一类多連域上的拉甫伦捷夫問題

徐 偉 宣

（数学力学系）

摘　要

本文試图探討一下如下的拉甫伦捷夫問題：設 G 为 z- 平面上的 n 連区域 $(n>1)$，$a\varepsilon G$，$\widetilde{G}$ 是含于 G 中的单連域，$a\varepsilon\widetilde{G}$；$\widetilde{G}$ 关于 a 的映照半径記为 $R(a,\widetilde{G})$，問 $\widetilde{G}$ 为怎样的区域时，$R(a,\widetilde{G})$ 达到最大值？

許永华[2] 研究过类似的問題，他得出了某些結果，証明了极值区域的唯一性，本文是从不同的角度来討論这問題的。

当 $n=2$ 时，М.А.Лаврентьев 証明了如下定理：設 G 为 z- 平面上两边界不退化为一点的二連域，a 为 G 中的一点，則极值区域 g 是这样的：当把 G 保角映照到园环 $r<|z|<1$，a 映为負实軸上一点时，g 被映到园环除去割綫 l：$\{z=x+iy \mid r<x<1, y=0\}$ 后的单連域。

定理的証明据說用变分法。本文想用极值長的方法討論某类具对称性的 n 連区域上的拉甫伦捷夫問題。証明过程并未引用上述定理，因此上面的拉甫伦捷夫定理可作为本节的推論。

§1　关于极值長的一些預备知識

設 G 为一（黎曼）曲面，$\{\gamma\}$ 为 G 中一族可求长曲綫，P 为定义在 G 上不空的保形不变度量类 $\rho(z)|dz|$。

$$\text{如果}\quad \iint\limits_G \rho^2 dxdy \quad \text{及} \quad \inf_{\gamma\in\{\gamma\}} \int_\gamma \rho|dz|$$

不同时为 0 或∞，定义[1]

1964年 9 月20日收到

$$\frac{1}{\lambda\{\gamma\}} = \inf_{\rho\in p} \frac{\iint_G \rho^2 dxdy}{\left[\inf\limits_{\gamma\in\{\gamma\}} \int_\gamma \rho|dz|\right]^2} \qquad (1)$$

为关于曲綫族$\{\gamma\}$的模；$\lambda\{\gamma\}$称为$\{\gamma\}$的极值长。

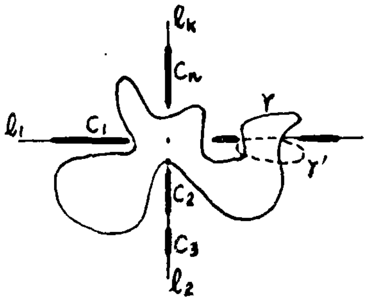
現在，設G为一双曲型单連域，$z_0\in G$；挖去小园$k(r)$：$|z-z_0|\leqslant r$，小园园周記为$C(r)$，$G(r)=G-k(r)$；又設$\{\gamma\}_r$为一族可在$G(r)$內連續变化为$C(r)$而把z_0和边界分隔开的可求长若当閉曲綫族。記$\lambda\{\gamma\}_r$为这族曲綫的极值长。又設G关于z_0的映照半径为$R(z_0,G)$。可以証明[1]：

$$R(z_0,G) = \lim_{r\to 0} r\, exp\left\{\frac{2\pi}{\lambda\{\gamma\}_r}\right\} \qquad (2)$$

§2 拉甫倫捷夫問題

定理一 設包含原点的有限連典型域G的边界落在k条原点射綫上，沿此k条射綫作割綫$l_1, l_2, \cdots l_k$，割綫的一端是∞远点，一端是該射綫上与原点最近的边界点，如此便得出G中的单連域g。如果g关于每$l_\nu(\nu=1,2,\cdots k)$是对称的，則g是上述关于原点的拉甫倫捷夫問題的极值区域。（图1中$C_1, C_2\cdots\cdots C_n$是G的边界）

証明 記所述单連域g关于原点的格林函数为



$$u(z) = log\frac{1}{|z|} + h(z)$$

其中$h(z)$在g中調和，且

$$h(z) = k + 0(|z|) \quad |z|\to 0$$

由假設，g关于每$l\nu(\nu=1,2,\cdots\cdots k)$是对称的，所以格林函数$u(z)$关于$l\nu$是对称的。

$$令 \quad \rho_0(z) = |grad\, u| = \left|\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \delta}\right)^2\right|^{\frac{1}{2}}$$

則$\rho_0(z)$关于每$l\nu$也是对称的。

現設$\widetilde{G}\subset G$为另一包含原点的单連域，于$\widetilde{G}$中挖去小园$k(r)$：$|z|\leqslant r$，記小园周为$C(r)$，$\widetilde{G}(r)=\widetilde{G}-k(r)$，$\{\gamma\}_r$为在$\widetilde{G}(r)$中可連續变化为$C(r)$的可求长若唐閉曲綫族。由§1的式（2）。

$$R(0, \widetilde{G}) = \lim_{r\to 0} r \; exp\left\{\frac{2\pi}{\lambda\{\gamma\}_r}\right\} \qquad (3)$$

但
$$\frac{1}{\lambda\{\gamma\}_r} = \inf_{\rho} \frac{\iint\limits_{\widetilde{G}(r)} \rho^2 dxdy}{\left[\inf\limits_{\gamma\in\{\gamma\}_r} \int_\gamma \rho|dz|\right]^2} \leqslant \frac{\iint\limits_{\widetilde{G}(r)} \rho_0^2 dxdy}{\left[\inf\limits_{\gamma\in\{\gamma\}_r} \int_\gamma \rho_0|dz|\right]^2} \qquad (4)$$

我們先来証明对任一$\gamma\in\{\gamma\}_r$，都有

$$\int_\gamma \rho_0|dz| \geqslant 2\pi \qquad (5)$$

这里有两种情形：第一种情形，当γ并未穿过$l\nu(\nu=1,2,\cdots\cdots k)$时，$\gamma$在$g$中与$C(r)$同調，

$$\therefore \int_\gamma \rho_0|dz| \geqslant \left|\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds\right| = \left|\int_{C(r)} \frac{\partial u}{\partial n} ds\right| = 2\pi$$

第二种情形，当γ有些部分穿过某些射綫$l\nu$时，由于$\rho_0(z)$关于$l\nu$是对称的，故可以把凸出在$l\nu$一边的一部分曲綫改为关于$l\nu$对称的一段曲綫而不改变积分$\int_\gamma \rho_0|dz|$的值。因此我們可把γ改为不穿过任何$l\nu(\nu=1,2,\cdots\cdots k)$的曲綫$\gamma'$，$\gamma'$属于第一种情形，而且

$$\int_\gamma \rho_0|dz| = \int_{\gamma'} \rho_0|dz| \geqslant 2\pi$$

(5)式得証。由(5)及(4)

$$\frac{1}{\lambda\{\gamma\}_r} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{\widetilde{G}(r)} \rho_0^2 dxdy \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{G(r)} \rho_0^2 dxdy$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{g(r)} \rho_0^2 dxdy$$

在小园$k(r)$内，含有格林函数$u(z)$的等位綫$u(z)=log\frac{1}{r}+k+0(r)$，$(r\to 0)$，

由上式便得

$$\frac{2\pi}{\lambda\{\gamma\}_r} \leqslant \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{g(r)} \rho_0^2\, dxdy = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{g(r)} dudv \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{\log\frac{1}{r}+k+0(r)} \int\limits_{u=c} dvdu$$

这里的$v(z)$是$u(z)$的一个共軛調和函数。

$$\text{但}\quad \int\limits_{u=c} dv = \left|\int\limits_{u=c}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds\right| = \left|\int\limits_{C(r)}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds\right| = 2\pi$$

最后，$\dfrac{2\pi}{\lambda\{\gamma\}_r} \leqslant \log\dfrac{1}{r}+k+0(r)$，$(r\to 0)$

$$\text{再由(3)},\ R(0,\widetilde{G}) = \lim_{r\to 0} r\,exp\left\{\frac{2\pi}{\lambda\{\gamma\}_r}\right\} \leqslant \lim_{r\to 0} r\,exp\left\{\log\frac{1}{r}+k+0(r)\right\} = e^k \qquad (6)$$

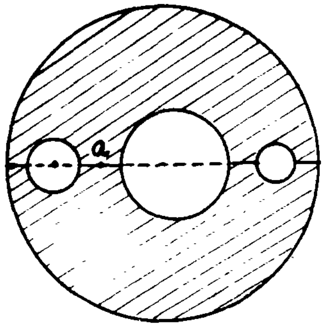
e^k是g关于原点的"容量"的倒数，在数值上等于g关于原点的映照半径$R(0,g)$。〔注〕

$\therefore\quad R(0,\widetilde{G}) \leqslant R(0,g)$

因而g是极值区域。 証完。

用完全类似于定理一証明的方法，可以推广到比較一般的情形：

定理二 設n連域G关于某內点a有如下的性质：从G中除去n-1段割綫$l_1\cdots l_{n-1}$后得G內的单連域g，$l_\nu(\nu=1,\cdots,n-1)$都落在从a发出的射綫上，且g关于l_ν是对称的，l_ν的一端落在G的边界上，另一端落在G的另一边界上或伸向无穷远。这时，G关于a的拉甫倫捷夫問題的极値区域为除去上述割綫后的单連区域g，



定理二的推論1 本文开始所提到的$n=2$时的拉甫倫捷夫定理成立。

定理二的推論2 如果G为园界域，每一园的中心都在实軸上，$a\epsilon G$为实軸上一点，則上述拉甫倫捷夫問題的极値区域g是由G除去实軸上两条射綫上的点而

〔注〕 这点可簡証如下：設$\varphi(z)$是g关于原点的黎曼映照函数，映g为单位圓，且$\varphi(0)=0$；則格林函数$u(z)=\log\dfrac{1}{|\varphi(z)|}$；按映照半径的定义，$R(0,g)=\dfrac{1}{|\varphi'(0)|}=\lim\limits_{|z|\to 0}\dfrac{|z|}{|\varphi(z)|}=\lim\limits_{|z|\to 0}|z|\,e^{u(z)}=e^k$。

成，两射綫都由距 a 最近的边界点起通向无穷远。

此外，我們还可以举出許多能应用定理二的例子，这里不再叙述了。

参考文献

〔1〕 James. A. Jankins : Univalent Functions and Conformal mapping chapter 2

〔2〕 許永华"多連域上的拉扶連捷夫"問題——1956年复旦学报第1期

A class of M.A.Lavrentiev's Problem on multiply-connetcd domains

Shü Wei-shuen

Abstract

Let G be a domain of finite connectivity, $\widetilde{G}$ be a simply-connected domain contained in G, Let $R'(a\ \widetilde{G})$ denote the conformal radius of $\widetilde{G}$ with respect to the point $a \in \widetilde{G}$.

What will be the domain of $\widetilde{G}$ when $R(a\ \widetilde{G})$ attains its Maximal value? M. A. Lavrentiev has solved this problem by the variational when methad the domain G is of double-connectivity.

In this paper the method of extremal lengths is used to solve this problem in a more general case, thus the result obtained by Lavrentiev is contained in ours which are stated in theorems Ⅰ.and Ⅱ.