关于非綫性微分方程組的周期解的某些問題

王 寿 松

（数学力学系研究生）

摘　要

本文借助于在运动稳定性理論中广泛采用的V函数方法[1]，較系統地討論了关于非綫性（非駐定）微分方程組的周期解之存在性和稳定性以及其局部的和非局部的問題。文中所得的結果是工作[4-9]的推广和发展。

前　言

本文借助于在运动稳定性理論中广泛采用的V-函数方法[1]，較系統地研究了非綫性（非駐定）微分方程組的周期解之存在性和稳定性以及其局部的和非局部的問題。S. Lefschetz[4]（参閱〔3〕Гл. XI. §8）曾利用二次型函数V和Brouwer不动点定理[2]証明了某个二阶非綫性振动方程存在周期解，以后在工作[5-10]中直接推广〔4〕的方法討論了某些类型的非綫性微分方程的周期解之存在問題。而本文所得的結果便是这些工作的推广和发展，其中也包含了其他一些工作（例如〔16，11〕中用不同方法所得到的某些相似結果。

§1　周期解的存在定理

考慮非綫性微分方程組

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1.1}$$

本文于1965年7月5日收到。

其中$x \in E^n$，$f(t,x)$是在$I \times E^n$上的n維連續向量函数，且对t有周期$\omega > 0$：$f(t+\omega,x) \equiv f(t,x)$。假設組(1.1)满足解在$(-\infty, +\infty)$上的存在、唯一性条件，且保証在包含坐标原点$x=0$的任意有限区域$R \subset E^n$內沒有静止点。

設$x(t)=x(t;\ x^{(0)},t_0)$表示組(1.1)的解，滿足$x(t_0)=x^{(0)}$，如果$T(\tau)$表示如下变换：$(\tau>0)$

$$T(\tau)x^{(0)}=x(t_0+\tau;\ x^{(0)},t_0) \tag{1.2}$$

則$T(\tau)$为一个把E^n变为自己的拓扑映象[4,11]．令$T \equiv T(\omega)$．

我們知道[4,11]，变换T的不动点就是对应着(1.1)的ω-周期解的初始点。一般地，如果有某个点$\overline{x}^{(0)} \in E^n$使得$T^k\overline{x}^{(0)}=\overline{x}^{(0)}$，其中正整数$k \geq 1$，而当$k>1$时$T^l\overline{x}^{(0)} \neq \overline{x}^{(0)}\ (1 \leq l < k)$，則由初始条件$\overline{x}(t_0)=\overline{x}^{(0)}$所确定的解$\overline{x}(t)=x(t;\ \overline{x}^{(0)},t_0)$就是$k\omega$-周期解（即$\overline{x}(t)$有周期$k\omega$）。因此我們依据变换$T$利用 Brouwer 不动点定理[2]可以建立周期解的存在定理（今后所应用的有关定正函数的某些定义取自书〔1〕中第八章）。

定理1.1 如果对組（1.1）可以求得連續可微函数$V(t,x)$：

i) $W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x)$，其中$W_1(x), W_2(x)$为无旁大定正函数；

ii) 对一切$t \geq t_0$和$r_0 \leq \|x\| < \overline{r}$成立不等权：$\left(\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \underset{x}{grad}\, V \cdot f(t,x) \leq -W_3(x)$$

其中$W_3(x)$为定正函数，r_0和$\overline{r}$是适当給定的正常数，$t_0 \in I$．

則組（1.1）必存在周期解。

証明 假設給定$\gamma_0>0$，令

$$C_0 = \sup_{\|x\| \leq r_0} W_2(x) \tag{1.3}$$

对$C_0>0$求得$r_1>r_0$，使当$\|x\| \geq r_1$时有$W_1(x)>C_0$．同理假設

$$C_1 = \sup_{\|x\| \leq r_1} W_2(x) \tag{1.4}$$

对$C_1>C_0$求得$r_2>r_1$使当$\|x\| \geq r_2$时有$W_1(x)>C_1$．

此时在定理的条件 ii) 中选取$\overline{r}=r_2$便足够了。

1° 証明：凡初始值满足$r_0 \leq \|x^{(0)}\| \leq r_1$的組(1.1)的解$x(t)=x(t;\ x^{(0)},t)$对一切$t \geq t_0$有$\|x(t)\| < r_2$．

事实上，只須証明沿着解$x(t)$当$t \geq t_0$时有$V(t,x(t)) \leq C_1$．假若不然，存在一个$\overline{t}>t_0$使得$V(\overline{t},x(\overline{t}))=C_1$，而对某个充分接近$\overline{t}$的$t'>\overline{t}$，当$\overline{t}<t \leq t'$时有$V(t,x(t))>C_1$．但另一方面由（1.4）当$\overline{t}<t \leq t'$时有$\|x\|>r_1$，由解

的連續性及选取 t' 充分接近于 $\bar{t}$ 使当 $\bar{t} \leqslant t \leqslant t'$ 时仍有 $r_1 \leqslant \|x\| < \bar{r}$，此时由条件 ii) 对一切 $\bar{t} < t \leqslant t'$ 都有 $V(t,x(t)) < V(\bar{t},x(\bar{t})) = C_1$，这便发生了矛盾。

$2°$ 証明：对 $1°$ 中 $x(t)$ 必有一个时刻 $t_1 > t_0$ 使 $\|x(t_1)\| < r_0$.

假若不然，对一切 $t \geqslant t_0$ 都有 $\|x(t)\| \geqslant r_0$，此时由 $1°$ 所証对一切 $t \geqslant t_0$ 亦有 $r_0 \leqslant \|x(t)\| < \bar{r}$. 假設 $l = \inf\limits_{r_0 \leqslant \|x\| \leqslant r_2} W_3(x)$. 則由 ii) 得到：

$$V(t,x(t)) \leqslant V(t_0,x^{(0)}) - l(t-t_0), \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.4}$$

但这是不可能的，因为当 t 足够大时，例如当 $t > t_0 + C_1/l$ 时 (1.4) 便与 V 是定正函数相矛盾。

$3°$ 証明：若有 $\|x(t_1)\| < r_0$，則对一切 $t \geqslant t_1$ 都有 $\|x(t)\| < r_1$.

事实上，利用类似 $1°$ 的証明及其結果可証得之。

$4°$ 引进記号 $R_i \equiv \left\{ x \,\middle|\, \|x\| < r_i \right\} (i = 0,1,2)$, $R^* \equiv \left\{ x \,\middle|\, \|x\| < \bar{r} \right\}$, 并以

$\bar{R}_i$ 和 $\bar{R}^*$ 分别表示 R_i 和 R^* 的閉包。

由上面所証，对任一 $x^{(0)} \in \bar{R}_1$ 都有一个 $t_1 \geqslant t_0$ 使 $x(t_1) \in R_0$，且对一切 $t \geqslant t_1$ 有 $x(t) \in R_1$. 令 $\tau = t_1 - t_0$，則当 $t \geqslant \tau$ 时 $x(t_0 + t) \in R_1$.

現在考慮由某个初始 $x^{(0)} \in \bar{R}_1$ 出发的解 $x(t) = x(t; x^{(0)}, t_0)$，据上述有 $\tau \geqslant 0$ 使 $T(\tau)x^{(0)} \in R_0$，由变换 $T(\tau)$ 的連續性，存在 $x(t_0+\tau)$ 的邻域 $F_1 \subset R_0$，若令 $T^{-1}(\tau)F_1 = F$，$F \cap \bar{R}_1 = G$，則由 $2°$ 所証有 $T(\tau)G \subset R_0$，又由 $3°$ 对一切 $t \geqslant \tau$ 有 $T(t)G \subset R_1$. 假設 $n(G)$ 表示滿足 $n\omega \geqslant \tau$ 的最小正整数 n，則对一切正整数 $\nu \geqslant n(G)$ 有

$$T^{\nu} G \subset R_1 \tag{1.5}$$

如果对每个点 $x^{(0)} \in \bar{R}_1$ (此时 t_0 固定)，都同理建立如此的邻域 G，則得到复盖住 $\bar{R}_1$ 的邻域組 $\{G\}$，因为 $\bar{R}_1$ 是有界緊致集，則存在有限个邻域 $\{G_1, \cdots, G_m\}$ 复盖住 $\bar{R}_1$，假設 $N = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ n(G_i) \right\}$，类似(1.5)对一切 $\nu \geqslant N$ 有 $T^{\nu} G_i \subset R_1$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 因而对一切 $\nu \geqslant N$ 有

$$T^{\nu} \bar{R}_1 \subset \bar{R}_1$$

此时根据 Brouwer 不动点定理[2]，变换 T^{ν} 至少有一个不动点，因此組(1.1)存在周期解，其周期等于 $\nu\omega (\nu \geqslant N)$. 証毕.

我們可看出，組(1.1)当滿足定理1.1的条件时可有无穷多个周期解，它們的周期都为 ω 的整倍数；如果它沒有 $\omega-$ 周期解 $(N \geqslant 2)$，則对每个質数 $q \geqslant N$，組(1.1)都存在最小周期等于 $q\omega$ 的周期解。然而，組(1.1)是否存 $\omega-$ 周期解呢？对于二維

系統，我們卽可肯定（参閱〔3〕Гл.Ⅺ § 5）在定理1.1的条件下組（1.1）必有ω－周期解．但对于更高維($n\geqslant 3$)的系統却不能立卽下此論断了[13]．因此为保証对一般的高維系統存在ω－周期解——寻求与組(1.1)的右端有相同周期的周期解（称为調和解）对物理問題的应用是特别重要的[6,11]——必須对定理1.1中的函数$V(t,x)$加以一些补充条件．

定义．定正函数$V(t,x)$称为具有凸性的，如果对任意給定的有限数t_0和C_0（$0\leqslant t_0<+\infty$，$0<C_0<+\infty$），集合$\Omega_{t_0}\equiv\{x|V(t_0,x)\leqslant C_0\}$是一个有界的凸的閉$n$維胞腔（胞腔定义见[3]）．

引理．如果无穷大定正函数$V(t,x)$具有凸性，則对任意給定的有限正数τ和C_0，集合$\Omega\equiv\{x|V(t,x)\leqslant C_0,\ 0\leqslant t\leqslant\tau\}$是一个有界的閉$n$維胞腔（但不一定是凸的）．

証明．显然Ω是閉的，因为$\Omega=\bigcup\limits_{0\leqslant t\leqslant\tau}\Omega_t$，而对每个$t$，$\Omega_t$都是包含有原点$x=0$的凸单連通集，因此$\Omega$也是包含原点$x=0$在自己內部的单連通集（一般不是凸的），由于从$x=0$出发的每一条半射綫与每个$\Omega_t$的边界交于一点，因而与$\Omega$的边界也只交于一点，故$\Omega$的边界为簡单的閉曲面，卽$\Omega$为閉的$n$維胞腔．証毕．

定理1.2 对于方程組（1.1），如果存在連續可微函数$V(t,x)$除滿足定理1.1的条件i) ii)之外，更且

iii) $V(t,x)$对t有周期ω：$V(t+\omega,x)\equiv V(t,x)$．

iV) $V(t,x)$具有凸性．

則組(1.1)至少有一个ω－周期解．

証明．依定理1.1的証明，假設$C_0=\sup\limits_{\|x\|\leqslant r_0}W_2(x)$．令

$$\Omega\equiv\{x|V(t,x)\leqslant C_0,\ 0\leqslant t\leqslant\omega\}$$

則由定理1.1及引理知集合Ω是有界的閉n維胞腔，且

$$\overline{R_0}\subset\Omega\subset\overline{R_1}\tag{1.6}$$

我們証明：凡有初始値$x^{(0)}\in\Omega$的解$x(t)=x(t;x^{(0)},t_0)$对一切$t\geqslant t_0$都有$x(t)\in\Omega$．假若不然，卽有一时刻$t_1\geqslant t_0$使当$t_0\leqslant t\leqslant t_1$时$x(t)\in\Omega$，而对某个$t'>t_1$当$t_1<t\leqslant t'$时$x(t)\bar{\in}\Omega$，則由(1.6)当$t_1<t\leqslant t'$时$\|x(t)\|>r_0$；但另一方面根据解的連續性及定理1.1中1°之証明，当$t_1\leqslant t\leqslant t'$时必有$r_0\leqslant\|x(t)\|<r_2$，則由条件ii)得

$$V(t',x(t'))<V(t_1,x(t_1))\tag{1.7}$$

如果$t_1=k_1\omega+\theta_1$，$t'=k'\omega+\theta'$，其中k_1，k'是正整数，而$0\leqslant\theta_1,\theta'<\omega$，則由iii）有$V(t_1,x(t_1))\equiv V(\theta_1,x(t_1))$，$V(t',x(t'))\equiv V(\theta',x(t'))$，因$x(t_1)\in\Omega$故

$V(\theta_1, x(t_1))\leqslant C_0$，由(1.7)得 $V(\theta', x(t'))<C_0$，即 $x(t')\in\Omega$，这与归謬假設相矛盾，故对一切 $t\geqslant t_0$ 有 $x(t)\in\Omega$，即对一切 $\tau>0$ 均有 $T(\tau)\Omega\subset\Omega$．特别是 $T\Omega\subset\Omega$．則依据 Brouwer 不动点定理[2]，T 至少有一个不动点，即組(1.1)至少有一个 ω－周期解．

推論．对于組(1.1)，如果存在不显含 t 的連續可微函数 $V(x)$，它滿足如下条件：

i) $V(x)$ 是无穷大定正函数；

ii) 对一切 $t\geqslant t_0, r_0\leqslant\|x\|\leqslant\bar{r}$ 有 $\underset{x}{grad}V(x)\cdot f(t,x)\leqslant -l<0$；

iii) 对某个正数 C_1 使集合 $\Omega\equiv\{x\mid V(x)\leqslant C_1\}$ 为閉 n 維胞腔；

則組(1.1)必存在 ω-周期解。

証明．考虑具有初始值 $x^{(0)}\in\bar{R}_0$ 的解 $x(t)=x(t; x^{(0)}, t_0)$，存在 $r_1>r_0$ 使得 $\|x(t_0+\omega)\|\leqslant r_1$．設 $C_1=\underset{\|x\|\leqslant r_1}{Sup}V(x)$．則有 $r_2>r_1$ 使当 $\|x\|\geqslant r_2$ 时 $V(x)>C_1$．此时在 ii) 中可取 $\bar{r}=r_2$．由于 $\bar{R}_1\subset\Omega\subset\bar{R}_2$，若 $x^{(0)}\in\bar{R}_0$，則 $x(t_0+\omega)\in\Omega$；若 $x^{(0)}\in\Omega\diagdown\bar{R}_0$，則沿着解 $x(t)$，由 ii) $V(x(t_0+\omega))<V(x^{(0)})\leqslant C_1$，即 $x(t_0+\omega)\in\Omega$．故 $T\Omega\subset\Omega$．証毕．

定理1.3　对組(1.1)，如果存在連續可微函数 $V(t,x)$：

i) $C_1\|x\|^m\leqslant V(t,x)\leqslant C_2\|x\|^m$，其中正常数 $C_1\leqslant C_2$，$m\geqslant 1$；

ii) 当 $t\geqslant t_0$，$r_0\leqslant\|x\|<\bar{r}$ 时有 $\dfrac{\partial V}{\partial t}+\underset{x}{grad}V(t,x)\cdot f(t,x)\leqslant -C_3\|x\|^m$，

其中 $C_3>0$，$\bar{r}=\sigma^2\left(\dfrac{C_2}{C_1}\right)^{2/m}\cdot r_0$ ($r_0>0$，$\sigma>1$ 为某个常数)．

則組(1.1)存在周期解．更且有类似定理1.2的結果

証略．此定理实質上是定理1.1及1.2的特殊情形．

定理1.4　如果对組(1.1)可以求得連續可微函数 $V(t,x)$：

i) $W_1(x)\leqslant V(t,x)\leqslant W_2(x)$，其中 $W_1(x)$，$W_1(x)$ 为无穷大定正函数；

ii) 对一切 $t\geqslant t_0$ 和 $C_0\leqslant V\leqslant\bar{C}$ 成立不等式：

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\underset{x}{grad}V(t,x)\cdot f(t,x)\leqslant\theta(t,V)\qquad(1.8)$$

其中 $C_0, \bar{C}$ 是适当选取的常数 $(0<C_0<\bar{C})$，而 $\theta(t,u)$ 是在 $\{t_0\leqslant t<+\infty, C_0\leqslant u<\infty\}$ 上的連續函数，且 $\theta(t,C_0)<0$，同时方程

$$\frac{du}{dt}=\theta(t,u)\qquad(1.9)$$

滿足初值条件 $C_0<U(t_0)=V_0\leqslant\bar{C}$ 的上解 $U(t)=U(t,V_0)$ 必有时刻 $t_1=t_1(V_0)>t_0$ 使 $U(t_1,V_0)=C_0$。

則組(1.1)必存在周期解，更且有类似定理1.2的結果。

証明. 对$C_0>0$求得$r_1>0$使当$\|x\|\geqslant r_1$时$W_1(x)>C_0$。假設$C_1=\sup\limits_{\|x\|\leqslant r_1} W_2(x)$，此时在条件ii)中即可选取$\overline{C}=C_1$。

首先考虑組(1.1)具有初值$x^{(0)}:V(t_0,x^{(0)})\leqslant C_0$的解$x(t)$，則由关系式$\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{V=C_0}<0$即知对一切$t>t_0$有$V(t,x(t))>C_0$，因而对一切$t>t_0$有$\|x(t)\|<r_1$

如果$\|x^{(0)}\|=r_1$，即$C_0<V(t_0,x^{(0)})\equiv V_0\leqslant C_1$，則根据条件ii)，利用比較定理[14,15]可知，沿着具有初值$\|x^{(0)}\|=r_1$的解$x(t)$有$V(t)\equiv V(t,x(t))\leqslant U(t)$，且必有一个$t_1>t_0$使$V(t_1)\leqslant C_0$，又由上述对一切$t>t_1$有$V(t,x(t))<C_0$，即$\|x(t)\|<r_1$。

因此凡初值滿足$\|x^{(0)}\|\leqslant r_1$（固定t_0）的解$x(t)=x(t;x^{(0)},t_0)$都有一个时刻$t_1=t_1(x^{(0)})\geqslant t_0$使当$t\geqslant t_1$时有$\|x(t)\|<r_1$。

以后用定理1.1之4°的同样証明，即知組(1.1)存在周期解。再由定理1.2可保証組(1.1)存在ω-周期解。証毕。

〔注〕根据本节所建立的基本定理可以引导出一系列判别組(1.1)存在周期解的充分条件。因篇幅所限，从略。

§2 周期解的稳定性定理

在这节我們于§1的基础上討論ω-周期解的稳定性，并順便解决了ω-周期解的唯一性問題。

定义. 組(1.1)的ω-周期解$\overline{x}(t)=x(t;\overline{x}^{(0)},t_0)$称为在区域$D\subset E^n$內漸近稳定的，如果它在Ляпунов意义下稳定的，且对于組(1.1)的具有初始値$x^{(0)}\in D$的解$x(t)=x(t;x^{(0)},t_0)$有：

$$\lim_{t\to+\infty}\|x(t)-\overline{x}(t)\|=0\text{。}$$

定理2.1 对于組(1.1)滿足§1定理1.2(或1.3，1.4)的全部条件，且存在一个連續函数$V_1(t,x,y)$：

a) $V_1(t+\omega,x,y)\equiv V_1(t,x,y)$，对一切$t\in I$和$x,y\in\Omega$；

b) $V_1(t,x,y)\geqslant 0$对一切$t\in I$和$x,y\in\Omega$，而$V_1(t,x,y)\equiv 0$当且只当$x=y$时；

c) 沿着組(1.1)具有初値$x^{(0)},y^{(0)}\in\Omega$的任意两个解$x(t)=x(t;x^{(0)},t_0)$，$y(t)=y(t;y^{(0)},t_0)$成立不等式：

$$V_1(t+\omega)\leqslant V_1(t)$$

其中$V_1(t)\equiv V_1(t,x(t),y(t))$，而当$V_1(t+\omega)=V_1(t)$时便有$x(t)=y(t)$。

則組(1.1)存在唯一的在区域Ω內漸近稳定的ω-周期解。

證略。可以仿照工作[12]的方法証明之。

定理2.2 对于組(1.1)滿足§1定理1.2的全部条件，且可求得連續可微函数 $V_1(t,z)$：

a) $W_1^*(z)\leqslant V_1(t,z)\leqslant W_2^*(z)$，其中$W_1^*(z)$，$W_2^*(z)$是定正函数；

b) 对一切$t\in I$和任意两点$x,y\in D$（这里$\Omega\subset D\subset E^n$）有：

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}+grad V_1(t,x-y)\cdot[f(t,x)-f(t,y)]\leqslant\varphi(t,V_1(t,x-y))$$

其中$\varphi(t,u)$是$t\in I$和$u\geqslant 0$的連續函数，$\varphi(t,0)\equiv 0$且使微分方程 $\frac{du}{dt}=\varphi(t,u)$的零解 $u=0$ 在 Ляпунов 意义下稳定的，而对具有初值$u_0=V_1(t_0,x^{(0)}-y^{(0)})>0$（$x^{(0)}\neq y^{(0)},x^{(0)}\in D,y^{(0)}\in D$）的上解$U(t)=U(t,u_0)\to 0$（$t\to+\infty$）。

則組(1.1)的ω-周期解在D內漸近稳定的。

証明. 由§1定理1.2所証，組(1.1)在Ω內至少有一个ω-周期解，假設这个解为$\bar{x}(t)=x(t,\bar{x}^{(0)},t_0)$，其次設$x(t)=x(t,x^{(0)},t_0)$是組(1.1)的滿足初值条件$x^{(0)}\in D$的任意解。

令 $z(t)=x(t)-\bar{x}(t)$，則根据(1.1)，$z(t)$滿足方程

$$\frac{dz}{dt}=f(t,z+\bar{x}(t))-f(t,\bar{x}(t))\equiv f_1(t,z) \tag{2.1}$$

由b)，沿着(2.1)的解$z=z(t)$，函数$V_1(t)\equiv V_1(t,z(t))$滿足不等式：

$$V_1(t)\leqslant U(t),\quad (t\geqslant t_0) \tag{2.2}$$

任給$\varepsilon>0$，假設对$x,y\in D$，$\eta=\inf\limits_{\|x-y\|\geqslant\varepsilon}W_1^*(x-y)$，由b)，对$\eta>0$求得$\delta_1>0$使当$u_0\leqslant\delta_1$时对一切$t\geqslant t_0$有$U(t)<\eta$，且存在$\delta>0$使当$\|z\|\leqslant\delta$时$W_2^*(z)<\delta_1$。

若选取$x^{(0)}\in D$使$\|x^{(0)}-\bar{x}^{(0)}\|\leqslant\delta$，因而有$V_1(t_0,x^{(0)}-\bar{x}^{(0)})<\delta_1$，則沿着(2.1)具有初值$z(t_0)=x^{(0)}-\bar{x}^{(0)}$的解$z(t)=x(t)-\bar{x}(t)$，由(2.2)对一切$t\geqslant t_0$有$W_1^*(z(t))\leqslant V_1(t)<\eta$，卽$\|z(t)\|<\varepsilon$，故$\bar{x}(t)$为Ляпунов稳定的，

其次，对任意$x^{(0)}\in D$使$V_1(t_0,x^{(0)}-\bar{x}^{(0)})>0$，由b)及(2.2)沿着$z(t)$有$\lim\limits_{t\to+\infty}V_1(t,z(t))=0$，卽$\lim\limits_{t\to+\infty}\|z(t)\|=0$。因此$\bar{x}(t)$在$D$內漸近稳定。証毕。

定理2.3 假設§1定理1.3的一切条件成立，且如果函数$V(t,x)$滿足如下不等式：($z=x-y$)

$$\frac{\partial V(t,x-y)}{\partial t}+\underset{z}{grad}\,V(t,x-y)\cdot[f(t,x)-f(t,y)]\leqslant -C_4\|x-y\|^m。 \tag{2.3}$$

对一切$t\in I$，$\|x\|\leqslant\bar{r}$，$\|y\|\leqslant\bar{r}$成立，其中C_4是正常数。

则組(1.1)存在唯一的在$\bar{R}_1$內漸近稳定的ω-周期解。

証明. 假設$\bar{x}(t)=x(t;\bar{x}^{(0)},t_0)$是組(1.1)的$\omega$-周期解，$x(t)=x(t;x^{(0)},t_0)$表示具有初值$x^{(0)}\in\bar{R}_1$的任意解，則由定理1.1所証对一切$t\geqslant t_0$有$\|x(t)\|<\bar{r}$，且$\bar{x}(t)\in R_1$。

令$z(t)=x(t)-\bar{x}(t)$，并考慮定理1.3中給出的函数$V(t,z)$:

$$c_1\|z\|^m\leqslant V(t,z)\leqslant c_2\|z\|^m \tag{2.4}$$

則$z(t)$适合方程(2.1)，且由不等式(2.3)和(2.4)即得

$$\frac{dV(t,z(t))}{dt}\leqslant -\frac{c_4}{c_2}V(t,z(t)) \tag{2,5}$$

根据比較定理[14,15]，对$V(t_0,z^{(0)})>0$，$z^{(0)}=x^{(0)}-\bar{x}^{(0)}$，由(2.5)(2.4)得

$$V(t,z(t))\leqslant V(t_0,z^{(0)})exp\left[-\frac{c_4}{c_2}(t-t_0)\right]\qquad(t\geqslant t_0)$$

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|\leqslant\|x^{(0)}-\bar{x}^{(0)}\|\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1/m}\cdot exp\left[-\frac{c_4}{mc_2}(t-t_0)\right]\qquad(t\geqslant t_0)$$

这說明$\bar{x}(t)$在区域$\bar{R}_1$內漸近稳定的。

其次由不等式(2.5)有

$$\frac{d}{dt}\left\{V(t,z(t))exp\left[\frac{c_4}{c_2}(t-t_0)\right]\right\}\leqslant 0$$

因此当$t\leqslant t_0$时有$V(t,z(t))\geqslant V(t_0z^{(0)})\cdot exp\left[-\frac{c_4}{c_2}(t-t_0)\right]$，又由(2.4)得

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|\geqslant\|x^{(0)}-\bar{x}^{(0)}\|\cdot\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/m}exp\left[-\frac{c_4}{mc_2}(t-t_0)\right]\ (t\leqslant t_0)$$

故当$t\to-\infty$时$\|x(t)-\bar{x}(t)\|\to+\infty$。这說明不同于$\bar{x}(t)$的具有初值$x^{(0)}\in\bar{R}_1$的任何解$x(t)$（当$t\to-\infty$时）都是无界的，即$x(t)$不是周期解，因此$\omega$-周期解$\bar{x}(t)$是唯一的。証毕。

§3 局部性問題

所謂局部性問題，是指在坐标原点$x=0$（相对于某个給定的周期运动）的小邻域內討論在很小的經常作用的周期扰动下周期运动的存在及稳定性等問題。

首先我們考慮含小参数的微分方程組

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+p(t,x)+q(t,x,\mu) \tag{3.1}$$

其中x,f,p,q都是n維向量，$\mu>0$是小參数，假設当$\|x\|\leqslant h, t\in I$，$0<\mu\leqslant\bar{\mu}$(h, $\bar{\mu}$是某些正常数)时滿足如下条件：

1）f, p, q是其所含变元的連續向量函数，对t有周期$\omega>0$；

2）对任意x', $x''\in D_h$（其中$D_h\equiv\{x \mid \|x\|\leqslant h\}$）有：

$$\|p(t,x')-p(t,x'')\|=O(\|x'\|+\|x''\|)\cdot\|x'-x''\|,$$
$$\|q(t,x',\mu)-q(t,x'',\mu)\|\leqslant Q(\mu)\|x'-x''\|$$

其中$Q(\mu)\to0$　当$\mu\to0$时，其次$q(t,x,0)\equiv0$，而$p(t,0)=0$，$q(t,0,\mu)\neq0$；

3）保証(3.1)的解在$(-\infty,+\infty)$上之存在唯一性，

定理3.1　如果組(3.1)滿足上述假設1)—3)，且对方程組

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{3.2}$$

存在連續可微函数$V(t,x)$滿足如下条件：

i) $c_1\|x\|^m\leqslant V(t,x)\leqslant c_2\|x\|^m$，对$x\in D_h, t\in I$，其中常数$c_2\geqslant c_1>0$，$m\geqslant1$。

ii) 对一切$x\in D_h$和$t\in I$有$\dfrac{\partial V}{\partial t}+\underset{x}{grad}\,V(t,x)\cdot f(t,x)\leqslant-c_3\|x\|^m$，

而且$\|\underset{x}{grad}\,V(t,x)\|\leqslant c_4\|x\|^{m-1}$，其中常数$c_3>0, c_4>0$。

iii) $V(t+\omega,x)\equiv V(t,x)$，对一切$x\in D_h$，$t\in I$；

iv) $V(t,x)$对于$x\in D_h$具有凸性。

V) 对任意$x',x''\in D_h$和$t\in I$成立不等式：($z=x'-x''$)

$$\frac{\partial V(t,x'-x'')}{\partial t}+\underset{z}{grad}\,V(t,x'-x'')\cdot[f(t,x')-f(t,x'')]\leqslant-c_3\|x'-x''\|$$

則存在充分小的$\mu_0>0$，使对每个$\mu\in(0,\mu_0]$，組(3.1)在D_h內有唯一的在Ляпувон意义下漸近稳定的ω-周期解。

証明　假設 $\phi(\mu)=\underset{\substack{0\leqslant t\leqslant\omega\\ \|x\|\leqslant h}}{Sup}\{\|q(t,x,\mu)\|\}$，显然$\phi(\mu)$是$\mu\in(0,\bar{\mu})$的連續函数，且$\phi(0)\equiv0$。

根据假設条件2)，对常数$\dfrac{c_3}{2c_4}>0$，可求得正数$\bar{r}\leqslant\dfrac{h}{2}$，使得对任意$x',x''\in\bar{R}^*$（其中$\bar{R}^*\equiv\{x\mid\|x\|\leqslant\bar{r}\}$）和$t\in I$有

$$\|p(t,x')-p(t,x'')\|\leqslant\frac{c_3}{2c_4}\|x'-x''\| \tag{3.3}$$

則由ii)及(3.3)将函数$V(t,x)$通过組(3.1)对t求全导数：

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\underset{x}{grad}\,V\cdot(f+p+q)\leqslant-\frac{c_3}{2}\|x\|^m+c_4\phi(\mu)\|x\|^{m-1} \tag{3.4}$$

当$\|x\|\leqslant\bar{r}$，$t\in I$时成立，选取充分小的$\mu_1<\bar{\mu}$使当$0<\mu\leqslant\mu_1$时

$$\phi(\mu)\leqslant\frac{c_3}{4\sigma^2c_4}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{2/m}\cdot\bar{r} \tag{3.5}$$

其中$\sigma>1$是任意常数，如果設$r_0=\frac{\bar{r}}{\sigma^2}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{2/m}$，則由(3.5)得$r_0\geqslant\frac{4c_4}{c_3}\phi(\mu)$，因而由(3.4)知当$r_0\leqslant\|x\|\leqslant\bar{r}$时有

$$\frac{dV}{dt}\leqslant-\frac{c_3}{4}\|x\|^m$$

此时由§1定理1.3卽知当$0<\mu\leqslant\mu_1$时組(3.1)必存在周期解。更且iii)，iV)滿足时，对每个$\mu\in(0,\mu_1]$組(3.1)至少有一个ω-周期解。

假設$\bar{x}(t,\mu)$是对应于$\mu\in(0,\mu_1]$的某个ω-周期解，而$x(t,\mu)$是对应于这个μ的任意解，其初值$x^{(0)}\in\bar{R}_1$（其中$\bar{R}_1\equiv\{x\mid\|x\|\leqslant r_1\}$，$r_1=\frac{\bar{r}}{\sigma}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/m}$参閱§1定理1.3)。則$z(t,\mu)=x(t,\mu)-\bar{x}(t,\mu)$滿足方程

$$\frac{dz}{dt}=f_1(t,z)+p_1(t,z)+q_1(t;z,\mu) \tag{3.6}$$

其中$f_1(t,z)\equiv f(t,z+\bar{x}(t,\mu))-f(t,\bar{x}(t,\mu))$，$p_1(t,z)\equiv p(t,z+\bar{x}(t,\mu))-p(t,\bar{x}(t,\mu))$，$q_1(t,z,\mu)\equiv q(t,z+\bar{x}(t,\mu),\mu)-q(t,\bar{x}(t,\mu),\mu)$。

根据§1定理1.1的类似証明可知：对一切$t\geqslant t_0$，$x(t,\mu)\in R^*$，而且$\bar{x}(t,\mu)\in R_1\subset R^*$則由假設条件2)及(3.3)对一切$t\geqslant t_0$有

$$\|p_1(t,z(t,\mu))\|\leqslant\frac{c_3}{2c_4}\|z(t,\mu)\|,\quad \|q_1(t,z(t,\mu),\mu)\|\leqslant Q(\mu)\|z(t,\mu)\| \tag{3.7}$$

因为$\|z(t,\mu)\|\leqslant\bar{r}+r_1<h$，由定理的条件及(3.7)卽得：

$$\frac{dV(t,z(t,\mu))}{dt}\leqslant\left(-\frac{c_3}{2}+c_4Q(\mu)\right)\|z(t,\mu)\|^m$$

如果选取正数$\mu_0\leqslant\mu_1$使当$0<\mu\leqslant\mu_0$时$Q(\mu)\leqslant\frac{c_3}{4c_4}$，則对$t\geqslant t_0$有：

$$\frac{dV(t,z(t,\mu))}{dt}\leqslant-\frac{c_3}{4c_2}V(t,z(t,\mu))$$

此时再根据类似§2定理2.3的証明，卽知ω-周期解$\bar{x}(t,\mu)$是在$\bar{R}_1$內漸近稳定的，且这样的解对每个$\mu\in(0,\mu_0]$是唯一的。証毕。

〔注〕 工作[7,8,10]的結果可作为本定理的特殊情况。其次在本定理中所得到的ω-周期解$\bar{x}(t,\mu)$显然有如下性質：当$\mu\to 0$时$\bar{x}(t,\mu)\to 0$。

下面我們利用§1，§2的結果来討論E. A. Барбашин 在工作[16]中所指出的不含小参数的微分方程之局部性問題。

考虑如下形式的非綫性微分方程組：

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+\varphi(t) \tag{3.8}$$

其中$x\in E^n$，f和φ是n維向量函数，对t有周期$\omega>0$。我們要討論的問題是：假設$f(t,x)$是給定的，而寻求怎样的函数$\varphi(t)$，使得方程(3.8)在已給的周期运动Γ：$x=\psi(t)$的某个邻域內存在漸近稳定的ω-周期解（这里$\psi(t)$的周期亦为ω，但它一般不是組(3.8)的周期解）。

假設$\psi(t)$是連續的且分段可微的。引进变换$x\to x+\psi(t)$把方程組(3.8)化为

$$\frac{dx}{dt}=f_1(t,x)+\gamma(t) \tag{3.9}$$

其中$f_1(t,x)\equiv f(t,x+\psi(t))-f(t,\psi(t))$，$\gamma(t)\equiv\varphi(t)-\psi'(t)+f(t,\psi(t))$。若按某个法則从$f_1(t,x)$中分出其綫性部分，則組(3.9)有如下形式：

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x+g(t,x)+\gamma(t) \tag{3.10}$$

假設当$\|x\|\leqslant h$，$-\infty<t<+\infty$（h是某个正常数）时滿足条件：

1)矩陣$P(t)$的元素和向量$g(t,x)$，$\gamma(t)$的分量是t的ω-周期函数，且保証解在$(-\infty,+\infty)$上存在唯一的。

2) $\|g(t,x)-g(t,y)\|\leqslant L\|x-y\|$，其中$\|x\|\leqslant h$，$\|y\|\leqslant h$，$L$为某个正数。

3)綫性組 $\frac{dx}{dt}=P(t)x$ 的基本解矩陣 $X(t,t_0)$ 滿足关系式：

$$\|X(t,t_0)\|\leqslant\beta e^{-\alpha(t-t_0)}$$

而$X(t_0,t_0)=E$，其中E为单位矩陣，β,α是与t_0无关的正数。

則根据书[18] §73和§75的定理，存在两个定正二次型$V(t,x)$，$U(t,x)$，它們的系数是t的ω-周期函数，且成立等式：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\operatorname*{grad}_x V(t,x)\cdot P(t)x=-U(t,x) \tag{3.11}$$

我們选取正常数C_1,C_2,C_3和C_4使得$C_1\|x\|^2\leqslant V(t,x)\leqslant C_2\|x\|^2$，$\|\operatorname*{grad}_x V(t,x)\|\leqslant C_3\|x\|$和$U(t,x)\geqslant C_4\|x\|^2$。假設

$$\underset{0\leqslant t\leqslant\omega}{Sup}\|\nu(t)\|\leqslant\frac{hC_4C_1}{4\sigma^2C_3C_2}\ (\sigma>1) \tag{3.12}$$

如果令$r_0=\frac{C_1}{\sigma^2C_2}h$，且在 2)中取 $L=\frac{C_4}{2C_3}$，則由(3.11)及(3.12)得知当$r_0\leqslant\|x\|\leqslant h$时对一切$t\geqslant t_0$有

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\underset{x}{grad}V\cdot[P(t)x+g(t,x)+\gamma(t)]\leqslant-\frac{C_4}{4}\|x\|^2$$

此时由§1定理1.3即知組(3.10)存在ω-周期解，再根据§2定理2.3可以証明組(3.10)在$\overline{R}_1$(其中$r_1=\frac{h}{\sigma}\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{1/2}$，$\sigma>1$)內存在唯一的漸近稳定的$\omega$-周期解。

因而我們証明了如下結果：

定理3.2 如果組(3.10)滿足假設条件1)—3)，則当$\underset{0\leqslant t\leqslant\omega}{Sup}\|\gamma(t)\|$滿足不等式(3.12)时組(3.10)在$\overline{R}_1$內有唯一的漸近稳定的$\omega$-周期解，因而組(3.8)在已給周期运动$\Gamma$的充分小邻域內存在唯一的漸近稳定的$\omega$-周期解。

〔注〕 我們还可以适当推广E.A.Барбашин提出的問題，按照定理3.1的类似条件討論比(3.8)更一般的微分方程組在已給周期运动Γ的某个邻域內存在漸近稳定的ω-周期解。

§4 非局部性問題

所謂非局部性問題是指：在大范围的区域甚至在全个空間E^n內討論周期解的存在和稳定性等問題[11]。在这种情形，經常作用的周期扰动力一般是可以很大的。

我們考慮如下类型的微分方程組：

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+h(t,x)+e(t) \tag{4.1}$$

其中$x\in E^n$，f,h,e是n維向量函数，对t有周期$\omega>0$，假設：

1)f,h,e对一切$t\in I,x\in E^n$都有定义且連續，使(4.1)滿足解在$(-\infty,+\infty)$上的存在唯一性条件。

2)$\|h(t,x')-h(t,x'')\|\leqslant L\|x'-x''\|$，其中$x',x''\in E^n$，$L$为某个正常数。

3)$\|e(t)\|\leqslant M$对一切$t\in I$，M是正常数。

在这些假設条件下，微分方程組

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{4.2}$$

起着重要的作用，如果把它看作是相对于組(4.1)的未扰动組，則在(4.1)中的函数$h(t,x)$和$e(t)$便是描述某些經常起作用的周期干扰因素的随机函数[16]。此时可以

类似§3定理3.1作出相应的定理，由于定理的叙述和証明很相似（只不过討論的区域扩大了），故不再作細詳論述，在这方面对非局部問題的研究已有不少工作，例如〔4,5,9,11,17〕，其中在〔11〕中所提到的一些結果都可用本文的方法討論之。

值得注意的是：利用工作〔9,17〕的方法和§1，§2的基本定理，可以作出一系列的判别周期解存在及其稳定性的充分条件（包括局部的和非局部的問題），作为示范，我們可以对組(4.1)建立如下定理：

定理4.1　对組(4.1)，假設滿足条件 1)—3)，且$f(t,x)$对x有連續的一阶偏导数，如果存在定正的$n\times n$阶实对称常矩陣A，使得对称化矩陣$J(t,x)=\frac{1}{2}\{Af_x'(t,x)+[f_x'(t,x)]^*A\}$的最大特征数

$$\wedge[J(t,x)]\leqslant-\alpha<0 \tag{4.3}$$

对一切$t\in I, x\in E^n$成立，其中α为常数，則組(4.1)存在唯一的全局漸近稳定的ω-周期解。

証. 考虑定正二次型$V(x)=(Ax,x)$，由假設条件得到

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt}=\left(A\frac{dx}{dt},\ x\right)\leqslant(Af_x'(t,\xi)x,x)+\rho L\|x\|^2+\rho M\|x\|.$$

其中$\xi=sx(0\leqslant s\leqslant1)$，$\rho=\|A\|$，如果設$r_0=\frac{4\rho M}{\alpha}$，且取$L=\frac{\alpha}{4\rho}$，則由上式及(4.3)，当$\|x\|\geqslant r_0$时有

$$\frac{dV}{dt}\leqslant-\alpha\|x\|^2$$

根据§1定理1.3（此时$\bar{r}=+\infty$）即知組（4.1）必存在ω-周期解。

假設$\bar{x}(t)$是(4.1)的ω-周期解，$x(t)$是它的任意解，令$Z(t)=x(t)-\bar{x}(t)$，則由假設条件即得

$$\frac{dV(Z(t))}{dt}\leqslant-2\alpha\|Z(t)\|^2+2\rho L\|Z(t)\|^2=-\frac{3}{2}\alpha\|Z(t)\|^2$$

利用类似§2定理2.3的論証即知$\bar{x}(t)$是全局漸近稳定的且唯一的。

証毕。

〔注〕如果只是考虑周期解的存在問題，而不保証其稳定性和唯一性，則对方程的类型和定理的条件都可以放得更寬一些。

作者对胡金昌教授的热情指导，表示衷心的謝意。

参考文献

〔1〕 許淞庆，常微分方程稳定性理論，上海科学技术出版社（1962年）。

〔2〕 Немыцкий В.В., УМН,В.1, (1936),141—174。

〔3〕 Lefschetz S., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, (М. 1961.).

〔4〕 Lefschetz S., Proc. Nat. Acad. Sci., 29(1943),29—32.

〔5〕 Демидович Б.П., Вест. МГУ., №.2 (1949), 13—25.

〔6〕 Graffi D., Ann. Math., V. 54,(1951)№.3, 262—271.

〔7〕 Antosiewicz H.A., Ann. Math., V.57, (1953), 314—317. correction, V.58,(1953) p.592.

〔8〕 辜联崑，厦門大学学报（自然科学），№.1,(1957) 59—65.

〔9〕 Демидович Б.П., ученые записки МГУ, в.181(1956),1—12.

〔10〕 Берштейн И., ДАН. СССР, в.113,(1957),№.1, 9—11.

〔11〕 Плисс В.А., Вест. ЛГУ, №.13, (1962),30—46.

〔12〕 Плисс В.А., ДАН. СССР, в.138,(1961).№.2, 301—304.

〔13〕 Ozeilo J.O.C., Proc. Cambridge Phil. Soc., V. 56.(1960), №. 4. 381—389.

〔14〕 Brauer F., International Symposium ou nonlinear dif. eq. and nonlinear Mech., (1963),435—441.

〔15〕 梁中超，数学学报，V.12,(1962),№.2, 156—169.

〔16〕 Варбашин Е.А., ПММ, т.25,(1961),в.2, 276—283.

〔17〕 Демидович Б. П. Вест. МГУ, №6, (1961), 19—27; №. 1,(1962), 3—8.

〔18〕 Малкин И.Г., 运动稳定性理論，（中譯本，1958）.

On Some Problems of Periodic Solutions for System of Nonlinear Differential Equations

Wang Su—shung

Abstract

In this paper we consider systematically, with the help of the V—function method, which broad applied in stability theory of movement, the existence and the stability of periodic solutions for system of non-linear (non-autonomos) differential equations, and its local and non-local problems. Results, which obtained in this paper, may be consided as extension and development of works〔4—10〕.