具时滞的非綫性振蕩电路的微分差分方程

李 炳 熙

（数学力学系）

摘 要

本文运用三次代数方程及不动点定理等方法研究非綫性微分差分方程

$$x'(t)+ax(t)-acx(t-\tau)+g[ax^3(t)+3x^2(t)x'(t)]=0$$

的解的存在唯一性問題。此外，还討論了解的穩定性，当$\tau\to 0$时解的性态及周期解的不存在問題。

非綫性微分差分方程

$$x'(t)+ax(t)-acx(t-\tau)+g[ax^3(t)+3x^2(t)x'(t)]=0 \tag{1}$$

是在研究具时滞的非綫性振蕩电路时产生[1]。这里，a,c,g都是实的常数，$a>0$，"$'$"代表$\frac{d}{dt}$。

我們来研究（1）的解的性态和周期解的問題。

作者对胡金昌教授的审閱指导表示衷心感謝。

§1 解的存在性与唯一性

考虑微分差分方程

$$x'(t)=f[t,x(t),x(t-\tau)], \tag{2}$$

其中$\tau>0$，設φ是区間$[-\tau,0]$上的实値、連續函数，实函数$x(t)$滿足下列条件

1964年12月9日收到

$$x(t-\tau)=\varphi(t-\tau),\quad t\in[0,\tau],$$

$$x(t)=x(0)+\int_0^t f[s,x(s),x(s-\tau)]ds,\quad t>0,$$

則称 $x(t)$ 是方程(2)对应于初始函数 φ 的解。

設 $g=0$，(1)退化为綫性方程

$$x'(t)+ax(t)-acx(t-\tau)=0, \tag{3}$$

它的解的存在性与唯一性是显然的([2],[3])。

若 $g>0$，則作变換

$$y(t)=x(t)+gx^3(t), \tag{4}$$

于是(1)变成

$$y'(t)+ay(t)=acx(t-\tau), \tag{5}$$

(1)与(4)，(5)等价。取初始函数 $\varphi(t)$，$-\tau\leqslant t\leqslant 0$，令
$x(t-\tau)=\varphi(t-\tau)$，$t\in[0,\tau]$，由(5)有

$$y'(t)+ay(t)=ac\,\varphi(t-\tau),\quad t\in[0,\tau]; \tag{6}$$

求出綫性常微分方程(6)对应于初值 $y(0)=\varphi(0)+g\varphi^3(0)$ 的解

$$y(t)=e^{-at}\left\{ac\int_0^t\varphi(s-\tau)e^{as}ds+y(0)\right\},\quad t\in[0,\tau],$$

代入(4)，得

$$x^3(t)+\frac{1}{g}x(t)=\frac{1}{g}y(t),\quad t\in[0,\tau].$$

注意到这个三次方程的判别式

$$\Delta=-\frac{4}{g^3}-27\frac{y^2(t)}{g^2}<0,$$

所以它有唯一的实解

$$x(t)=\left[\frac{y(t)}{2g}+\left(\frac{y^2(t)}{4g^2}+\frac{1}{27g^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{y(t)}{2g}-\left(\frac{y^2(t)}{4g^2}+\frac{1}{27g^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}, \tag{7}$$

它滿足：$x(0)=\varphi(0)$。这样逐步积分下去，便得出对应于初始函数 φ 的解 $x(t)$，$t\geqslant 0$，詳情如下：

把(7)代入下方程

$$y'(t)+ay(t)=acx(t-\tau),\quad t\in[\tau,2\tau],$$

取这方程对应于初值 $y(\tau)=x(\tau)+gx^3(\tau)$ 的解

$$y(t)=e^{-a(t-\tau)}\left\{ac\int_{\tau}^{t}x(s-\tau)e^{a(s-\tau)}ds+y(\tau)\right\},\quad t\in[\tau,2\tau],$$

代入(4)，得唯一的实解

$$x(t)=\left[\frac{y(t)}{2g}+\left(\frac{y^2(t)}{4g^2}+\frac{1}{27g^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{y(t)}{2g}-\left(\frac{y^2(t)}{4g^2}+\frac{1}{27g^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}},\quad t\in[\tau,2\tau],$$

設 $x(t)$ 已在 $0\leqslant t\leqslant n\tau$，$n=2,3,\cdots$，上定义，則取

$$x(t)=\left[\frac{y(t)}{2g}+\left(\frac{y^2(t)}{4g^2}+\frac{1}{27g^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{y(t)}{2g}-\left(\frac{y^2(t)}{4g^2}+\frac{1}{27g^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}},$$
$$t\in[n\tau,(n+1)\tau],$$

其中 $y(t)$ 是由下式规定的

$$y(t)=e^{-a(t-n\tau)}\left\{ac\int_{n\tau}^{t}x(s-\tau)e^{a(s-n\tau)}ds+y(n\tau)\right\},\quad t\in[n\tau,(n+1)\tau],$$
$$y(n\tau)=x(n\tau)+gx^3(n\tau).$$

显然，$x(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 連續，而且 $x(t)$ 在下述意义下是唯一的：(1) 在 $[-\tau,0]$ 上等于 $\varphi(t)$ 的每个解，必在与 $x(t)$ 公共的定义域上等于 $x(t)$。这点，可証明如次。

設 $z(t)$ 是 (1) 对应于初始函数 $\varphi(t)$ 的另一解，令

$$t_0=\sup\{t\mid x(t)=z(t)\},\quad t_0\geqslant 0;$$

为明确起见，設 $t_0\in[n\tau,(n+1)\tau]$，n 为某自然数。在区間 $[t_0,t_0+\tau]$ 上，有

$$x(t)=\left[\frac{y(t)}{2g}+\left(\frac{y^2(t)}{4g^2}+\frac{1}{27g^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{y(t)}{2g}-\left(\frac{y^2(t)}{4g^2}+\frac{1}{27g^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}},$$

其中

$$y(t)=e^{-a(t-n\tau)}\left\{ac\int_{n\tau}^{t}x(s-\tau)e^{a(s-n\tau)}ds+y(n\tau)\right\},\quad t_0\leqslant t\leqslant(n+1)\tau,$$
$$=e^{-a[t-(n+1)\tau]}\left\{ac\int_{(n+1)\tau}^{t}x(s-\tau)e^{a[s-(n+1)\tau]}ds+y[(n+1)\tau]\right\},$$
$$(n+1)\tau\leqslant t\leqslant t_0+\tau;$$

而

$$z(t)=\left[\frac{v(t)}{2g}+\left(\frac{v^2(t)}{4g^2}+\frac{1}{27g^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{v(t)}{2g}+\left(\frac{v^2(t)}{4g^2}+\frac{1}{27g^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}},$$

其中

$$v(t)=e^{-a(t-n\tau)}\left\{ac\int_{n\tau}^{t}z(s-\tau)e^{a(s-n\tau)}ds+v(n\tau)\right\},\quad t_0\leqslant t\leqslant(n+1)\tau,$$

$$=e^{-a[t-(n+1)\tau]}\left\{ac\int_{(n+1)\tau}^{t}z(s-\tau)e^{a[s-(n+1)\tau]}ds+v[(n+1)\tau]\right\},$$

$$(n+1)\tau\leqslant t\leqslant t_0+\tau,$$

由于$x(t_0)=z(t_0)$；$x(t)=z(t)$，$t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$，所以

$$x(t)=z(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau,$$

这与存在有限的$t_0=sup\{t\mid x(t)=z(t)\}$相矛盾。因此，在$x(t)$与$z(t)$的公共定义域上，$x(t)=z(t)$.

总結上述，有下面的定理

定理 1

若$g\geqslant 0$，則微分差分方程（1）对每个实值、連續的初始函数φ，存在唯一的解$x(t)$，$t\geqslant\tau$，而且$x(t)$可通过逐步积分求出。

对于这种解的大范围存在間題，我們还可以采用类似于（[4]）的方法，运用Tychonoff（[5]）不动点定理来討論。

注意到$a>0$，$g\geqslant 0$，将（1）改写为

$$x'(t)=\frac{1}{1+3gx^2(t)}\left\{-ax(t)[1+gx^2(t)]+acx(t-\tau)\right\}. \tag{8}$$

記此方程式之右端为$f[x(t),x(t-\tau)]$，取

$$R=\left\{(x,y)\,\Big|\,|x|<+\infty,\ |y|<+\infty\right\},$$

我們有

$$|f(x,y)|\leqslant F(|x|,|y|),\quad (x,y)\in R, \tag{9}$$

这里

$$F(|x|,|y|)=a|x|+a|c||y|.$$

考虑綫性微分差分方程式

$$\rho'(t)=a\rho(t)+a|c|\rho(t-\tau), \tag{10}$$

任取$[-\tau,0]$上实值、連續函数$\varphi(t)$，$|\varphi(0)|=\alpha\geqslant 0$，对于初始函数$|\varphi(t)|$，（10）有在解

$$\rho=\rho(t),\ t\geqslant 0,\ \rho(t-\tau)=|\varphi(t-\tau)|,\ t\in[0,\tau].$$

令E代表定义在$[-\tau,+\infty)$的实値連續函数空間，按［4］引入适当的拓扑，E便成为完备、局部凸綫性拓扑空間，在E内考虑凸、閉、有界集合

$$\Sigma=\left\{x \,\middle|\, x\in E,\ \ |x(t)|\leqslant\rho(t),\ x(t-\tau)=\varphi(t-\tau),\ t\in(0,\tau)\right\}.$$

定义运算子

$$\Omega x(t)=x_0+\int_0^t f[x(s),x(s-\tau)]ds,\ x_0=\varphi(0),\ t\geqslant 0,$$

$$\Omega x(t)=\varphi(t),\ -\tau\leqslant t\leqslant 0.$$

当$x\in\Sigma$，有

$$|\Omega x(t)|\leqslant|x_0|+\int_0^t|f[x(s),x(s-\tau)]|ds$$

$$\leqslant\alpha+\int_0^t F[|x(s)|,\ |x(s-\tau)|]ds$$

$$\leqslant\alpha+\int_0^t F[\rho(s),\rho(s-\tau)]ds$$

$$=\rho(t)$$

$$\therefore\qquad \Omega(\Sigma)\subset\Sigma.$$

由Tychonoff不动点定理推知，Ω存在不动点，即存在連續函数$x(t)$，使得

$$x(t)=x_0+\int_0^t f[x(s),\ x(s-\tau)]ds,\ t\geqslant 0,$$

而且$x(t-\tau)=\varphi(t-\tau)$，$t\in(0,\tau)$，換言之，(8)存在对应于初始函数$\varphi(t)$的解。

对于$g<0$的情形，我們采用Bellman([6])与Hayes([7])的結果来討論(見下面§2)。

§2 稳 定 性

当 $g=0$，(1)退化为綫性微分差分方程

$$x'(t)+ax(t)-acx(t-\tau)=0,$$

所以当$|c|<1$，此方程的零解是漸近稳定的([8])。

对于$g\neq0$的情形，我們引用Bellman([6],p.353的定理3)与Hayes([7],p.231的定理1)可推得下列定理：(对于其余的常数解，可类似地討論其稳定性)

定理2 当

$$-(v^2+a^2)^{\frac{1}{2}}<ac<a,$$

其中 v 是方程 $v\cot v=-a$ 的解 $(0<v<\pi)$，则有

1° 当 $g<0$，对于 $\max\limits_{-\tau\leqslant t\leqslant 0}|\varphi(t)|$ 充分小的初始函数 φ，(1)存在解 $x(t)$，$t\geqslant-\tau$；

2° (1)的零解是漸近稳定的。

§3 解对时滞的依賴关系

Bellman 与 Cooke([9])曾运用逐次迫近法研究过某一类微分差分方程的解在时滞趋于零时之极限。对于(1)，我們运用另一方法进行处理。

首先，設 $g>0$，由§1关于解的表达式看出，解对时滞 τ 是連續的。我們有下面的定理：

定理 3

設 $x(t,\tau)$ 是(1)对应于初始函数 $\varphi(t)$，$\varphi(0)=x_0$，的解，又設 $x(t)$ 是常微分方程

$$x'(t)[1+3gx^2(t)]+ax(t)-acx(t)+agx^3(t)=0\ ,\ t\geqslant 0\ , \tag{1*}$$

对应于初値 $x(0)=x_0$ 的唯一解，其存在区間为 $[0,l]$，则

$$\lim_{\tau\to 0+} x(t,\tau)=x(t),\ t\in[0,l],$$

而且收斂是一致的。

証明

为簡明起見，把(1)，(1*)分别記为

$$x'(t)=f[x(t),x(t-\tau)],$$
$$x'(t)=f[x(t),x(t)].$$

由假設，有

$$x(t,\tau)=x_0+\int_0^t f[x(s,\tau),x(s-\tau,\tau)]ds\ , \tag{11}$$

$$x(t)=x_0+\int_0^t f[x(s),x(s)]ds\ , \tag{12}$$

令 $\alpha_1=\max\limits_{[-\tau,0]}|\varphi(t)-x_0|$，$\alpha_2=\max\limits_{[0,l]}|x(t,\tau)-x_0|$，$\alpha_3=\max\limits_{[0,l]}|x(t)-x_0|$；又取 $\alpha=\max\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$；

由于 $f(x,y)$ 是連續的且滿足 Lipschitz 条件，所以在

$$W=\{(x,y)\ |\ |x-x_0|\leqslant\alpha\ ,\ |y-x_0|\leqslant\alpha\}$$

有

$$|f(x,y)|\leqslant M\ ,$$

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant k\ \{\ |x_1-x_2|+|y_1-y_2|\ \}。$$

当 $l\leqslant\tau$，由(11)，(12)知

$$|x(t,\tau)-x(t)|\leqslant 2M\tau\ ,\ t\in[0,l],$$

从而当 $\tau\to 0+$，$x(t,\tau)$一致收斂到 $x(t)$，$0\leqslant t\leqslant l$・若 $l>\tau$，
則一方面有

$$|x(t,\tau)-x(t)|\leqslant 2M\tau\ ,\ 0\leqslant t\leqslant\tau,$$

另方面，考虑到 $f(x,y)$在 W 满足 Lipshitz 条件，故

$$\begin{aligned}|x(t,\tau)-x(t)| &= \left|\int_0^t\{f[x(s,\tau),x(s-\tau,\tau)]-f[x(s),x(s)]\}ds\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^\tau\{f[x(s,\tau),x(s-\tau,\tau)]-f[x(s),x(s)]\}ds\right|+ \\ &\quad+\left|\int_\tau^t\{f[x(s,\tau),x(s-\tau,\tau)]-f[x(s),x(s)]\}ds\right| \\ &\leqslant 2M\tau+2k\int_0^t|x(s,\tau)-x(s)|ds+ \\ &\quad+k\int_\tau^t|x(s,\tau)-x(s-\tau,\tau)|ds,\ t>\tau,\end{aligned}$$

但是

$$|x'(t,\tau)|=|f[x(t,\tau),x(t-\tau,\tau)]|\leqslant M,$$

所以

$$|x(t,\tau)-x(t-\tau,\tau)|\leqslant M\tau,$$

代入上面不等式，得

$$|x(t,\tau)-x(t)|\leqslant 2M\tau+2k\int_0^t|x(s,\tau)-x(s)|ds+kM\tau(l-\tau),$$

从而

$$|x(t,\tau)-x(t)|\leqslant M\tau[2+k(l-\tau)]e^{2kl},\ \ \tau\leqslant t\leqslant l,$$

因此，在 $0\leqslant t\leqslant l$ 有

$$|x(t,\tau)-x(t)|<\{(2+kl)Me^{2kl}\}\tau,$$

所以当 $\tau\to 0+$，$x(t,\tau)$一致收斂到 $x(t)$，$0\leqslant t\leqslant l$・对于 $g\leqslant 0$的情形，类似地可証明上述結果成立。

注：可以看出，本定理的結果是有一般性的。

§4 周期解問題

现来研究系統(1)是否存在周期为 τ 的周期解的問題。在这方面，我們有下述

定理：

定理 4

系統（1）不存在周期为τ的（非常数）周期解。

証明

以$g>0$的情形为例証明本定理，$g\leqslant 0$的情形，証明方法是类似的。

首先注意，当$g>0$，$c\leqslant 1$，(1)的常数解只有一个，即$x(t)\equiv 0$；当$g>0$，$c>1$，（1）的常数解有三个，即$x(t)\equiv 0, x(t)\equiv +[(c-1)/g]^{\frac{1}{2}}$，$x(t)\equiv -[(c-1)/g]^{\frac{1}{2}}$

設$x(t)$是(1)的以τ为周期的周期解（非常数）；則$x(t)$滿足

$$x'(t)=[a(c-1)x(t)-agx^3(t)][1+3gx^2(t)]^{-1},$$

但此方程无以τ为周期的（非常数）周期解，矛盾。定理証毕。

参 考 文 献

〔1〕 Cunningham, W. J., 1956, Nonlinear oscillators with time delay, Journ. Franklin Inst., 261:5, 495—507.

〔2〕 Мышкис, А. Д., 1951, Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, ГИТЛ, Москва—Ленинград.

〔3〕 Bellman, R., K. L. Cooke, 1963, Differential—difference equations, Academic Press, New York.

〔4〕 Stokes, A., 1960, The applications of a fixed point theorem to a variety of nonlinear stability problems, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Vol. V, 173—184.

〔5〕 Tychonoff, A., 1935, Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111, 767—776.

〔6〕 Bellman, R., 1949, On the existence and boundedness of solutions of nonlinear differential—difference equations, Ann. Math., ser. 2, Vol. 50, 347—355.

〔7〕 Hayes, N. D., 1950, Roots of the transcendental equation associated with a certain differential—difference equation, Journ. London Math. Soc., Vol. 25, 226—232.

〔8〕 Driver, R. D., 1962, Existence and stability of solutions of a delay—differential system, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 10, No. 5, 401—426.

〔9〕 Bellman, R., K. L. Cooke, 1959, On the limit of solutions of differential—difference equations as the retardation approaches zero, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 45, No. 7, 1026—1028.

On a Differential—difference Equation of Nonlinear Oscillator with Time—lag

Li Bing-xi

Abstract

We use the theory of cubic equations and the Tychonoff fixed point theorem to investigate the existence and uniqueness of solution of the nonlinear differential—difference equation

$$x'(t)+ax(t)-acx(t-\tau)+g[ax^3(t)+3x^2(t)x'(t)]=0,$$

which arises from the study of a nonlinear circuit with time-delay. The following problems are also discussed: the stability of solution, the behaviour of solution as the retardation approaches zero, the non-existence of (nonconstant) periodic solution of period τ.