

微分方程組部分變元的穩定性*

李尚廉 朱思銘

(數學力學系)

§1. 前言

微分方程組的解對部分變元的穩定性問題雖在Ляпунов^[1]及 Малкин^[2]的著作中已有所闡述,但直至1957年蘇聯 Румянцев^[3]才給出嚴格的論證,提出了判別法則,並指出其实际应用。其后,我國楊恩浩^{[4][5]}、呂紹明^[6]、王雪生^[7]及鄧奉欣^[8]等人在這方面進行了一系列的工作。

本文將對部分變元的穩定性問題進行較細致的分類,提出三種不同類型的部分變元穩定性。而文[1]—[8]所考慮的僅為本文的第Ⅰ類型穩定性。同時應用 А.М.Ляпунов, С.К.Персидский 和 В.М.Матросов 方法^{[9]—[11]}對這三種不同類型的穩定性給出一些初步結果。就第Ⅰ類型而言也包含了文[8]的全部結果作為特例。

考慮 n 階微分方程組

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (1)$$

這裡 $X(t, x)$ 在定義域

$$t \geq \tau_0, \|x_{(m)}\| \leq H, \quad x_{(n-m)} \text{ 取任意實數} \quad (H)$$

$[\tau_0 \geq 0, H \text{ 為正常數或 } +\infty, \text{ 當 } H = +\infty \text{ 時取 } \|x_{(m)}\| < +\infty, \text{ 此時稱 } (H) \text{ 為全空間, } x_{(m)} = (x_1, x_2, \dots, x_m), x_{(n-m)} = (x_{m+1}, \dots, x_n), \text{ 即 } x = (x_{(m)}, x_{(n-m)})]$

$0 < m \leq n, \|x_{(m)}\| = \sum_{s=1}^m x_s^2]$ 上連續且滿足解的存在唯一性條件。且設方程組(1)的一切在域(H)內的解可以延拓至整半軸 $[t_0, +\infty)$, 上(這裡 t_0 為初始時間)。

定義1. 設實函數 $V(t, x), W(x_{(m)})$ 在域(H)內連續。

* 本文是根據李尚廉的大學畢業論文中的第二部分修改補充而成。曾在廣東數學會1963年年會上報告過。作者感謝胡金昌教授的鼓勵指導和黎百恬老師的寶貴意見。

称 $V(t, x)$ 对变元 $x_{[m]}$ 具拟无限小上界, 如对任正数 ϵ, A, T , 有 $\delta > 0$, 当 $t \geq T$, $\|x_{[m]}\| \leq \delta$, $\|x_{[n-m]}\| \leq A$ 时有 $|V(t, x)| < \epsilon$

若 $A = +\infty$ 即 $x_{[n-m]}$ 可取任何值时则称 $V(t, x)$ 对变元 $x_{[m]}$ 具无限小上界。

称 $V(t, x)$ 为在域 (H) 内对变元 $x_{[m]}$ 的定正函数, 如存在定正函数 $W(x_{[m]})$, 且对一切 $t \geq \tau_0$, $V(t, 0) \equiv 0$ 。

称 $V(t, x)$ 在域 (H) 内对 $x_{[m]}$ 为强定正函数, 如 $V(t, x)$ 在 (H) 内对 $x_{[m]}$ 定正, 且存在正数 B , 任取 η : $0 < \eta \leq B$, 记集 $M(t^*, \eta) = \{(t^*, x): V(t^*, x) \leq \eta, (t^*, x) \in (H)\}$, 则对任给 $\epsilon > 0$, 有 $T(\epsilon, \eta) \geq \tau_0$, 使

$$\|x_{[m]}\| < \epsilon \quad \text{当 } t^* \geq T, (t^*, x) \in M(t^*, \eta)$$

利用連續函数在閉域上的一致連續性易証

引理. 若 $V(t, x)$ 为在域 $t \geq \tau_0, \|x_{[m]}\| \leq A < +\infty, \|x_{[n-m]}\| \leq B < +\infty$ 上的連續函数, 且当 $x_{[m]}^* = 0$ 时恒有 $V(t_0, x^*) \equiv 0$ ($t_0 \geq \tau_0$) 則任給 $\epsilon > 0$ 存在 δ : $0 < \delta \leq A$ 使当 $\|x_{[m]}\| \leq \delta, \|x_{[n-m]}\| \leq B$ 时 $|V(t_0, x)| < \epsilon$ 。

§2. I 型稳定性

定义2. 称方程組(1)的零解对部分变元 $x_{[m]}$ 是 I 型稳定的 (简称 I 型稳定), 如对任 $\epsilon > 0$ 及給定的 $t_0 \geq \tau_0$, 存在 $\delta(\epsilon, t_0) > 0$, 使当 $(t_0, x^0) \in (H)$, $\|x^0\| \leq \delta$ 时方程組(1)的在 $t = t_0$ 过 x^0 的解 $x(t, x^0, t_0)$ 有

$$\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| < \epsilon \quad \text{对一切 } t \geq t_0;$$

如果 δ 不依賴 t_0 , 則称零解为 I 型一致稳定。

如果零解 I 型稳定, 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| = 0$, 則称零解为 I 型漸近稳定。

称零解对部分变元 $x_{[m]}$ 是 I 型拟一致漸近稳定的, 如存在 $\delta_0 > 0$, 对任 $\eta > 0$ 有 $T(\eta) \geq 0$ 使对任 $t_0 \geq \tau_0$, 当 $(t_0, x^0) \in (H)$, $\|x_0\| \leq \delta_0$ 时成立不等式

$$\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| < \eta \quad \text{对 } t \geq t_0 + T$$

称零解在域 (H) 内对部分变元 $x_{[m]}$ 是 I 型一致漸近稳定的, 如果零解为 I 型稳定, 且对任正数 η, H_0, A , 存在 $T \geq 0$, 当 $\|x_{[m]}^0\| \leq H_0, \|x_{[n-m]}^0\| \leq A$ 时有

$$\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| < \eta \quad \text{对 } t \geq t_0 + T.$$

定理2.1 若在域 (H) 内存在对 $x_{[m]}$ 定正的函数 $V(t, x)$ 且通过方程組(1)对 t 的全导数 $\frac{dV}{dt} \leq 0$ (或 $\equiv 0$)。則方程組(1)的零解对 $x_{[m]}$ 为 I 型稳定。

如果方程組(1)的右端 $X(t, x)$ 有对 x 的連續偏导数, 則条件还是必要的。

証. 定理的条件与文[3]定理 A 的条件相同, 且为本文定理2.3的特殊情形。

故现仅証其必要性。

任取 $H_0: 0 < H_0 < H$. 考虑輔助方程組

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x)\varphi(x) \quad (2)$$

其中 $\varphi(x)$ 于 (H) 連續可微且

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } \|x_{(m)}\| \leq H_0, x_{(n-m)} \text{ 任意时} \\ 0 & \text{当 } \|x_{(m)}\| \geq H, x_{(n-m)} \text{ 任意时} \end{cases}$$

对組(2)的解 $y(t, x_0, t_0)$ 令

$$V(t, x) = (1 + e^{-t}) \|y(t_0, x^0, t)\| \quad (3)$$

因在域 (H_0) 內方程組(1)与(2)的解重合, 故依假設有

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot X = e^{-t} \|y(t_0, x^0, t)\| \leq 0$$

由 I 型稳定性, 知对任 $\varepsilon > 0$ 有 $\delta > 0$ 使当 $\|x_0\| \leq \delta, (t_0, x^0) \in (H_0)$ 时有

$$\|y_{(m)}(t, x^0, t_0)\| < \varepsilon$$

依組(2)的构造易証对 $\varepsilon \leq \|x_{(m)}\| \leq H_0$ 有 $\|y_{(m)}(t_0, x, t)\| < H, \|y(t_0, x, t)\| > \delta$.
故当 $\|x_{(m)}\| \geq \varepsilon, (t, x) \in (H)$ 时 $V(t, x) \geq \|y(t_0, x, t)\| > \delta$, 即 $V(t, x)$ 对 $x_{(m)}$ 定正。

定理 2.2 若在域 (H) 內存在对 $x_{(m)}$ 强定正的函数 $V(t, x)$ 使 $\frac{dV}{dt} \leq 0$ (或 $\equiv 0$)。

則方程組(1)的零解在域 (H) 內为 I 型一致渐近稳定。

当方程組(1)的右端对 x 有連續偏导数时, 条件还是必要的。

証. 充分性. 由定理 2.1 知零解为 I 型稳定。

对任給 $H_0: 0 < H_0 < H$ 及 $A > 0$ 有

$$\lambda = \{ \sup V(t_0, x) : \|x_{(m)}\| \leq H_0, \|x_{(n-m)}\| \leq A \} > 0$$

令 $\|x^0_{(m)}\| \leq H_0, \|x^0_{(n-m)}\| \leq A$. 因 $\frac{dV}{dt} \leq 0$ 得

$$V(t, x(t, x^0, t_0)) \leq V(t_0, x^0) \leq \lambda \quad \text{任 } t \geq t_0$$

由假設知任給 $\varepsilon > 0$ 有 $T(\varepsilon, \lambda) \geq \tau_0$, 使 $t \geq T$ 时若 $V(t, x) \leq \lambda, (t, x) \in (H)$ 則有 $\|x_{(m)}\| < \varepsilon$, 于是对解有

$$\|x_{(m)}(t, x^0, t_0)\| < \varepsilon \quad \text{当 } t \geq t_0 + T$$

故組(1)的零解在域 (H) 內为 I 型一致渐近稳定。

必要性. 与定理 2.1 同样考虑輔助方程組(2)并构造函数

$$V(t, x) = \|y(t_0, x, t)\| \quad (5)$$

于是 $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot X \equiv 0$ 且 $V(t, x)$ 在域 (H_0) 中对 $x_{(m)}$ 定正。

由 I 型稳定, 知对任 $H_0: 0 < H_0 < H$, 存在 $B > 0$ 使当 $\|x^0\| \geq B$ 时有

$$\|y_{(m)}(t, x^0, t_0)\| < H_0 \quad \text{任 } t \geq t_0$$

对任 $\eta: 0 < \eta \leq B$, 令 $N(t^*, \eta) = \{(t^*, x): \|y(t_0, x, t^*)\| \leq \eta, (t^*, x) \in (H_0)\}$ 依 (5) 式, 显然

$$N(t^*, \eta) \equiv M(t^*, \eta) \quad \text{对任 } t^* \geq t_0$$

又由 I 型一致渐近稳定性知任给 $\varepsilon > 0$ 有 $T(\varepsilon, \eta) \geq 0$ 使 $\|x^0\| < \eta$ 时

$$\|y_{(m)}(t, x^0, t_0)\| < \varepsilon$$

故当 $t^* \geq t_0 + T$ 时若 $(t^*, x) \in M(t^*, \eta)$ 则有 $\|x_{(m)}\| < \varepsilon$ 即 $V(t, x)$ 在域 (H_0) 内为 $x_{(m)}$ 的强定正函数。定理得证

注. 定理 2.2 中若定义域 (H) 为全空间, 则得到的是 I 型全局一致渐近稳定性。

定理 2.3 如果在域 (H) 中存在连续函数 $V_s(t, x) (s=1, \dots, k)$ 满足下列条件:

- 1) $V_s(t, 0) \equiv 0 \quad (s=1, \dots, k); \quad V_j(t, x) \geq 0 \quad (j=1, \dots, l, l \leq k);$

$$\tilde{V}(t, x) = \sum_{i=1}^l V_i^2(t, x) \text{ 是 } x_{(m)} \text{ 的定正函数。}$$

- 2) $V_s(t, x) (s=1, \dots, k)$ 通过方程组 (1) 对 t 的全导数可表为

$$\frac{dV_s}{dt} = f_s(t, V) + U_s(t, x) \quad (s=1, \dots, k) \quad (6)$$

其中 $V = (V_1, \dots, V_k), U_s(t, x) \leq 0$ 且连续 (或 $\equiv 0$)

- 3) 每一 $f_s(t, V)$ 在域

$$(G): t \geq t_0, \|V\| < R_1 \quad \text{这里 } R_1 \geq R = \sup \{ \|V(t, x)\| : (t, x) \in (H) \}$$

中是关于 $V_1, \dots, V_{s-1}, V_{s+1}, \dots, V_k$ 的非减函数^[12], 且 $f_s(t, 0) \equiv 0 \quad (s=1, \dots, k)$

$$4) \text{ 方程组 } \frac{dy_s}{dt} = f_s(t, y) \quad (s=1, \dots, k) \quad (7)$$

的零解当 $y^0_{(1)} \geq 0$ 时对 $y_{(1)}$ 为 I 型稳定 (渐近稳定)。

则方程组 (1) 的零解对 $x_{(m)}$ 是 I 型稳定 (渐近稳定) 的。

更且, 若 $V_s(t, x) (s=1, \dots, k)$ 具无限小上界, 且方程组 (7) 的零解当 $y^0_{(1)} \geq 0$ 时对 $y_{(1)}$ 为 I 型一致稳定 (拟一致渐近稳定) 的, 则方程组 (1) 的零解为 I 型一致稳定 (拟一致渐近稳定)。

証. 依假设有定正函数 $W(x_{(m)})$ 使

$$\tilde{V}(t, x) \geq W(x_{(m)}) \quad \text{对任 } (t, x) \in (H)$$

于是, 任給 $\varepsilon > 0$, 有 $\sigma(\varepsilon) > 0$ 使

$$\|x_{(m)}\| < \varepsilon \quad \text{当 } \tilde{V}(t, x) < \sigma \text{ 时} \quad (8)$$

而由 4) 即有 $\eta(\sigma, t_0) > 0$ 使 $\|y^0\| \leq \eta, y_{(1)}^0 \geq 0$ 时方程組 (7) 的上积分 [12] $y^+(t, y^0, t_0)$ 滿足

$$\|y_{(1)}^+(t, y^0, t_0)\| < \sigma \quad \text{任 } t \geq t_0 \quad (9)$$

再因 $V(t, x)$ 連續且 $V(t, 0) \equiv 0$ 故存在 $\delta(\eta, t_0) > 0$, 只要 $\|x^0\| \leq \delta$ 便得

$$\|V(t_0, x^0)\| \leq \eta \quad (10)$$

可証: 当 $\|x^0\| \leq \delta$ 时組 (1) 的解滿足 $\|x_{(m)}(t, x^0, t_0)\| < \varepsilon \quad \text{任 } t \geq t_0$.

若不然, 有某 x^* 及 t^* : $\|x^*\| \leq \delta, t^* > t_0$ 使当 $t \in [t_0, t^*)$ 时 $\|x_{(m)}(t, x^*, t_0)\| < \varepsilon$ 而 $\|x_{(m)}(t^*, x^*, t_0)\| = \varepsilon$.

令 $y^* = V(t^0, x^*)$ 則由 (10) 有 $\|y^*\| \leq \eta$, 而依条件 1) 和 $y_{(1)}^* \geq 0$, 据 (9) 便得

$$\|y_{(1)}^+(t, y^*, t_0)\| < \sigma \quad t \geq t_0$$

由条件 2) 在 $t \in [t_0, t^* + \Delta t)$ ($\Delta t > 0$) 有

$$\frac{d}{dt} V_s(t, x(t, x^*, t_0)) \leq f_s(t, V(t, x(t, x^*, t_0))) \quad (s = 1, \dots, k)$$

应用 Wazewski 不等式 [12] 得到

$$\tilde{V}(t, x(t, x^*, t_0)) \leq \|y_{(1)}^+(t, y^*, t_0)\| < \sigma \quad t \in [t_0, t^*]$$

依据 (8) 便有 $\|x_{(m)}(t^*, x^*, t_0)\| < \varepsilon$ 此与原設 $\|x_{(m)}(t^*, x^*, t_0)\| = \varepsilon$ 违背。証得方程組 (1) 的零解对 $x_{(m)}$ 为 I 型稳定。

若組 (7) 的零解当 $y_{(1)}^0 \geq 0$ 时对 $y_{(1)}$ 为 I 型一致稳定且函数 $V(t, x)$ 具无限小上界, 則数 $\eta(\sigma), \delta(\eta)$ 可选得与 t_0 无关, 即方程組 (1) 的零解对 $x_{(m)}$ 是 I 型一致稳定的。

若当 $y_{(1)}^0 \geq 0$ 时組 (7) 的零解对 $y_{(1)}$ 为 I 型漸近稳定, 即对任正数 $\lambda < \eta$ 及給定的 $t_0 \geq \tau_0, \|y^0\| \leq \eta$, 有 $T(\lambda, t_0, y^0) > 0$ 使 $t \geq t_0 + T$ 时 $\|y_{(1)}^+(t, y^0, t_0)\| < \lambda$, 而由 Wazewski 不等式 [12] 便得 $\|V_{(1)}(t, x(t, x^0, t_0))\| < \lambda$.

于是对 $\|x^0\| \leq \delta$ 成立

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|V_{(1)}(t, x(t, x^0, t_0))\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{V}(t, x(t, x^0, t_0)) = 0$$

但由假設, $\tilde{V}(t, x)$ 对 $x_{(m)}$ 定正, 故有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_{(m)}(t, x^0, t_0)\| = 0$$

即方程組(1)的零解對 $x_{[m]}$ 為I型漸近穩定的。

若組(7)的零解對 $y_{[l]}$ 為I型擬一致漸近穩定且 $V(t, x)$ 對 x 具無限小上界, 則 T 可選得與 t_0, y^0, x^0 無關, 即組(1)的零解對 $x_{[m]}$ 為I型擬漸近穩定的。定理證畢。

文[8]的全部結果是本定理中 $k=l=1$ 時的特例。事實上, 有

$$f(t, V) = \lambda(t)\varphi(v)$$

當 $\lambda(t), \varphi(v)$ 適合[8]定理1的條件時顯然方程組(7)的零解當 $y^0 \geq 0$ 時是穩定的, 而當 $\lambda(t), \varphi(v)$ 滿足[8]定理2的條件時, 方程組(7)的零解當 $y^0 \geq 0$ 時是漸近穩定的。

注. [8]定理2中假設“ $V(t, z)$ 對 $x_{[m]}$ 具無限小上界”由本定理可知此條件是不必要的, 其實檢查[8]也容易看出此條件在證明中不起本質作用。

$$\text{例1. } \frac{dx}{dt} = (y^2 e^{-2t} - 1)x \quad \frac{dy}{dt} = y$$

其解為 $x(t) = x_0 e^{(y_0^2 e^{-2t_0} - 1)(t - t_0)}$, $y(t) = y_0 e^{t - t_0}$ 顯然方程組的零解對 x 是I型漸近穩定的。

§3. II型穩定性

定義3. 稱方程組(1)的零解對部分變元 $x_{[m]}$ 是II型穩定的, 如對任 $\varepsilon, B > 0$ 及給定的 $t_0 \geq \tau_0$ 存在 $\delta > 0$ 使當 $\|x^0_{[m]}\| \leq \delta, \|x^0_{[n-m]}\| \leq B$ 時有

$$\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| > \varepsilon \quad \text{對任 } t \geq t_0.$$

如果 $\delta(\varepsilon, B)$ 的不依賴 t_0 , 則稱零解為II型一致穩定。

若零解II型穩定且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| = 0$ 則稱零解對 $x_{[m]}$ II型漸近穩定。

稱零解在域(H)內對 $x_{[m]}$ 是II型一致漸近穩定的, 如果零解為II型穩定, 且對任正數 $\eta, H_0 < H$ 和 A 存在 $T \geq 0$ 只要 $\|x^0_{[m]}\| \leq H_0, \|x^0_{[n-m]}\| \leq A$ 使得

$$\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| < \eta \quad \text{對 } t \geq t_0 + T$$

定理3.1 如在域(H)內存在對 $x_{[m]}$ 定正的函數 $V(t, x)$, 使 $\frac{dV}{dt} \leq 0$ (或 $\equiv 0$), 且當 $x^*_{[m]} = 0$ 時有

$$V(t_0, x^*) \equiv 0 \quad (11)$$

則方程組(1)的零解對 $x_{[m]}$ 為II型穩定的。

若代(11)式為 $V(t, x)$ 對 $x_{[m]}$ 具擬無限小上界, 那麼II型穩定是一致的。

証. 由假設有定正函數 $W(x_{[m]})$ 使當 $(t, x) \in (H)$ 時 $V(t, x) \geq W(x_{[m]})$ 任給 $\varepsilon: 0 < \varepsilon \leq H$ 及 $B > 0$ 令

$$\mu = \{ \inf W(x_{[m]}): \varepsilon \leq \|x_{[m]}\| \leq H \} > 0 \quad (12)$$

由 § 1 引理知对 μ, B 存在 $\delta > 0$ 使 $\|x_{[m]}^0\| \leq \delta, \|x_{[n-m]}^0\| \leq B$ 时 $V(t_0, x^0) < \mu$ (13)

于是只要 $\|x_{[m]}^0\| \leq \delta, \|x_{[n-m]}^0\| \leq B$ 便有

$$W(x_{[m]}(t, x^0, t_0)) \leq V(t, x(t, x^0, t_0)) \leq V(t_0, x^0) < \mu$$

依据(12)得 $\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| < \varepsilon$, 即組(1)的零解为 II 型稳定.

当 $V(t, x)$ 对 $x_{[m]}$ 具拟无限小上界时, 由定义 1 知不等式(13)对任何 $t_0 \geq \tau_0$ 均成立. 故稳定是一致的. 証毕.

利用定理 3.1 的结果, 仿 § 2 定理 2.2 的証法易証明

定理 3.2 若在域(H)内存在对 $x_{[m]}$ 强定正的函数 $V(t, x)$ 使 $\frac{dV}{dt} \leq 0$ (或 $\equiv 0$), 同时对任 $x_{[m]}^* = 0$ 均有 $V(t_0, x^*) \equiv 0$.

則組(1)的零解在域(H)内是 II 型一致渐近稳定的.

注. 若定义域在全空间, 則得到全局 II 型一致渐近稳定.

定理 3.3 若在域(H)中存在連續函数 $V_s(t, x) (s=1, \dots, k)$ 满足下列条件:

1) $V_s(t, 0) \equiv 0 (s=1, \dots, k)$, $V_j(t, x) \geq 0 (j=1, \dots, l, l \leq k)$,

$\tilde{V}(t, x) = \sum_{j=1}^l V_j^2(t, x)$ 是 $x_{[m]}$ 的定正函数; 当 $x_{[m]}^* = 0$ 时 $V_s(t_0, x^*) \equiv 0 (s=1, \dots, l)$.

$$2) \quad \frac{dV_s}{dt} = f_s(t, V) + U_s(t, x) \quad (s=1, \dots, k) \quad (14)$$

其中 $V = (V_1, \dots, V_k)$, $U_s(t, x) \leq 0$ 且連續 (或 $\equiv 0$).

3) 每一 $f_s(t, V)$ 在域(G)中是关于 $V_1, \dots, V_{s-1}, V_{s+1}, \dots, V_k$ 的非减函数, 且 $f_s(t, 0) \equiv 0$.

$$4) \quad \text{方程組} \quad \frac{dy_s}{dt} = f_s(t, y) \quad (s=1, \dots, k) \quad (15)$$

的零解当 $y_{[l]}^0 \geq 0$ 时对 $y_{[l]}$ 为 I 型稳定 (渐近稳定).

則方程組(1)的零解对 $x_{[m]}$ 是 II 型稳定 (渐近稳定) 的.

更且, 若組(15)的零解当 $y_{[l]}^0 \geq 0$ 时对 $y_{[l]}$ 为 I 型一致稳定 (拟一致渐近稳定) 而函数 $V_s(t, x) (s=1, \dots, k)$ 具拟无限小上界, 則方程組(1)的零解对 $x_{[m]}$ 为 II 型一致稳定 (拟一致渐近稳定).

証. 仿 § 2 定理 2.3 的証明进行, 只要注意(10)式的推得是依据 § 1 引理或拟无限小上界的条件.

$$\text{例 2.} \quad \frac{dx}{dt} = -xy^2e^{-2t} \sin t \quad \frac{dy}{dt} = y$$

其解为

$$x(t) = x_0 e^{y_0^2 (\cos t - \cos t_0)} e^{-2t_0} \quad y(t) = y_0 e^{t-t_0}$$

于是对任 $\varepsilon, B > 0$ 可选 $\delta = \varepsilon e^{-2B^2} > 0$, 则当 $|x_0| \leq \delta, |y_0| \leq B$ 时有 $|x(t)| < \varepsilon$ 得方程组的零解对 x 是 II 型一致稳定的。

§4. III 型稳定性

定义4. 称方程组(1)的零解对部分变元 $x_{[m]}$ 是 III 型稳定的, 如 对任 $\varepsilon > 0$ 及 给定的 $t_0 \geq \tau_0$ 存在 $\delta > 0$ 使当 $\|x^0_{[m]}\| \leq \delta$ 时有

$$\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| < \varepsilon \quad \text{对任 } t \geq t_0.$$

如果 $\delta(\varepsilon)$ 的选择 不依赖 t_0 , 则称零为 III 型一致稳定。

若零解 III 型稳定, 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| = 0$, 则称零解对 $x_{[m]}$ 为 III 型渐近稳定的。

稳定的。

称零解对 $x_{[m]}$ 是 III 型拟一致渐近稳定的, 如存在 $\delta_0 > 0$, 对任 $\eta > 0$ 有 $T(\eta) \geq 0$ 使任 $t_0 \geq \tau_0$, 当 $\|x^0_{[m]}\| \leq \delta_0$ 时有

$$\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| < \eta \quad \text{对 } t \geq t_0 + T$$

称零解在域(H)内对 $x_{[m]}$ 是 III 型一致渐近稳定的, 如零解 III 型稳定, 且对任正数 $\eta, H_0 \leq H$, 存在 $T \geq 0$ 使当 $\|x^0_{[m]}\| \leq H_0$ 时有

$$\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| < \eta \quad \text{对 } t \geq t_0 + T$$

定理4.1 若在域(H)内存在对 $x_{[m]}$ 定正的函数 $V(t, x)$ 使 $\frac{dV}{dt} \leq 0$ (或 $\equiv 0$), 同时有定正函数 $W(x_{[m]})$ 使

$$V(t_0, x) \leq W(x_{[m]}) \quad \text{当 } (t_0, x) \in (H) \quad (16)$$

则方程组(1)的零解对 $x_{[m]}$ 是 III 型稳定的。

当方程组的右端对 x 有连续偏导数时, 定理的条件还是必要的。

证. 充分性. 由假设, 域(H)内存在定正函数 $W_1(x_{[m]})$ 使

$$V(t, x) \geq W_1(x_{[m]}) \quad \text{任 } (t, x) \in (H)$$

对任 $\varepsilon: 0 < \varepsilon < H$, 有

$$\mu = \{ \inf W_1(x_{[m]}): \varepsilon \leq \|x_{[m]}\| \leq H \} > 0 \quad (17)$$

更有 $\delta: 0 < \delta \leq \varepsilon$, 使

$$W(x_{[m]}) < \mu \quad \text{当 } \|x_{[m]}\| \leq \delta \text{ 时}$$

于是, 任适合 $\|x^0_{[m]}\| \leq \delta$ 的 $x(t) = x(t, x^0, t_0)$ 成立

$$W_1(x_{[m]}(t)) \leq V(t, x(t)) \leq V(t_0, x^0) \leq W(x^0_{[m]}) < \mu \quad \text{当 } t \geq t_0.$$

依 (17) 得 $\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| < \varepsilon$, 即組 (1) 的零解对 $x_{[m]}$ 为 III 型稳定的必要性的証明与 § 2 定理 2.1 相同, 只是 V 函数改为

$$V(t, x) = (1 + e^{-t}) \|y_{[m]}(t_0, x, t)\| \quad (18)$$

定理 4.2 若在域 (H) 內存在对 $x_{[m]}$ 强定正的函数 $V(t, x)$ 使 $\frac{dV}{dt} \leq 0$ (或 $\equiv 0$), 同时存在定正函数满足 (16) 式.

則組 (1) 的零解在 (H) 內对 $x_{[m]}$ 是 III 型一致渐近稳定的.

当組 (1) 的右端对 x 有連續偏导数时, 定理条件还是必要的.

証. 充分性. 由定理 4.1 知零解为 III 型稳定.

任給 $H_0: 0 < H_0 \leq H$ 令

$$\lambda = \{ \sup W(x_{[m]}): \|x_{[m]}\| \leq H_0 \} > 0$$

取 $\|x^0_{[m]}\| \leq H_0$, 則对解有

$$V(t, x(t, x^0, t_0)) \leq V(t_0, x^0) \leq W(x^0_{[m]}) \leq \lambda \quad \text{任 } t \geq t_0$$

因 $V(t, x)$ 对 $x_{[m]}$ 强定正, 知任 $\varepsilon > 0$ 有 $T(\varepsilon, \lambda) \geq t_0$. 使 $t \geq T$ 时若 $V(t, x) \leq \lambda$, $(t, x) \in (H)$ 則 $\|x_{[m]}\| < \varepsilon$. 即有

$$\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| < \varepsilon \quad t \geq t_0 + T$$

故零解在域 (H) 內为 III 型一致渐近稳定的.

必要性. 易仿照 § 2 定理 2.2 的証法得到, 只是代 (5) 式为

$$V(t, x) = \|y_{[m]}(t_0, x, t)\|$$

注. 若定义域 (H) 为全空間, 定理仍成立. 得到的是 III 型全局一致渐近稳定.

定理 4.3 若在域 (H) 內存在对 $x_{[m]}$ 定正的函数 $V(t, x)$, 它对 $x_{[m]}$ 具无限小上界, 且 $\frac{dV}{dt}$ 对 $x_{[m]}$ 定負.

則方程組 (1) 的零解对 $x_{[m]}$ 同时为 III 型一致稳定及 III 型拟一致渐近稳定.

証. 由定理 4.1 的証明知当 $V(t, x)$ 对 $x_{[m]}$ 具无限小上界时 $\delta(\varepsilon)$ 的选择不依賴 t_0 , 即零解为 III 型一致稳定.

由假設, 存在定正函数 $W(x_{[m]})$ 、 $W_1(x_{[m]})$ 使对任 $(t, x) \in (H)$ 有

$$V(t, x) \geq W(x_{[m]}) \quad \frac{dV}{dt} \leq -W_1(x_{[m]})$$

令 $M = \{ \inf W(x_{[m]}): \|x_{[m]}\| = H \} > 0$, 依題設存在 $\delta_0: 0 < \delta_0 \leq H$ 使 $\|x_{[m]}\| \leq \delta_0$ 时

$$V(t, x) < M \quad \text{对 } t \geq \tau_0 \quad (19)$$

于是任給 $\eta: 0 < \eta < \delta_0$ 有 $\lambda = \{ \inf W(x_{[m]}): \eta \leq \|x_{[m]}\| \leq H \} > 0$
且存在 $\mu: 0 < \mu \leq H$ 使 $\|x_{[m]}\| \leq \mu$ 时有

$$V(t, x) < \lambda \quad \text{对 } t \geq \tau_0 \quad (20)$$

取 $\omega = \{ \inf W_1(x_{[m]}): \mu \leq \|x_{[m]}\| \leq H \} > 0$
則对任 $\mu \leq \|x_{[m]}\| \leq H$ 均有

$$\frac{dV}{dt} \leq -\omega \quad (21)$$

定 $T(\eta) > \frac{M-\lambda}{\omega}$, 于是对任 $t_0 \geq \tau_0$ 当 $\|x^0_{[m]}\| \leq \delta_0$ 时可証解 $x(t) = x(t, x^0, t^0)$
滿足

$$\|x_{[m]}(t, x^0, t_0)\| < \eta \quad \text{对 } t \geq t_0 + T \quad (22)$$

事实上, 必有某 $t^* \in [t_0, t_0 + T]$ 使

$$V(t^*, x(t^*)) < \lambda \quad (23)$$

否則易得

$$\mu \leq \|x_{[m]}(t)\| \leq H \quad t \in [t_0, t_0 + T]$$

而据 (21) 有

$$V(t_0 + T, x(t_0 + T)) = V(t_0, x^0) + \int_{t_0}^{t_0 + T} \frac{dV}{dt} dt \leq M - \omega T < \lambda$$

与原設违背。

于是由 (23) 更有

$$V(t, x(t)) < \lambda \quad \text{任 } t \geq t_0 + T$$

得証 (22) 即組 (1) 的零解对 $x_{[m]}$ 为 III 型拟一致漸近稳定。定理証毕。

定理4.4 若在域 (H) 中存在連續函数 $V_s(t, x) (s=1, \dots, k)$, 滿足下列条件:

1) $V_s(t, 0) = 0 (s=1, \dots, k)$, $V_j(t, x) \geq 0 (j=1, \dots, l \leq k)$, $\tilde{V}(t, x) =$
 $= \sum_{j=1}^l V_j^2(t, x)$ 是 $x_{[m]}$ 的定正函数; 且有定正函数 $W(x_{[m]})$ 对任 $(t_0, x) \in (H)$
有 $\tilde{V}(t_0, x) \leq W(x_{[m]})$ 。

$$2) \quad \frac{dV_s}{dt} = f_s(t, V) + U_s(t, x) \quad (s=1, \dots, k)$$

其中 $V = (V_1, \dots, V_k)$, $U_s(t, x) \leq 0$ 且連續 (或 $\equiv 0$)。

3) 每一 $f_s(t, x)$ 在域 (G) 中是关于 $V_1, \dots, V_{s-1}, V_{s+1}, \dots, V_k$ 的非減函数,

且 $f_s(t, 0) \equiv 0$ 。

$$4) \quad \text{方程組} \quad \frac{dy_s}{dt} = f_s(t, y) \quad (s = 1, \dots, k) \quad (24)$$

的零解当 $y^0_{(1)} \geq 0$ 时对 $y_{(1)}$ 为 III 型稳定 (渐近稳定)。

則方程組 (1) 的零解对 $x_{(m)}$ 是 III 型稳定 (渐近稳定) 的。

更且, 若 $V_s(t, x)$ 对 $x_{(m)}$ 具无限小上界, 而組 (24) 的零解当 $y^0_{(1)} \geq 0$ 时对 $y_{(1)}$ 是 III 型一致稳定拟一致 (渐近稳定) 的。則方程組 (1) 的零解对 $x_{(m)}$ 为 III 型一致稳定 (拟一致渐近稳定)。

若条件 4) 中方程組 (24) 的零解的稳定性态减弱为当 $y^0_{(1)} \geq 0$ 时对 $y_{(1)}$ 是 I 型稳定 (渐近稳定), 而条件 1) 加强为对任 $(t_0, x) \in (H)$ 有 $\|V(t_0, x)\| \leq W(x_{(m)})$ 。此时定理仍成立。若是 I 型一致稳定 (拟一致渐近稳定) 的, 則条件須加强为 $V_s(t, x)$ ($s = 1, \dots, k$) 对 $x_{(m)}$ 具无限小上界, 此时便得到方程組 (1) 的零解对 $x_{(m)}$ 为 III 型一致稳定 (拟一致渐近稳定) 的結論。

証. 証明与 § 2 定理 2.3 的方法相同, 仅对不等式 (10) 作适当的論証或适当变换它的形式即可。

$$\text{例 3.} \quad \frac{dx}{dt} = -x \quad \frac{dy}{dt} = y$$

$$\text{通解为} \quad x(t) = x_0 e^{-(t-t_0)} \quad y(t) = y_0 e^{t-t_0}$$

显然, 方程組的零解对 x 是 III 型拟一致渐近稳定的。

参 考 文 献

- [1] Ляпунов А. М., Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения, ОНТИ(1935).
- [2] Малкин И. Г., Об устойчивости движения в смысле Ляпунова, Матем. сборник, 3 (45): 1 (1938).
- [3] Румянцев В. В., Об устойчивости движения по отношению к части переменных, Вестн. МГУ, 4 (1257), 9—16.
- [4] 楊恩浩, 关于微分方程的解对部分变元的稳定性, 四川大学学报 (自然科学), 1 (1960), 69—77.
- [5] 楊恩浩, 关于微分方程的解对部分变元的全局稳定性, 四川大学学报 (自然科学), 2 (1960), 37—44.
- [6] 呂紹明, 关于部分变元的全局稳定性, 新乡师范学院学报, 4:2 (1963), 9—11.
- [7] 王雪生, 微分方程解对部分变元稳定性的几个定理, 新乡师范学院

学报, 4:3 (1963), 7—17。

- [8] 邵奉欣, 关于微分方程組的解对部分变元的稳定性, 数学进展, 6:4 (1963), 345—351。
- [9] 許淞庆, 常微分方程稳定性理論, 上海科学技术出版社 (1962)。
- [10] Персидский С. К., Ко второй методе Ляпунова, П М М, 25:1 (1961), 17—23。
- [11] Матросов В. М., К теории устойчивости движения, П М М, 26:6 (1962), 992—1002。
- [12] Wazewski T., Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux dixièmes membres monotones et leurs applications, Ann. Soc. Polon. Math., 23 (1950), 112—166。

Conditional Stability of Differential Systems

Li Shang-lien Chu Szu-ming

We consider the differential equations

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (I)$$

where x and X are n -vectors, and $X(t, x)$ is defined and continuous on the region

$$t \geq \tau_0, \quad \|x_{[m]}\| \leq H, \quad \|x_{[n-m]}\| \text{ takes any value.} \quad (H)$$

where $\tau_0 \geq 0$, H is a positive constant or $+\infty$, $x_{[m]} = (x_1, \dots, x_m)$,

$x_{[n-m]} = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ with $x = (x_{[m]}, x_{[n-m]})$. Let $\|x_{[m]}\| = \sum_{s=1}^m x_s^2$. Assume

$X(t, x)$ sufficiently smooth on (H) such that, given any $(t_0, x^0) \in (H)$, there exists for all $t \geq t_0$ a unique solution $x(t, x^0, t_0)$ of the equations (I) in (H), which equals x^0 at t_0 . Moreover, that $X(t, 0) \equiv 0$ for all $t \geq \tau_0$.

In this paper we present three different types of conditional stability. The conditional stability^{(1)–(8)} which was considered by V.V.Rumyancev and the other authors is merely the first type among them. Moreover, we give some criterions to examine the three types of stability by the aid of the methods of Lyapunov⁽⁹⁾, C.K.Persidsky⁽¹⁰⁾ and Matrosov⁽¹¹⁾.