpha, \beta, \gamma$  是实数。

方程組 (1,1) 的特征方程的根如果是四个不同实根, 經過上述的三种变换, 它可以代为标准型式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad (I)$$

$$b_3 = b_1^2 - \frac{1}{2} \left( k + \frac{1}{k} \right) b_1 + \frac{1}{4}, \quad 0 < k < 1.$$

容易验证: (I) 的特征方程的四个实根是  $0, \infty, -\frac{1}{k} - k$ , 詳細証明可以参

閱我們的文章<sup>[1]</sup>。

本文研究方程組 (I) 的Cauchy問題及6類定解問題,  $Q(\xi, \eta) = 0$  具有重根的情形, 將繼本文陸續發表。

## §.2 与(I)等价的方程組

方程組 (I) 可以通过i), ii), iii)三种变换化成另外的形式。事实上, 作变换

$$x = \xi + \eta, \quad y = -\xi + \eta.$$

則一次变换

$$z = \frac{w+1}{-w+1}$$

將点  $w = -\infty, 0, -k, -\frac{1}{k}$  变成  $z = -1, 1, -k_1, k_1$ 。則方程組 (I) 可以

化成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \frac{2}{\delta} \begin{pmatrix} -1+2b_1 & 2 \\ -2b_3 & 1-2b_1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} 1-4b_1^2+4b_3 & 4 \\ 4b_3 & 1-4b_1^2+4b_1 \end{pmatrix} \\ \times \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \quad (2,1)$$

这儿  $\delta = \frac{2(k+1)^2 b_1}{k} \neq 0$ 。

当  $b_3 > 0$  时, 有一滿秩方陣  $P = \begin{pmatrix} \sqrt{b_3} & 1 \\ -\sqrt{b_3} & 1 \end{pmatrix}$ , 以  $P$  左乘 (2,1), 同时命

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ , 由 (2,1) 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \frac{\alpha^2}{\alpha y^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (I_1)$$

$$\lambda \mu = k_1^2, \quad \lambda + \mu - 4b = -1 - k_1^2$$

这儿

$$b = \frac{-4b_3 + (1-2b_1)^2}{\delta^2}, \quad \lambda = \frac{1-4b_1^2+4b_3+4\sqrt{b_3}}{\delta}, \\ \mu = \frac{1-4b_1^2+4b_3-4\sqrt{b_3}}{\delta}.$$

当  $b_3 < 0$  时, 有一滿秩方陣  $P = \begin{pmatrix} \sqrt{-b_3} & 1 \\ -\sqrt{-b_3} & 1 \end{pmatrix}$ , 以  $P$  左乘 (2,1),

命  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ , 由 (2,1) 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \quad (I_2)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = k_1^2, \quad 2\alpha - 4b = -1 - k_1^2.$$

这儿

$$b = \frac{1}{\delta}, \quad \alpha = \frac{1 - 4b_1^2 + 4b_3}{\delta}, \quad \beta = \frac{4\sqrt{-b_3}}{\delta}.$$

### §.3 方程组 (I), (II<sub>1</sub>), (II<sub>2</sub>) 的一般解

命  $\frac{\partial u}{\partial x} = p$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = q$ , 则 (I) 可以写成

$$-\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \frac{1}{2b_1} \begin{pmatrix} -4b_3 + 4b_1^2 & -2 \\ 2b_3 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0. \quad (3.1)$$

以满秩方阵

$$T = \frac{k}{b_1(1-2k^2)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - 2b_1 \right) k & -1 \\ \frac{1}{2k} & (k-2b_1) \end{pmatrix}$$

左乘 (3.1), 而且命

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix},$$

则 (3.1) 可以写成

$$-\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = 0.$$

由此立得

$$p_1 = f'_4 \left( x - \frac{y}{k} \right), \quad q_1 = f'_3 (x - ky).$$

即得 (I) 的一般解是

$$\begin{cases} u = f_2(y) + f_3(x - ky) + f_4 \left( x - \frac{y}{k} \right), \\ v = f_1(x) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - 2b_1 \right) f_3(x - ky) + \frac{1}{2} (k - 2b_1) f_4 \left( x - \frac{y}{k} \right). \end{cases} \quad (II)$$

利用类似的方法可以证明方程组 (I<sub>1</sub>) 及 (I<sub>2</sub>) 的一般解是

$$\begin{cases} u = f_1(x+y) + f_2(x-y) + f_3\left(x + \frac{y}{k}\right) + f_4\left(x - \frac{y}{k}\right), \\ V = -\frac{1+\lambda}{2} \left( f_1(x+y) - f_2(x-y) \right) - \frac{1}{2} \left( k + \frac{\lambda}{k} \right) \times \\ \quad \times \left( f_3\left(x + \frac{y}{k}\right) - f_4\left(x - \frac{y}{k}\right) \right), \end{cases} \quad (\text{II}_1)$$

及

$$\begin{cases} u = f_1(x+y) + f_2(x-y) + f_3\left(x + \frac{y}{k}\right) + f_4\left(x - \frac{y}{k}\right), \\ v = -\frac{1+2b+\alpha}{\beta} f_1(x+y) - \frac{1-2b+\alpha}{\beta} f_2(x-y) \\ \quad - \frac{k^2+2bk+\alpha}{\beta} f_3\left(x + \frac{y}{k}\right) - \frac{k^2-2bk+\alpha}{\beta} f_4\left(x - \frac{y}{k}\right). \end{cases} \quad (\text{II}_2)$$

#### §.4 函数方程与函数矩阵方程

我們对方程(I)所提出的定解問題, 都可以归結为函数方程及函数矩阵方程的研究。

定理A 若函数方程

$$f(x) = \sum_{j=1}^l \alpha_j f(\alpha_j x) + h(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

适合于:

(i) 存在实数  $\mu \geq 0$ , 使

$$\sum_{j=1}^l |\alpha_j \alpha_j^\mu| < 1, \quad |\alpha_j| < 1.$$

(ii)  $h(x)$  在  $-\infty < x < +\infty$  內連續, 而且

$$|h(x)| \leq M |x|^\mu$$

則函数方程存在一个連續解, 如果  $|f(x)| \leq M |x|^\mu$  則解唯一。

証明. 定义

$$f_{-1}(x) = 0, \quad f_0(x) = h(x)$$

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^l \alpha_j f_{n-1}(\alpha_j x) + h(x).$$

行归納法立得

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq M |x|^\mu \left( \sum_{j=1}^l |\alpha_j \alpha_j^\mu| \right)^{n+1}.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $f_{n+1} - f_n \rightarrow 0$ . 因此级数

$$(f_0 - f_{-1}) + (f_1 - f_0) + \dots$$

绝对一致收敛,  $f_n \rightarrow f$ .

显然这一解是唯一的

附记1. 函数方程的一般形式应该是

$$\sum_{j=1}^l b_j f(\beta_j x) = h(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

因此条件(i)实质上应该是: 有一  $\mu \geq 0$ , 使存在  $i$ , 而

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^l |b_j \beta_j^\mu| < |b_i \beta_i^\mu|$$

附记2. 条件(2)如果改成在原点附近  $|h(x)| \leq M|x|^\mu$ , 定理仍然成立.

附记3. 用压缩映射原理仍然得定理A.

定理B 函数矩阵方程

$$f(x) = \sum_{i=1}^l f(\alpha_i x) M_i + h(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

适合于

(i) 存在  $\mu \geq 0$ , 使

$$q = \lambda (|\alpha_1|^{2\mu} + |\alpha_2|^{2\mu} + \dots + |\alpha_l|^{2\mu}) < 1,$$

$\lambda$  是方阵

$$Q = \begin{pmatrix} M_1 M_1' & M_1 M_2' & \dots & M_1 M_l' \\ M_2 M_1' & M_2 M_2' & \dots & M_2 M_l' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_l M_1' & M_l M_2' & \dots & M_l M_l' \end{pmatrix}$$

的特征值的模的最大值.

(ii)  $|h(x)| \leq M|x|^\mu$ ,  $h(x)$  在  $-\infty < x < +\infty$  内连续, 则函数矩阵方程有连续解存在, 如果  $|f(x)| \leq M|x|^\mu$ , 则这解是唯一的. 这儿

$$\begin{aligned} f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x)), \\ h(x) &= (h_1(x), h_2(x), \dots, h_l(x)). \end{aligned}$$

$M_i$  是  $l$  行  $l$  列的实数方阵,  $\alpha_i$  是常数, 且  $|\alpha_i| < 1$ .

证明. 定义

$$f_{-1}(x) = 0, \quad f_0(x) = h(x),$$

$$f_n(x) = \frac{l}{2} \sum_{i=1}^l f_{n-1}(\alpha_i x) M_i + h(x).$$

考慮  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$  的模得

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)|^2 = (f_n(\alpha_1 x) - f_{n-1}(\alpha_1 x), \dots, f_n(\alpha_l x) - f_{n-1}(\alpha_l x)) Q((f_n(\alpha_1 x) - f_{n-1}(\alpha_1 x), \dots, f_n(\alpha_l x) - f_{n-1}(\alpha_l x)))'.$$

作正交變換使

$$PQP' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \circ & \\ & \circ & \\ & & \lambda_l \end{pmatrix}.$$

命

$$(f_n(\alpha_1 x) - f_{n-1}(\alpha_1 x), \dots, f_n(\alpha_l x) - f_{n-1}(\alpha_l x)) = g_n p.$$

立得

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)|^2 = g_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \circ & \\ & \circ & \\ & & \lambda_l \end{pmatrix} g_n' \leq \lambda g_n g_n'$$

行歸納法立得

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq M q^{\frac{n}{2}} |x|^\mu.$$

當  $n \rightarrow \infty$  時,  $|f_{n+1} - f_n| \rightarrow 0$ . 因此級數

$$(f_0 - f_{-1}) + (f_1 - f_0) + \dots$$

絕對一致收斂, 故  $f_n \rightarrow f$ . 而且這一解是唯一的.

## §.5 Cauchy 問題

方程組(I)的特徵綫族是

$$x = C_1, y = C_2, x - ky = C_3, x - \frac{y}{k} = C_4.$$

選擇  $y = Cx$  為支柱, 這兒  $C \neq 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ .

Cauchy 問題是求(I)的解  $u$  及  $v$ , 使它們適合于

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= \varphi_1(x), \quad v|_{y=0} = \varphi_2(x), \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{y=0} &= h_1(x), \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{y=0} = h_2(x). \end{aligned} \quad -\infty < x < +\infty. \quad (5.1)$$

这儿,  $\varphi_1$  及  $\varphi_2$  是二阶可微的函数,  $h_1$  及  $h_2$  是一阶可微的函数,  $n$  是支柱  $y = cx$  的法向, 且

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left( -c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

由 (I) 的一般解 (II) 及 (5.1) 有

$$f_2(cx) + f_3((1-ck)x) + f_4\left(\left(1-\frac{c}{k}\right)x\right) = \varphi_1(x), \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - 2b_1\right)f_3((1-ck)x) + \frac{1}{2}(k-2b_1)f_4\left(\left(1-\frac{c}{k}\right)x\right) \\ = \varphi_2(x), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} f_2'(cx) - (c+k)f_3'((1-ck)x) + \left(c + \frac{1}{k}\right)f_4'\left(\left(1-\frac{c}{k}\right)x\right) = \\ = \sqrt{1+c^2} h_1(x), \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} -cf_1'(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - 2b_1\right)(c+k)f_3'((1-ck)x) \\ - \frac{1}{2}(k-2b_1)\left(c + \frac{1}{k}\right)f_4'\left(\left(1-\frac{c}{k}\right)x\right) = \sqrt{1+c^2} h_2(x) \end{aligned} \quad (5.5)$$

由 (5.2) — (5.5) 可以求得  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  及  $f_4$  的表示式来, 将它们代入 (II) 即得

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \varphi_1\left(\frac{y}{c}\right) + \frac{(k-2b_1)(1-ck)}{2b_1(1-k^2)(1+c^2)} \left[ \varphi_1\left(\frac{x-ky}{1-ck}\right) - \varphi_1\left(\frac{y}{c}\right) \right] \\ & + \frac{(1-2b_1k)(k-c)}{2b_1(1-k^2)(1+c^2)} \left[ \varphi_1\left(\frac{k}{k-c}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right) - \varphi_1\left(\frac{y}{c}\right) \right] \\ & + \frac{ck(1-ck)}{b_1(1-k^2)(1+c^2)} \left[ \varphi_2\left(\frac{x-ky}{1-ck}\right) - \varphi_2\left(\frac{y}{c}\right) \right] \\ & + \frac{c(k-c)}{b_1(1-k^2)(1+c^2)} \int_{y/c}^{\frac{x-y/k}{1-c/k}} h_1(t) dt \\ & - \frac{k(1-ck)}{b_1(1-k^2)\sqrt{1+c^2}} \int_{y/c}^{\frac{x-ky}{1-ck}} h_2(t) dt \\ & + \frac{k-c}{b_1(1-k^2)\sqrt{1+c^2}} \int_{y/c}^{\frac{x-y/k}{1-c/k}} h_2(t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(x, y) = & \varphi_2(x) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - 2b_1 \right) \frac{(k-2b_1)(1-ck)}{2b_1(1-k^2)(1+c^2)} \left[ \varphi_1 \left( \frac{x-ky}{1-ck} \right) - \varphi_1(x) \right] \\
& + \frac{1}{2} (k-2b_1) \frac{(1-2b_1k)(k-c)}{2b_1(1-k^2)(1+c^2)} \left[ \varphi_1 \left( \frac{x-\frac{y}{k}}{1-\frac{c}{k}} \right) - \varphi_1(x) \right] + \varphi_2(x) \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - 2b_1 \right) \frac{ck(1-ck)}{b_1(1-k^2)(1+c^2)} \left[ \varphi_2 \left( \frac{x-ky}{1-ck} \right) - \varphi_2(x) \right] \\
& + \frac{(k-2b_1)c(k-c)}{2b_1(1-k^2)(1+c^2)} \left[ \varphi_2 \left( \frac{x-\frac{y}{k}}{1-\frac{c}{k}} \right) - \varphi_2(x) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - 2b_1 \right) \frac{c(k-2b_1)(1-ck)}{b_1(1-k^2)\sqrt{1+c^2}} \int_x^{\frac{x-ky}{1-ck}} h_1(t) dt \\
& - \frac{1}{2} (k-2b_1) \frac{c(1-2b_1k)(k-c)}{2b_1(1-k^2)\sqrt{1+c^2}} \int_x^{\frac{x-y/k}{1-c/k}} h_1(t) dt \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - 2b_1 \right) \frac{k(1-ck)}{b_1(1-k^2)\sqrt{1+c^2}} \int_x^{\frac{x-ky}{1-ck}} h_2(t) dt \\
& + \frac{1}{2} (k-2b_1) \frac{k-c}{b_1(1-k^2)\sqrt{1+c^2}} \int_x^{\frac{x-y/k}{1-c/k}} h_2(t) dt .
\end{aligned}$$

## §.6 第一問題

第一問題是在  $x, y$  平面上求方程組 (I) 的解  $u$  及  $v$ ，它們適合于

$$\begin{aligned}
u|_{y=\alpha x} &= \varphi_1, & u|_{y=\beta x} &= \varphi_2, \\
v|_{y=\alpha x} &= \psi_1, & v|_{y=\beta x} &= \psi_2.
\end{aligned}
\quad -\infty < x, y < +\infty. \quad (6.1)$$

这儿  $\varphi_i, \psi_i$  是二阶可微的已知函数。 $\varphi_i(0) = \psi_i(0) = 0$ 。 $\alpha, \beta$  是某一实数，而且  $\alpha \neq \beta$ 。

从 (I) 的一般解 (II) 出发，由 (6.1) 有

$$f_2(\alpha x) + f_3((1-k\alpha)x) + f_4\left(\frac{k-\alpha}{k}x\right) = \varphi_1, \quad (6.2)$$

$$f_2(\beta x) + f_3((1-k\beta)x) + f_4\left(\frac{k-\beta}{k}x\right) = \varphi_2, \quad (6.3)$$

$$f_1(x) + bf_3((1-k\alpha)x) + af_4\left(\frac{k-\alpha}{k}x\right) = \psi_1, \quad (6.4)$$

$$f_1(x) + bf_3((1-k\beta)x) + af_4\left(\frac{k-\beta}{k}x\right) = \psi_2. \quad (6.5)$$

这儿  $f_i$  是二阶可微的函数,  $f_i(0)=0$ ,  $a = \frac{1}{2}(k-2b_1)$ ,  $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - 2b_1\right)$ . 注意若  $\alpha = \infty (\beta = 0)$  则  $\alpha x$  变为  $y$  ( $\beta x$  变为  $y$ ),  $x = 0$ . 例如 (6.2) 中, 若  $\alpha = \infty$ , 则 (6.2) 应写为

$$f_2(y) + f_3(-ky) + f_4\left(-\frac{y}{k}\right) = \varphi_1(y).$$

以后我们常用  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  表示任意实数, 请读者留意.

1)  $\alpha, \beta$  只取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$  等值 ( $0 < k < 1$ ), 这时 (6.1) 有 6 种取法, 我们只讨论  $\alpha = k, \beta = \frac{1}{k}$  的情形.

(6.2) 乘  $b$  减去 (6.3) 及 (6.4) 乘  $a$  减去 (6.5) 得

$$-f_1(x) + bf_2(kx) = b\varphi_1(x) - \varphi_2(x), \quad (6.6)$$

$$-f_1(x) + af_2\left(\frac{x}{k}\right) = a\psi_1(x) - \psi_2(x). \quad (6.7)$$

由 (6.6) 及 (6.7) 消去  $f_1(x)$  得

$$f_2(x) - \frac{b}{a}f_2(k^2x) = \psi_1(kx) - \psi_2(kx) - \frac{1}{a}[b\varphi_1(kx) - \varphi_2(kx)]. \quad (6.8)$$

选取  $-\mu \geq 1$ , 使  $\left|\frac{b}{a}\right|k^{2\mu} < 1$ , 再设  $|\varphi_i|, |\psi_i| \leq M|x|^\mu$ . 由 (6.8), 从定理 A 得  $f_2(x) = \omega(x)$ . 再由 (6.2), (6.3), (6.4) 得

$$f_1(x) = b\omega(kx) - b\varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

$$f_3(x) = -\omega\left(\frac{k}{1-k^2}x\right) + \varphi_1\left(\frac{x}{1-k^2}\right),$$

$$f_4(x) = b\omega(kx) - b\varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

将  $f_i(x)$  表示式代入 (II) 得

$$u = \omega(y) - \omega\left(\frac{k}{1-k^2}(x - ky)\right) - \omega\left(\frac{k}{k^2-1}\left(x - \frac{y}{k}\right)\right) + \varphi_1\left(\frac{x - ky}{1-k^2}\right) + \varphi_1\left(\frac{k^2}{k^2-1}\left(x - \frac{y}{k}\right)\right).$$

$$v = b\omega(kx) - b\omega\left(\frac{k}{1-k^2}(x - ky)\right) - a\omega\left(\frac{k}{k^2-1}\left(x - \frac{y}{k}\right)\right) - b\varphi_1(x) + b\varphi_1\left(\frac{x-ky}{1-k^2}\right).$$

其余的5种定解問題，利用§.4的定理，可以証明解也是唯一存在的。

2)  $\alpha \neq 0, k, \frac{1}{k}, \infty, \beta = 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 这时(6.1)有4种取法。

3)  $\alpha, \beta \neq 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 这时(6.1)只有一种取法。

这两种情况的証明方法和上面一样。但在3)的証明中， $\alpha, \beta$ 是不能任意給定的。例如  $\alpha = 1, \beta = k^2$ ，則問題的解是唯一存在的。

## §.7 第二問題

第二問題是在  $x, y$  平面上求方程組(I)的解  $u$  及  $v$ ，它們适合于

$$\begin{cases} u|_{y=\alpha x} = \varphi_1, & u|_{y=\beta x} = \varphi_2, \\ v|_{y=\alpha x} = \psi_1, & v|_{y=\gamma x} = \psi_2 \end{cases} \quad -\infty < x, y < +\infty. \quad (7.1)$$

这儿  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ . 它們都是实数。  $\varphi_i, \psi_i$  是二阶可微的函数，而且  $\varphi_i(0) = \psi_i(0) = 0$ 。

由(II)及(7.1)有

$$f_2(\alpha x) + f_3((1-k\alpha)x) + f_4\left(\frac{k-\alpha}{k}x\right) = \varphi_1, \quad (7.2)$$

$$f_2(\beta x) + f_3((1-k\beta)x) + f_4\left(\frac{k-\beta}{k}x\right) = \varphi_2, \quad (7.3)$$

$$f_1(x) + bf_3((1-k\alpha)x) + af_4\left(\frac{k-\alpha}{k}x\right) = \psi_1, \quad (7.4)$$

$$f_1(x) + bf_3((1-k\gamma)x) + af_4\left(\frac{k-\gamma}{k}x\right) = \psi_2. \quad (7.5)$$

这儿  $f_i$  是任意函数，  $f_i(0) = 0$ 。

1)  $\alpha, \beta, \gamma$  只取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$  等值。这时(7.1)有24种取法。利用上节的方法，可以求得解。

2)  $\alpha, \beta, \gamma$  中有两个值只取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ ，而另一个值不取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ 。这时(7.1)有36种情况，我們做  $\alpha = k, \gamma = 0$  的情形。由(7.2)–(7.5)

消去  $f_1, f_2, f_4$  得

$$\begin{aligned} & b\left(f_3\left(\frac{k-\beta}{\beta k}x\right)-f_3\left(\frac{(1-k^2)(k-\beta)}{\beta k}x\right)\right)-a\left(f_3\left(\frac{1-\beta k}{\beta}x\right)-f_3\left(\frac{1-k^2}{k}x\right)\right)= \\ & =\psi_2\left(\frac{k-\beta}{\beta k}x\right)-\psi_1\left(\frac{k-\beta}{k\beta}x\right)-a\left(\varphi_2\left(\frac{x}{\beta}\right)-\varphi_1\left(\frac{x}{\beta}\right)\right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

选取  $-\mu \geq 1$ , 使(7.6)适合定理A条件(i), 再设  $\varphi_i, \psi_i$  的模小于  $M|x|^\mu$ , 即得  $f_3(x) = \omega(x)$ . 同时可以求得

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -b\omega((1-k^2)x) + \psi_1(x), \\ f_2(x) &= -\omega\left(\frac{1-k^2}{k}x\right) + \varphi_1\left(\frac{x}{k}\right), \\ f_4(x) &= -\frac{b}{a}\omega(x) + \frac{b}{a}\omega((1-k^2)x) + \frac{1}{a}\psi_2(x) - \frac{1}{a}\psi_1(x). \end{aligned}$$

将  $f_i(x)$  的表示式代入(II)得

$$\begin{aligned} u &= -\omega\left(\frac{1-k^2}{k}y\right) + \omega(x-ky) - \frac{b}{a}\omega\left(x-\frac{y}{k}\right) + \frac{b}{a}\omega((1-k^2)(x-\frac{y}{k})) \\ &+ \varphi_1\left(\frac{y}{k}\right) + \frac{1}{a}\psi_2\left(x-\frac{y}{k}\right) - \frac{1}{a}\psi_1\left(x-\frac{y}{k}\right), \\ v &= -b\omega((1-k^2)x) + b\omega(x-ky) + b\omega((1-k^2)(x-\frac{y}{k})) - b\omega\left(x-\frac{y}{k}\right) + \\ &+ \psi_1(x) + \psi_2\left(x-\frac{y}{k}\right) - \psi_1\left(x-\frac{y}{k}\right). \end{aligned}$$

剩下的35种定解问题, 利用§.4的结果, 可以证明解也是唯一存在的。

3)  $\alpha, \beta, \gamma$  三个值中有一个值只取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 另外两个值不取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 若  $\alpha = 0, k, \frac{1}{k}, \infty, \beta, \gamma \neq 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ , 这时(7.1)有4种取法。若  $\alpha, \beta$  (或  $\gamma$ )  $\neq 0, k, \frac{1}{k}, \infty, \gamma$  (或  $\beta$ )  $= 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ , 这时(7.1)有8种情况。这12种情况的解都是唯一存在的。

4)  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 这时  $\alpha, \beta, \gamma$  不能任取, 例如取  $0 < \alpha < \beta < k, \gamma = -\beta$  时, 利用定理B的结果可以证明解是唯一存在的。

## §.8 第三问题

第三问题是在  $x, y$  平面上求方程组(I)的解  $u$  及  $v$ , 它们适合于

$$\begin{cases} u|_{y=\alpha x} = \varphi_1, & u|_{y=\beta x} = \varphi_2, \\ v|_{y=\gamma x} = \psi_1, & v|_{y=\delta x} = \psi_2. \end{cases} \quad -\infty < x, y < +\infty \quad (8.1)$$

这儿  $\varphi_i, \psi_i$  是二阶可微的函数,  $\varphi_i(0) = \psi_i(0) = 0$ .  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$ .

由(2)及(8.1)有

$$f_2(\alpha x) + f_3((1-k\alpha)x) + f_4\left(\frac{k-\alpha}{k}x\right) = \varphi_1, \quad (8.2)$$

$$f_2(\beta x) + f_3((1-k\beta)x) + f_4\left(\frac{k-\beta}{k}x\right) = \varphi_2, \quad (8.3)$$

$$f_1(x) + b f_3((1-k\gamma)x) + a f_4\left(\frac{k-\gamma}{k}x\right) = \psi_1, \quad (8.4)$$

$$f_1(x) + b f_3((1-k\delta)x) + a f_4\left(\frac{k-\delta}{k}x\right) = \psi_2. \quad (8.5)$$

这儿  $f_i(t)$  是任意函数,  $f_i(0) = 0$ .

1)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 这时(8.1)有6种情况。

2)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  四个值中有三个值只取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 另外一个值不取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 这时(8.1)有24种情况,

3)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  四个值中有两个值取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 另外两个值不取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ .

这时(8.1)有24情况,

4)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  四个值中只有一个值取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$  而其余三个值不取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ .

这时(8.1)有8种情况。

以上四种情况共62种定解问题, 都可以利用 § 4 的定理来证明它们的解是唯一存在的。

5)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 由(8.2)——(8.5)消去  $f_1$  及  $f_2$  得

$$\begin{cases} f_3\left(\frac{1-k\alpha}{\alpha}x\right) - f_3\left(\frac{1-k\beta}{\beta}x\right) + f_4\left(\frac{k-\alpha}{k\alpha}x\right) - f_4\left(\frac{k-\beta}{k\beta}x\right) \\ = \varphi_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \varphi_2\left(\frac{x}{\beta}\right), \\ b\left(f_3((1-k\gamma)x) - f_3((1-k\delta)x)\right) + a\left(f_4\left(\frac{k-\gamma}{k}x\right) - f_4\left(\frac{k-\delta}{k}x\right)\right) = \psi_1(x) - \psi_2(x) \end{cases} \quad (8.6)$$

如果在一开始便对  $\alpha, \gamma, \beta, \delta$  加上限制, 例如取  $0 < \alpha < \beta < k, \gamma < 0, 0 < \delta < k$ , 则(8.6)

可以化成定理 B 的函数矩阵方程的形式, 选择  $\mu \geq 1$ , 使 (8.6) 适合定理 B 的条件(i), 再设  $\varphi_i, \psi_i$  的模小于  $M|x|^\mu$ , 于是 (8.6) 的解是

$$f_3(x) = \omega_3(x),$$

$$f_4(x) = \omega_4(x).$$

同时还可以求得

$$f_2(x) = \varphi_1 \left( \frac{x}{\alpha} \right) - \omega_3 \left( \frac{1-k\alpha}{\alpha} x \right) - \omega_4 \left( \frac{k-\alpha}{k\alpha} x \right),$$

$$f_1(x) = \psi_1(x) - b\omega_3((1-k\gamma)x) - af_4 \left( \frac{k-\gamma}{k} x \right).$$

将  $f_i$  的表示式代入 (II) 得

$$u = -\omega_3 \left( \frac{1-k\alpha}{\alpha} y \right) + \omega_3(x - ky) - \omega_4 \left( \frac{k-\alpha}{k\alpha} y \right) + \omega_4 \left( x - \frac{y}{h} \right) + \varphi_1 \left( \frac{y}{\alpha} \right),$$

$$v = b\omega_3((1-k\gamma)x) + b\omega_3(x - ky) - a\omega_4 \left( \frac{k-\gamma}{k} x \right) + a\omega_4 \left( x - \frac{y}{k} \right) + \psi_1(x).$$

## §.9 第四问题

第四问题是在  $x, y$  平面上求方程组 (I) 的解  $u$  及  $v$ , 使它们适合于

$$\begin{cases} u|_y = \alpha x = \varphi_1, & u|_y = \beta x = \varphi_2, & u|_y = \gamma x = \varphi_3, & (*) \\ & & & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases} \quad (9.1)$$

$$\begin{cases} v|_y = \alpha x = \psi_1. \end{cases}$$

这儿  $\varphi_i, \psi_i$  是二阶可微的函数, 而且  $\varphi_i(0) = \psi_i(0) = 0, \alpha \neq \beta \neq \gamma$ .

由 (I) 及 (9.1) 有

$$f_2(\alpha x) + f_3((1-k\alpha)x) + f_4 \left( \frac{k-\alpha}{k} x \right) = \varphi_1 \quad (9.2)$$

$$f_2(\beta x) + f_3((1-k\beta)x) + f_4 \left( \frac{k-\beta}{k} x \right) = \varphi_2 \quad (9.3)$$

$$f_2(\gamma x) + f_3((1-k\gamma)x) + f_4 \left( \frac{k-\gamma}{k} x \right) = \varphi_3, \quad (9.4)$$

$$f_1(x) + b f_3((1-k\alpha)x) + a f_4 \left( \frac{k-\alpha}{k} x \right) = \psi_1 \quad (9.5)$$

这儿  $f_i$  是任意函数  $f_i(0) = 0$ .

注意: 若  $\alpha = \infty$  时, 不能用 (I) 来求解, 这时要用方程组 (I<sub>1</sub>) 及 (I<sub>2</sub>) 来求解,

(\*) 或者把  $u$  为  $v$ ,  $v$  换为  $u$ 。

如果把  $u$  換成  $v$ ,  $v$  換成  $u$ , 則  $\alpha = 0$  時, 要用 (I<sub>1</sub>) 及 (I<sub>2</sub>) 來求解, 注意這時特征是  $-1, 1, -k, k$ .

1)  $\alpha, \beta, \gamma = 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 這時 (9.1) 有 24 種情況。

2)  $\alpha, \beta, \gamma$  中有兩個值只取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 另外一個值不取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 這時 (9.1) 有 48 種情況。

3)  $\alpha, \beta, \gamma$  中只有一個值取  $0, \infty, k, \frac{1}{k}$ . 另外兩個值不取這些值, (9.1) 有 20 種情況。我們作  $\beta = 0, \alpha, \gamma \neq 0, k, \frac{1}{k}, \infty$  的情況。

由 (9.2), (9.3), (9.4) 消去  $f_2$  及  $f_3$  得

$$\begin{aligned} & -f_4 \left( \frac{1-k\alpha}{\alpha} x \right) + f_4 \left( \frac{1-k\gamma}{\gamma} x \right) + f_4 \left( \frac{k-\alpha}{k\alpha} x \right) - f_4 \left( \frac{k-\gamma}{k\gamma} x \right) = \\ & = \varphi_2 \left( \frac{1-k\gamma}{\gamma} x \right) - \varphi_2 \left( \frac{1-k\alpha}{\alpha} x \right) + \varphi_1 \left( \frac{x}{\alpha} \right) - \varphi_3 \left( \frac{x}{\gamma} \right) \quad (9.6) \end{aligned}$$

選取  $\mu \geq 1$ , 使 (9.6) 適合定理 A 條件 (i), 再設  $\varphi_i$  的模小於  $M|x|^\mu$ . 立得  $f_4(x) = \omega(x)$ . 同時還可以求得

$$\begin{aligned} f_1(x) &= b\omega((1-k\alpha)x) - a\omega\left(\frac{k-\alpha}{k}x\right) - b\varphi_2((1-k\alpha)x) + \psi_1(x), \\ f_2(x) &= \omega\left(\frac{1-k\alpha}{\alpha}x\right) - \omega\left(\frac{k-\alpha}{k\alpha}x\right) \varphi_2\left(\frac{1-k\alpha}{\alpha}x\right) + \varphi_1\left(\frac{x}{\alpha}\right), \\ f_3(x) &= -\omega(x) + \varphi_2(x). \end{aligned}$$

將  $f_i$  的表示式代入 (II) 立得

$$\begin{aligned} u &= \omega\left(\frac{1-k\alpha}{\alpha}y\right) - \omega\left(\frac{k-\alpha}{k\alpha}y\right) - \omega(x-ky) + \omega\left(x - \frac{y}{k}\right) \\ &\quad - \varphi_2\left(\frac{1-k\alpha}{\alpha}y\right) + \varphi_2(x-ky) + \varphi_1\left(\frac{y}{\alpha}\right), \\ v &= b\omega((1-k\alpha)x) - a\omega\left(\frac{k-\alpha}{k}x\right) - b\omega(x-ky) + a\omega\left(x - \frac{y}{k}\right) \\ &\quad - b\varphi_2((1-k\alpha)x) + b\varphi_2(x-ky) + \psi_1(x). \end{aligned}$$

4)  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ . 如果對  $\alpha, \beta, \gamma$  加上一些限制, 例如  $\alpha = 1, 0 < \beta < k$ ,

$\gamma = -\beta$ . 利用定理 B 的結果可以證明解的存在唯一性。

以上沒有證明的定解問題, 都可以利用 §.4 的結果來證明它們的解是唯一存在的。

## §.10 第五问题

第五问题是在 $x, y$ 平面上求方程组(I)的解 $u$ 及 $v$ , 使它们适合于

$$\begin{cases} u|_{y=\alpha x} = \varphi_1, & u|_{y=\beta x} = \varphi_2, & u|_{y=\gamma x} = \varphi_3, & (*) \\ v|_{y=\delta x} = \psi_1 \end{cases} \quad -\infty < x, y < +\infty \quad (10.1)$$

这儿 $\varphi_i, \psi_1$ 都是二阶可微的函数, 而且 $\varphi_i(0) = \psi_1(0) = 0$ .  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$ .

注意若 $\delta = \infty$ 时, 要用方程组(I<sub>1</sub>)及(I<sub>2</sub>)来求解, 如果将 $u$ 换为 $v, v$ 换为 $u$ , 则 $\delta = 0$ 时要用方程组(I<sub>1</sub>)及(I<sub>2</sub>)来求解, 这时特征应该改为 $-1, 1-k, k$ .

1)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ , 这时(10.1)有8种情况, 我们作 $\delta = \infty, \alpha = 0, \beta = k, \gamma = \frac{1}{k}$ 的情形, 这时定解问题的提法应该是: 在 $x, y$ 平面上求方程组(I<sub>1</sub>)(或(I<sub>2</sub>))的解, 使它们适合于

$$\begin{cases} v|_{y=-x} = \psi_1(x), & u|_{y=x} = \varphi_2(x), \\ u|_{y=-kx} = \varphi_3(x), & u|_{y=kx} = \varphi_4(x). \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty. \quad (10.2)$$

这儿 $\psi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 都是二阶可微的函数, 而且 $\psi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$ . 由(II<sub>1</sub>)及(10.2)得

$$-\frac{1+\lambda}{2} \left( f_1(0) - f_2(2x) \right) - \frac{1}{2} \left( k + \frac{\lambda}{k} \right) \left( f_3 \left( \frac{k-1}{k} x \right) - f_4 \left( \frac{k+1}{k} x \right) \right) = \psi_1(x), \quad (10.3)$$

$$f_1(2x) + f_2(0) + f_3 \left( \frac{k+1}{k} x \right) + f_4 \left( \frac{k-1}{k} x \right) = \varphi_2(x), \quad (10.4)$$

$$f_1((1-k)x) + f_2((1+k)x) + f_3(0) + f_4(2x) = \varphi_3(x), \quad (10.5)$$

$$f_1((1+k)x) + f_2((1-k)x) + f_3(2x) + f_4(0) = \varphi_4(x). \quad (10.6)$$

不妨设 $f_4(0) = 0$ .

由(10.3) — (10.6)消去 $f_3, f_4$ 得

(\*) 或者把 $u$ 为 $v, v$ 换为 $u$ .

$$\begin{cases} f_1\left(\frac{k^2-1}{2k}x\right) - f_1\left(-\frac{k^2-1}{2k}x\right) + f_2\left(-\frac{(1-k)^2}{2k}x\right) - f_2\left(\frac{(1+k)^2}{2k}x\right) \\ - \frac{(1+\lambda)k}{k^2+\lambda}f_2(2x) = h_1(x), \\ f_1(2x) - f_1\left(-\frac{(k-1)^2}{2k}x\right) - f_1\left(\frac{(1+k)^2}{2k}x\right) - f_2\left(\frac{k^2-1}{2k}x\right) \\ - f_2\left(-\frac{k^2-1}{2k}x\right) = h_2(x). \end{cases} \quad (10.7)$$

这儿

$$h_1(x) = \frac{2k}{k^2+\lambda}\psi_1(x) - \varphi_3\left(\frac{k+1}{2k}x\right) + \varphi_4\left(\frac{k-1}{2k}x\right),$$

$$h_2(x) = \varphi_2(x) - \varphi_3\left(\frac{k-1}{2k}x\right) - \varphi_4\left(\frac{k+1}{2k}x\right).$$

(10.7) 可以写成

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{k^2-1}{2k}x\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + f\left(-\frac{k^2-1}{2k}x\right)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + f\left(-\frac{(1-k)^2}{2k}x\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & + f\left(\frac{(1+k)^2}{2k}x\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + f(2x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(1+\lambda)k}{k^2+\lambda} & 0 \end{pmatrix} = h(x). \end{aligned} \quad (10.8)$$

这儿  $f = (f_1, f_2)$ ,  $h = (h_1, h_2)$ .

由 (10.8) 可以选择  $-\mu \geq 1$ , 使 (10.8) 适合定理 B 的条件 (i), 再设  $|\psi_i|$ ,

$|\varphi_i| \leq M|x|^\mu$ , 则 (10.8) 的解是

$$f_1(x) = \omega_1(x),$$

$$f_2(x) = \omega_2(x).$$

同时可以求得

$$f_3(x) = -\omega_1\left(\frac{1+k}{2}x\right) - \omega_2\left(\frac{1-k}{2}x\right) + \varphi_4\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$f_4(x) = -\omega_1\left(\frac{1-k}{2}x\right) - \omega_2\left(\frac{1+k}{2}x\right) + \varphi_3\left(\frac{x}{2}\right).$$

将  $f_i$  的表示式代入 (II) 得

$$\begin{aligned} u &= \omega_1(x+y) - \omega_1\left(\frac{1+k}{2}\left(x+\frac{y}{k}\right)\right) - \omega_1\left(\frac{1-k}{2}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right) + \omega_2(x-y) \\ &\quad - \omega_2\left(\frac{1-k}{2}\left(x+\frac{y}{k}\right)\right) - \omega_2\left(\frac{1+k}{2}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right) + \varphi_3\left(\frac{kx-y}{2k}\right) + \varphi_4\left(\frac{kx+y}{2k}\right). \\ v &= -\frac{1+\lambda}{2}\omega_1(x+y) + \frac{2}{1}\left(k+\frac{\lambda}{k}\right)\left(\omega_1\left(\frac{1+k}{2}\left(x+\frac{y}{k}\right)\right)\right. \\ &\quad \left.- \omega_1\left(\frac{1-k}{2}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right)\right) + \frac{1+\lambda}{2}\omega_2(x-y) + \frac{1}{2}\left(k+\frac{\lambda}{k}\right)\left(\omega_2\left(\frac{1-k}{2}\left(x+\frac{y}{k}\right)\right)\right. \end{aligned}$$

$$-\omega_2\left(\frac{1+k}{2}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right)+\varphi_3\left(\frac{kx-y}{2k}\right)-\varphi_4\left(\frac{kx+y}{2k}\right)$$

2)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  中有三个值只取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ , 另一个值不取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$  这时 (10.1) 有16种情况。

3)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  中有两个值只取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ , 另外两个值不取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ , 这时 (10) 有24种情况。

4)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  中只有一个值只取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ , 而其余三个值不取  $0, k, \frac{1}{k}, \infty$ 。这时 (10.1) 有32种情况。但对  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  要有限制。

5)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0, k, \frac{1}{k}, \infty$ , 这种情况要算对  $\alpha, \beta$ , 及  $\gamma$  作限制, 例如  $\alpha = 1, 0 < \beta < k, \gamma = -\beta$ 。

以上问题都可以利用 §.4 的结果, 证明它们的解是唯一存在的。

## §.11 第六问题

第六问题是在  $x, y$  平面上求方程组  $(I_1)$  及  $(I_2)$  的解  $u$  及  $v$ , 使  $u$  适合于

$$\begin{cases} u|_y = \alpha x = \varphi_1(x), & u|_y = \beta x = \varphi_2(x)^{(*)}, \\ u|_y = \gamma x = \varphi_3(x), & u|_y = \delta x = \varphi_4(x), \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty \quad (11.1)$$

这儿  $\varphi_i$  是二阶可微的函数,  $\varphi_i(0) = 0$ .  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$ .

这里我们只做方程组  $(I_2)$  的情形。  $(I_1)$  可用一样的方法求证。  
由 (11.1) 及  $(II_2)$  有

$$f_1((1+\alpha)x) + f_2((1-\alpha)x) + f_3\left(\frac{k+\alpha}{k}x\right) + f_4\left(\frac{k-\alpha}{k}x\right) = \varphi_1(x) \quad (11.2)$$

$$f_1((1+\beta)x) + f_2((1-\beta)x) + f_3\left(\frac{k+\beta}{k}x\right) + f_4\left(\frac{k-\beta}{k}x\right) = \varphi_2(x) \quad (11.3)$$

$$f_1((1+\gamma)x) + f_2((1-\gamma)x) + f_3\left(\frac{k+\gamma}{k}x\right) + f_4\left(\frac{k-\gamma}{k}x\right) = \varphi_3(x), \quad (11.4)$$

$$f_1((1+\delta)x) + f_2((1-\delta)x) + f_3\left(\frac{k+\delta}{k}x\right) + f_4\left(\frac{k-\delta}{k}x\right) = \varphi_4(x). \quad (11.5)$$

这儿  $f_i$  是任意函数,  $f_i(0) = 0$ .

(\*) 或者把  $u$  全换为  $v$ .

$$1) \quad \alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -k, \delta = k.$$

由(11.2) — (11.5)消去 $f_1, f_2$ 得

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(-\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 x\right) - f\left(\frac{4k}{(1+k)^2} x\right) + f\left(\frac{1-k^2}{(1+k)^2} x\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ + f\left(-\frac{1-k^2}{(1+k)^2} x\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = h(x). \end{aligned} \quad (11.6)$$

这儿 $f = (f_3, f_4)$ ,  $h = (h_1, h_2)$ .而

$$\begin{aligned} h_1 &= \varphi_1\left(\frac{k}{1+k} x\right) \varphi_2\left(\frac{k(1-k)}{(1+k)^2} x\right) - \varphi_3\left(\frac{2k}{(1+k)^2} x\right), \\ h_2 &= \varphi_1\left(\frac{k(1-k)}{(1+k)^2} x\right) + \varphi_2\left(\frac{k}{1+k} x\right) - \varphi_4\left(\frac{2k}{(1+k)^2} x\right). \end{aligned}$$

选取 $-\mu \geq 1$ , 使(11.6)适合定理B条件(i), 再设 $|\varphi_i| \leq M|x|^\mu$ . 则(11.6)的解是

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \omega_3(x), \\ f_4(x) &= \omega_4(x). \end{aligned}$$

同时可以求得

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\omega_3\left(\frac{k+1}{2k} x\right) - \omega_4\left(\frac{k-1}{2k} x\right) + \varphi_2\left(\frac{x}{2}\right), \\ f_2(x) &= -\omega_3\left(\frac{k-1}{2k} x\right) - \omega_4\left(\frac{k+1}{2k} x\right) + \varphi_1\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

将 $f_i$ 表示式代入(II<sub>2</sub>)得

$$\begin{aligned} u &= -\omega_3\left(\frac{k+1}{2k}(x+y)\right) - \omega_3\left(\frac{k-1}{2k}(x-y)\right) + \omega_3\left(x + \frac{y}{k}\right) \\ &\quad - \omega_4\left(\frac{k+1}{2k}(x+y)\right) - \omega_4\left(\frac{k-1}{2k}(x-y)\right) + \omega_4\left(x - \frac{y}{k}\right) \\ &\quad + \varphi_2\left(\frac{x+y}{2}\right) + \varphi_1\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ v &= \frac{1+2b+\alpha}{\beta} \omega_3\left(\frac{k+1}{2k}(x+y)\right) + \frac{1-2b+\alpha}{\beta} \omega_3\left(\frac{k-1}{2k}(x-y)\right) \\ &\quad - \frac{k^2-2bk+\alpha}{\beta} \omega_3\left(x + \frac{y}{k}\right) + \frac{1-2b+\alpha}{\beta} \omega_4\left(\frac{k-1}{2k}(x+y)\right) \\ &\quad + \frac{1-2b+\alpha}{\beta} \omega_4\left(\frac{k+1}{2k}(x-y)\right) - \frac{k^2-2bk+\alpha}{\beta} \omega_4\left(x - \frac{y}{k}\right) \\ &\quad - \frac{1+2b+\alpha}{\beta} \varphi_2\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1-2b+\alpha}{\beta} \varphi_1\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

2)  $\alpha, \beta, \gamma = -1, -k, k, 1, \delta \neq -1, -k, k, 1$ . (11.1)有4种情况。

3)  $\alpha, \beta = -1, -k, k, 1, \gamma, \delta \neq 1, -k, k, 1$ . 这时(11.1)有6种情况。

4)  $\alpha = -1, -6, k, 1$ ;  $\beta, \gamma, \delta \neq -1, -k, k, 1$ . 这时 (11.1) 有 4 种情况.

以上的問題, 3) 与 4) 在对  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  附加一些限制, 利用 § 4 的結果可以証明它們的解是唯一存在的.

附記. 以上所提的 7 类問題总共有 357 个定解問題.

## 参 考 文 献

- [1] 华罗庚、吳茲潛、林伟: 常系数二阶两个自变数两个未知函数的偏微分方程組的标准型, 数学学报 (未发表)。

### Системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического типа с постоянными коэффициентами<sup>(1)</sup>

У цзы-цянь Лин Вэй

В Настоящей статье мы рассмотрим системы уравнений с частными производными

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

здесь  $b_3 = b_1^2 - \frac{1}{2}(k + \frac{1}{k}) + \frac{1}{4}$ ,  $0 < k < 1$ , а  $b_1$  — вещественное.

Это — канонический вид систем линейных уравнений второго порядка гиперболического типа с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которых имеет четыре различных вещественных корней. Мы поставляем семь родов краевых задач и доказываем существование и единственность их решений путем существования и единственности решений некоторых функциональных уравнений и уравнений функций матриц, в которых проводятся системы (1).