二阶綫性自共軛矩陣微分方程解的定性

沈舜鶯

（数学力学系）

摘　要

本文討論微分矩陣方程（1）。在§1举出振动的、强振动的、和非振动的解的某些充分条件。在§2引进与双曲正弦余弦比拟的矩陣函数，从此推得在有限幅度內的非振动定理。最后，在§§3,4考虑这些矩陣解的漸近性态和有界性的条件。

由于大范围变分法共軛点的研究（例如M.Morse〔1〕第四章）当其时引起矩陣微分方程解的研究，W.M.Whyburn〔2〕用Kroneeker矩陣乘积来作出矩陣解的定解；W.T.Reid〔3〕作出了一系列矩陣解的定性。近年J.H.Barrett工作〔4〕〔5〕有了很多新的进展。

本文随着Barrett工作，进行作矩陣解的定性研究，企图将二阶綫性自共軛（純量）微分方程的某些性质推广到矩陣微分方程

$$(PX')' + QX = 0 \tag{1}$$

其中X、$P(t)$、$Q(t)$皆为n阶方陣，$P(t)$、$Q(t)$为$t(t_0 \leqslant t < \infty)$的連續函数矩陣，$'$表对$t$的导数。

在§1中給出判定方程(1)的振动，强振动，非振动的充分条件。

在§2中对比于工作〔5〕引入双曲正弦矩陣$\widetilde{S}$和双曲余弦矩陣$\widetilde{C}$，并由此得出一个（在有限区間上的）非振动定理。

在§3中，考虑方程(1)的解的漸近性态。对P、Q作出若干限制后，可得到一系列的結果，这些結果是推广了R.Bellman〔6〕，A.Wintner〔7〕，W.F.Trench〔8〕等的工作，并且还得到一个非振动的充分准則。

最后，在§4中，考虑方程(1)解的有界性。

对于非自共軛方程

本文于1965年5月收到。

$$X'' + P(t)X' + Q(t)X = 0 \tag{2}$$

若令
$$\widetilde{P}(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} P(\tau)d\tau\right)$$
$$\widetilde{Q}(t) = \widetilde{P}(t)Q(t)$$

則方程(2)可写为自共軛方程：
$$(\widetilde{P}(t)X')' + \widetilde{Q}(t)X = 0$$

因此，不失一般性，我們只考慮方程(1)便够。

本文所采用的矩陣 $A=(a_{ij})$ 的范数 $\|A\|$ 为其各元素平方和的平方根即 $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a^2_{ij}}$，而 $A \leqslant B$ ($A<B$) 意味着 $\chi^*(A-B)\chi \leqslant 0$ ($\chi^*(A-B)\chi < 0$) 其中 χ 为 n 行1列的任意非零矩陣，而 χ^* 表 χ 的轉置矩陣。

§1 振动性，强振动性和非振动性

考慮方程
$$(PX')' + QX = 0$$

其中 P、Q满足条件：i) P,Q 在$t \geqslant t_0$ 連續；ii) P 为定正对称矩陣 ($t \geqslant t_0$)；iii) Q 为对称矩陣($t \geqslant t_0$)。

首先引入此后經常要用的基本定义

定义[4] 方程(1.1)的两个解 U、V 的 Wronskian 定义为常矩陣
$$W(U.V) = U^*PV' - U'^*PV$$

这类似于純量方程关于两个解的朗斯基行列式的定义，但一般地有：$W(X.X) \neq 0$ 其中 X 是方程(1.1)的任一解。

W 具有一系列的性质，这里引用若干对于下文的討論是必需的性质.

設 $U.V$为(1.1)的两个解，則 $W(U.V)$具有如下性质[4]：

(1) $W(U.V)$是常矩陣.

(2)若 $W(U.U)=0$. A是常陣，則 UA 也是(1.1)的解. 且 $W(UA.UA)=0$ 。

(3)若 $W(U.V)=E$, $W(U.U)=W(V.V)=0$，又存在 t^*、使 $U(t^*)$ 非奇异，而 $X(t)$是(1.1)的任一解則存在常矩陣 $A=-W(V.X)$，$B=W(U.X)$. 使 $X=UA+VB$

(4)若 $U(t)$是(1.1)的非奇异解，$t_0 \leqslant t \leqslant \xi$，使 $W(U.U)=0$，則存在解 V. 使$W(V.V)=0$，$W(U.V)=E$，$V=UR$ 其中$R=\int_c^t U^{-1}(\tau)P^{-1}(\tau)U^{*-1}(\tau)d\tau$ $t_0 < c < \xi$，更且 R 是定正陣 V 是非奇异。

定义[4] 方程(1.1)称为振动的 (对很大的t)：若对于(1.1)的每一解 $X(t)$，有

$W(X.X)=0$，且对每一数 $\bar{t}\geqslant t_0$ 有数 $t^*>\bar{t}$ 存在，使得 $|X(t^*)|=0$

首先給出两条引理

引理1.1 設$P.Q$滿足条件 i)，ii)，且$\int_t^{\infty}P^{-1}(\tau)d\tau$ 存在又 $X(t)$为(1.1)的解，作变换 $X=HY$，則Y滿足方程：

$$(HPHY')'+HQHY=0 \tag{1.2}$$

其中 $H(t)=\int_t^{\infty}P^{-1}(\tau)d\tau$ 是非奇异对称矩陣。

引理1.2 若$P.Q$滿足引理1.1所設条件，且方程(1.2)是振动的，則方程(1.1)也是振动的。

根据上述引理并应用工作[4]中定理2.1及R.A.Moore[9]工作可得出如下的

定理1.1 若$P.Q$滿足条件 i)，ii)，iii)，設 $G=HPH$，$R=HQH=(r_{ij})$，$G^{-1}=(HPH)^{-1}=(\bar{g}_{ij})$．若 $\widetilde{G}_K$ 是半定正陣，且对于某个 $K=1.2,\cdots,n$，有：

$$\int_{t_0}^{\infty}\bar{g}_{KK}dt=+\infty \qquad \int_{t_0}^{\infty}r_{KK}\,dt=+\infty$$

則方程(1.1)是振动的。其中 $\widetilde{G}_K$ 是矩陣 G^{-1} 以 0 代替 $\bar{g}_{KK}$ 后所成的矩陣。

定义方程(1.1)称为强振动的：若对于任一 $\bar{t}\geqslant t_0$ 及解 $X(t)$，存在$t^*\geqslant\bar{t}\geqslant t_0$，使 $X(t^*)=0$.

显然强振动必定是振动，但反之不真。

定理1.2 設 $P=E$，$Q=(g_{ij})$滿足条件：存在 $t_1\geqslant t_0$使 $g_{ij}>0$ $(i、j=1.2,\cdots,n)$ $t\geqslant t_1$，并且 $\int_{t_1}^{\infty}g_{ii}\,dt=+\infty(i=1.2,\cdots n)$若(2.1)的解 $X=(x_{ij})$ 具有性質：存在 $t_2\geqslant t_0$当 $t\geqslant t_2$时，有 $x_{ij}\geqslant 0,(i,j=1.2,\cdots n)$，則方程(1.1)是强振动的。

証明：設 $X(t)=(x_{ij})$为(1.1)的解，当 $t\geqslant t_2\geqslant t_0$时，有$x_{ij}\geqslant 0$ 令 $\bar{t}=Max(t_1,t_2)$，則当 $t\geqslant\bar{t}\geqslant t_0$ 时，有：$x_{ij}\geqslant 0$，$g_{ij}>0,(i、j=1.2,\cdots n)$

現在証明，在 $\bar{t}\geqslant t$ 之后，必有 $t^*\geqslant\bar{t}$，使 $x_{ij}(t^*)=0$，$(i.j=1.2,\cdots n)$。

若其不然，則有 $x_{ij}>0$，对某个 $i、j$，$1\leqslant i、j\leqslant n,t\geqslant\bar{t}$．　由此

$x_{ij}''=-\sum\limits_{k=1}^{n}g_{ik}x_{kj}\leqslant -g_{ii}x_{ij}<0$，$(t\geqslant\bar{t})$，因而$x_{ij}'$单調减少，此时有二种可能：

1)对于一切 $t\geqslant\bar{t}$，恒有 $x_{ij}'>0$，x_{ij} 单調增加，从而当 $t\geqslant\bar{t}$ 时，$x_{ij}\geqslant c>0$，于是$x_{ij}''\leqslant -q_{ii}c$，$x_{ij}'\leqslant -c\int_{\bar{t}}^{t}q_{ii}dt+c_1\to-\infty$，当 $t\to\infty$．$(c_1=x_{ij}'(\bar{t}))$与 $x_{ij}'>0$ 相违背。

2) 存在$\tilde{t}\geqslant\bar{t}$，使当 $t\geqslant\tilde{t}$ 时，$x_{ij}'<0$，因为 x_{ij}'单調减少，且 $x_{ij}(\tilde{t})<0$，故当 $t\geqslant\tilde{t}$ 时，有 $x_{ij}'<-C_2(C_2>0)$。由此得：$x_{ij}<-C_2t+C_3$ $(C_3=Const)$，当 $t\to\infty$ 时 $x_{ij}\to-\infty$，与 $x_{ij}>0$ 相违背。

故此必存在 $t^* \geqslant \tilde{t} \geqslant \bar{t} \geqslant t_0$ 使 $x_{ij}(t^*) = 0$ $(i、j = 1.2.\cdots n)$，即 $x(t^*) = 0$.

注. 若将定理条件 $x_{ij} \geqslant 0$，改为 $x_{ij} \leqslant 0$，則定理仍眞。

現在轉到非振动性态的討論。

定义.[5]方程(1.1)称为非振动的(对很大的 t)：若存在数 $\bar{t} \geqslant t_0$和解$X(t)$，使得：$W(X.X)=0$，且$|X(t)| \neq 0$，对 $\bar{t} \leqslant t < \infty$。

易証如下的

引理1.3 設 $P(t)$ 非奇异，且二阶导数存在，若$P^{-1}P'$是反对称陣，則存在具有二阶导数的正交矩陣$T(t)$作变换 $X = TY$，可将方程(1.1)化为

$$Y'' + S(t)Y = 0,$$

其中 $$S(t) = T^{-1}\left(\tfrac{1}{4}(P^{-1}P')^2 + P^{-1}Q - \tfrac{1}{2}P^{-1}P''\right)T \tag{1.3}$$

由此，有时我們可将对方程(1.1)的考察轉化为对方程(1.3)的考察。

定理1.3 設 P 滿足引理1.3所設条件矩陣$K(t) = \frac{1}{4}(P^{-1}P')^2 + P^{-1}(Q - \frac{1}{2}P'')$ 的对称部分 $K^\circ = \frac{1}{2}(K + K^*)$，設 K° 的最大特征根为 $\Lambda(t)$，若純量方程 $x'' + \Lambda(t)x = 0$ 是非振动的，則方程(1.1)也是非振动的。

証明：根据引理 1.3 方程 (1.1) 可通过变换化为 (1.3)，并且 $S(t) = T^{-1}KT$. $S^\circ = T^{-1}K^\circ T$($S^\circ$为 S 的对称部分)，因而 S°与K°有相同的特徵根，故 $\Lambda(t)\,E \geqslant S$根据 P.Hartman and A.Wintner 工作[10]中的推論知方程(1.3)是非振的，再由 T 的非奇异性知方程(1.1)也是非振动的

§2　由 Prüfer 变换所引起的双曲函数矩陣

这里引入所謂双曲正弦矩陣 $\tilde{S}$ 和 双曲余弦矩陣 $\tilde{C}$，其性質与純量函数 sh, ch相类似，此外，藉助于$\tilde{S}.\tilde{C}$.可推得一条在有限区間上的不振动定理。

为了下面的需要，这里仅限于有限区間 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 < \infty$上討論。

考虑方程組：

$$Y' = \tilde{Q}Z, \qquad Z' = \tilde{Q}Y$$

其中 $\tilde{Q}$ 是 t $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1 < \infty)$ 的連續函数对称矩陣，則由存在定理 (2.1) 存在一組解：

$$Y = \tilde{S}(t) = \tilde{S}(t_0, t; \tilde{S}), \qquad Z = \tilde{C}(t) = \tilde{C}(t_0, t; \tilde{Q}), \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1 < \infty)$$

且滿足初始条件：　$Y(t_0) = 0$，　$Z(t_0) = E$.

当 $n = 1$ 或 $\tilde{Q}$ 滿足条件：$\tilde{Q}\int_{t_0}^{t}\tilde{Q}\,d\tau = \int_{t_0}^{t}\tilde{Q}\,d\tau\,\tilde{Q}$ 时

$$\tilde{S}(t) = sh\left(\int_{t_0}^{t}\tilde{Q}\,d\tau\right), \qquad \tilde{C}(t) = ch\left(\int_{t_0}^{t}\tilde{Q}\,d\tau\right)$$

当 $n=1$ 时，熟知有：$ch^2-sh^2=1$

对于 $n>1$ 情况，我們也有类似的結果：

$$\widetilde{C}^*\widetilde{C}-\widetilde{S}^*\widetilde{S}=E, \qquad \widetilde{C}^*\widetilde{S}=\widetilde{S}^*\widetilde{C}$$

$$\widetilde{C}\widetilde{C}^*-\widetilde{S}\widetilde{S}^*=E, \qquad \widetilde{C}\widetilde{S}^*-\widetilde{S}\widetilde{C}^*$$

其証明方法与工作[5]中定理1.1.相同。

定理2.1　若 $X(t)$ 是方程

$$(PX')^1+FX=0 \tag{2.1}$$

的非平凡解．其中P、F是对称連續矩陣，且P是定正陣，若 $X(t_0)=0$，則在 $t_0\leqslant t\leqslant t_1<\infty$上，$W(X,X)=0$，且存在一个对称連續矩陣$\widetilde{Q}$和一个非奇异連續可微矩陣$\widetilde{R}$，使得

$$X(t)=\widetilde{S}^*(t_0,t;\widetilde{Q})\widetilde{R}(t)$$

$$P(t)X'(t)=\widetilde{C}^*(t_0,t;\widetilde{Q})\widetilde{R}(t)$$

而且$\widetilde{R}$、$\widetilde{Q}$滿足方程

$$\widetilde{R}'=-\{\widetilde{S}P^{-1}\widetilde{C}^*+\widetilde{C}F\widetilde{S}^*\}\widetilde{R}, \qquad \widetilde{R}(t_0)=P(t_0)X'(t_0).$$

$$\widetilde{Q}=\widetilde{C}P^{-1}\widetilde{C}^*-\widetilde{S}F\widetilde{S}^*$$

因为我們仅限于有限区間討論，故由$\widetilde{S}$、$\widetilde{C}$的連續性知$\widetilde{S}$、$\widetilde{C}$是有界的，因此可仿照[5]中定理2.1.証明之。

定理2.2　若$\widetilde{Q}$是連續对称定正矩陣，則

$$\widetilde{S}(t_0,t_0;\widetilde{Q})=0, \qquad |\widetilde{S}(t_0,t;\widetilde{Q})|\neq 0 \qquad (t>t_0)$$

$$|\widetilde{C}(t_0,t;\widetilde{Q})|\neq 0 \qquad (t\geqslant t_0)$$

証明：假設 $|\widetilde{C}(t_0,t;\widetilde{Q})|=0$，对 $t=t^*$．t^*是使得$|\widetilde{C}|=0$的最小t值，显然$t^*>t_0$

令　$k=\widetilde{S}\widetilde{C}^{-1}$．　$t_0\leqslant t<t^*$

則　$K(t_0)=0$，且$K(t)$是对称陣。

又　$K^1=\widetilde{S}'\widetilde{C}^{-1}-\widetilde{S}\widetilde{C}^{-1}\widetilde{C}'\widetilde{C}^{-1}=\widetilde{Q}-K\widetilde{Q}K \quad (t_0\leqslant t<t^*)$

这方程可写为形如：

$$K'+AK+KA^*=\widetilde{Q} \tag{2.2}$$

其中　$A=\frac{1}{2}K\widetilde{Q}$

齐次方程　$K'+AK+KA^*=0$　的解是 $K=J(t)MJ^*(t)$

其中M是常陣而 $J(t)$是方程

$$J' = -AJ \qquad J(t_0) = E$$

的解，故非齐次方程(2.2)满足$K(t_0)=0$的解是

$$K(t) = J(t)\left\{\int_{t_0}^{t} J^{-1}\widetilde{Q}J^{*-1}d\tau\right\}J^*(t) \qquad t_0 \leqslant t < t^*$$

因而$K(t)$（$t_0 \leqslant t < t^*$）是定正的。

现在 $\widetilde{S} = K\widetilde{C}$， $\widetilde{C}' = \widetilde{Q}\widetilde{S} = \widetilde{Q}K\widetilde{C}$， 故有：

$$|\widetilde{C}| = exp\left\{\int_{t_0}^{t} tr(\widetilde{Q}K)\,d\tau\right\} \qquad (t_0 \leqslant t < t^*)$$

因为$\widetilde{Q}K$是定正陣，故 $tr(\widetilde{Q}K) > 0$，$(t_0 \leqslant t < t^*)$ 因而

$$exp\left\{\int_{t_0}^{t} tr(\widetilde{Q}K)d\tau\right\} > 0$$

根据連續性 $\int_{t_0}^{t^*} tr(\widetilde{Q}K)d\tau \neq -\infty$ 因而

$$exp\left\{\int_{t_0}^{t^*} tr(\widetilde{Q}K)d\tau\right\} \neq 0$$

但与 $|\widetilde{C}(t^*)| = 0$ 相违背，故此得

$$|\widetilde{C}(t)| \neq 0 \qquad (t \geqslant t_0)$$

又 $\widetilde{S} = \widetilde{C}\int_{t_0}^{t}\widetilde{C}^{-1}\widetilde{Q}\,\widetilde{C}^{*-1}d\tau$，因此由$|C| \neq 0$ 可推得 $|\widetilde{S}| \neq 0$ $(t > t_0)$

推論 假設在方程(2.1)中P、F是对称連續矩陣，且P是定正陣，F是定負陣，若$X(t)$是(2.1)的滿足条件$X(t_0)=0$的非平凡解則

$$|X(t)| \neq 0 \qquad |X'(t)| \neq 0 \qquad t > t_0 \qquad (2.3)$$

証明：由定理2.1 $X(t) = \widetilde{S}^*(t_0, t; \widetilde{Q})\widetilde{R}(t)$，

$P(t)X'(t) = \widetilde{C}^*(t_0, t; \widetilde{Q})\widetilde{R}(t)$，其中$\widetilde{R}$是非奇异陣，$\widetilde{Q} = C\widetilde{P}^{-1}\widetilde{C}^* - \widetilde{S}F\widetilde{S}^*$

因为P是定正陣，故P^{-1}也然，而F是定負对称陣，故$\widetilde{Q}$是定正对称陣，因而由定理2.2馬上得出結論。

此推論的結論乃表示若把相应于(2.1)的向量方程

$$(P\propto')' + F\propto = 0$$

（其中$\propto$为向量）作为Jacobi方程，則其在区間$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$上的解所对应的极值曲綫不存在共軛点，卽沿着其所对应的极值曲綫，皆适合Jacodi的极値判定条件。

由(2.3)看出，在滿足推論的条件下，方程(2.1)在区間$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$上是非振动的。

§3　解的漸近性态

在这一节中将給出方程

$$(PX')' + QX = 0 \tag{3.1}$$

（其中 P、Q 是 t ($t_0 \leqslant t < \infty$) 的連續函数矩陣）解的若干表示形式以及漸近性状由此更可判定解的稳定性及振动性。

定理3.1　設$P(t)$为定正对称矩陣．$H(t) \equiv \int_t^\infty P^{-1}(\tau)d\tau$存在，且方程(3.1)存在解$U(t)$．滿足条件$W(U.U) = 0$，$U \to E(t \to \infty)$　若

$$\lim_{t\to\infty} H^{-1}(t)\int_{t_0}^{t} P^{-1}(\tau)d\tau = C, \qquad \bar{h}_{ij}/\bar{h}_{ik} \leqslant l, \ (i,j,k=1,2,\cdots,n)$$

其中C为非奇异常矩陣，l为 常数，$\bar{h}_{ip}$为H^{-1}的元素，則方程(3.1)存在一个解$V(t)$，使$H^{-1}V \to E$，$t \to \infty$，且(3,1)的每一解可表为：

$$X(t) = (E + Z_1(t))A + H(t)(E + Z_2(t))B$$

其中$A.B$是常矩陣，而$Z_k(t) \to 0$，$t \to \infty$，$k = 1,2$

証明：設　$V_1(t) = H^{-1}U\int_{t_0}^{t}(U^*PU)^{-1}d\tau$ 　(3.2)

根据題設可証明　$V_1(t) \to C$，$(t \to \infty)$

由(3.2)，　$HV_1 = U\int_{t_0}^{t}(U^*PU)^{-1}d\tau$

根据W的性質(4)知　$V_2 = HV_1$是(3.1)的解，且

$$W(V_2,V_2) = 0.\ W(V_2,U) = E$$

故由W的性質(3)，方程(3.1)的每一解可表为：

$$X(t) = UA + V_2B.$$

其中A,B是常陣。

又由U及V_2的性态，更可表为：

$$X(t) = (E + Z_1(t))A + H(t)(E + Z_2(t))B$$

其中$Z_k(t) \to 0$，$t \to \infty$，$k = 1,2$．

此定理排除工作[4]中定理1.1.的情形，实际上，由于$H(t)$的存在性，显然$P(t)$不可能趋于某个常陣，由H的涵义，更可看出，当$t \to \infty$时，$H(t) \to 0$，因而在

满足此定理的条件下，方程(3.1)的一切解皆有界，而在[4]中定理1.1.的情形，由解的表达式看出(3.1)的一切解皆无界。

利用[4]中定理1.1和定理1.3可得

定理3.2 若 $P=E$，$\int_{t_0}^{\infty} t\|Q\|dt<\infty$，则(3.1)的任一解可表为：

$$X(t)=(E+Z_1(t))A+t(E+Z_2(t))B$$

其中A,B是常陣，$Z_k(t)\to 0$，$(t\to\infty)$，$k=1.2$，

注. 上述二定理可作出力学某些推論，給动力系統：

$$\frac{dq_r}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_r},\quad \frac{dp_r}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_r}\quad (r=1,2,\cdots,n)$$

設

$$2H=q^*Q(t)q+P^*R(t)P$$

这在繞平衡位置的振动，H不含迴轉項q_ip_j是应有的事实，看E.T.Whittaker书[11]，Ch. Vll. 故可按此推广到非駐定系統

令 $R=P^{-1}$ 则得：$PY_1'=Y_2$，$Y_2'=-QY_1$

即 $(PY_1')'+QY_1=0$

故若定理3.1.条件适合，则零解为稳定，此論断包括在力学中临近平衡位置的振动稳定性結果（例如见书[11]）：其动能、位能分别为P,q的正定二次型，若适合定理3.2.，则零解为不稳定。

若考虑P,Q取某些特殊形式，则可得較深刻的結果（詳见作者毕业論文）。

以上給出矩陣方程解的表示形式，实际上，我們关心的是当$t\to\infty$时，解的性态如何，下面就这間題进行探討。

定理3.3 若P,Q满足条件

1） P非奇异，$Q\neq 0$。 (3.3)

2） $\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\|P^{-1}(t)\|\,\|Q(s)\|\,ds\,dt<\infty$ (3.4)

则(3.1)的任一解皆存在有限的极限$X(\infty)$，且方程(3.1)，是非振动的。

証明：方程(3.1)的解可写为：

$$X=-\int_T^t\int_T^\tau P^{-1}(\tau)Q(s)X(s)ds\,d\tau+\int_T^t P^{-1}(\tau)C_1d\tau+C_2\quad(t\geqslant T\geqslant t_0)\qquad(3.5)$$

其中C_1,C_2是常矩陣，

設 $$M_t=\underset{T\leqslant\tau\leqslant t}{\mathrm{Max}}\|X(\tau)\|,$$

$$m = \int_T^\infty \|P^{-1}(\tau)\|\|C_1\|d\tau + \|C_2\|$$

$$k = \int_T^\infty \int_T^\tau \|P^{-1}(\tau)\| \|Q(s)\| ds\, d\tau$$

由条件(3.3)、(3.4)，知m,k均存在，滿足：

$$M_t \leqslant M_t k + m$$

且当$T\to\infty$时，$k\to 0$，故可选取足够大的T，使$k<1$，因而得：

$$M_t \leqslant \frac{m}{1-k} < \infty, \quad 故有 \quad \|X(t)\| \leqslant \frac{m}{1-k}$$

特别地，当$t\to\infty$时，(3.1)的任一解有界。由(3.5)有：

$$X(\infty) = -\int_T^\infty \int_T^\tau P^{-1}(\tau)Q(s)X(s)\, ds\, d\tau + \int_T^\infty P^{-1}(\tau)C_1 d\tau + C_2$$

由定理所給条件，知上式右端收斂，故$X(\infty)$存在且有限。

現在証明(3.1)是非振动的，卽要証明存在一个解$X_0(t)$和$\xi\geqslant t_0$，使$W(X_0.X_0)=0$，$|X_0(t)|\neq 0 \quad t\geqslant\xi$

选取$C_1=0$，$C_2=E$，則

$$X_0(t) = -\int_T^t \int_T^\tau P^{-1}(\tau)Q(s)X_0(s)dsd\tau + E$$

滿足上述条件。这里选取足够大的T，使$k\leqslant\varepsilon$，其中ε是任意給定的正数。

首先　$X_0' = -\int_T^t P^{-1}(t)Q(s)X_0(s)ds$

由上述証明$X_0(t)$是有界的，故对足够大的T，有$X_0'(t)\to 0$，$t\to\infty$，因而$W(X_0.X_0)\to 0$，$t\to\infty$，由W的性質(1)，W是常陣，故$W(X_0,X_0)=0$，

其次証明存在$\xi\geqslant T\geqslant t_0$，使$|X_0(t)|\neq 0$，$t\geqslant\xi$。

若对$t\geqslant T$，　$|X_0(t)|\neq 0$，　則定理成立

若存在$t_1\geqslant T$，使$|X_0(t_1)|=0$，則存在非零常矢量α，使$X_0(t_1)\alpha=0$。

令　$\bar{x}(t)=X_0(t)\alpha$　則$\bar{x}(t)$滿足方程：

$$\bar{x}(t) = -\int_T^t \int_T^\tau P^{-1}(\tau)Q(s)\bar{x}(s)\, dsd\tau + E\alpha$$

由此得

$$0 = \bar{x}(t_1) = -\int_T^{t_1} \int_T^\tau P^{-1}(\tau)Q(s)\bar{x}(s)\, dsd\tau + E\alpha$$

此时，等式右端可充分接近$E\alpha\neq 0$，而左端为零，这是不可能的。故此$|X_0(t)|\neq 0$ $t\geqslant T$，因而方程(3.1)是非振动的。

当$n=1$时，本定理便是Z.Opial工作[12]中的定理Ⅱ。

推論 給出方程

$$X''+F(t)=0 \tag{3.6}$$

其中F是連續函数矩陣($t_0\leqslant t<\infty$)，若存在二次可微函数$\lambda(t)$，使

$$\int_{t_0}^{\infty}\overline{\lambda}\,\|D_F(\lambda)\|\,dt<\infty$$

其中 $\overline{\lambda}=\lambda(t)\int_t^{\infty}\frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)}$ $\quad\lambda=\lambda(t)E,\quad D_F(\lambda)=\lambda''+F\lambda$ 則(3.6)是非振动的。

定理3.4 設P、Q滿足定理3.3.所設条件，更設存在足够大的T，使

$$P^{-1}(t)\int_T^t Q(\tau)d\tau\to 0,\ t\to\infty \tag{3.7}$$

$$\|P(t)\|\int_t^{\infty}\|P^{-1}(\tau)\|\,d\tau=O(1),\ t\to\infty.$$

則(3.1)的任一解$X(t)$，有$X'(t)\to 0$，$t\to\infty$，更且存在解$X_0(t)$．使

$$X_0(t)\to 0,\quad P(t)X_0'(t)\to E\quad(t\to\infty)$$

証明：因为P、Q滿足定理3.3的条件，故此(3.1)的任一解$X(t)$当$t\to\infty$时有界，又由条件(3.4)知$\int_t^{\infty}\|P^{-1}(t)\|\,dt$收斂，因此$P^{-1}(t)\to 0$，当$t\to\infty$.

現在选取这样的T，使当$t\geqslant T$时，$P^{-1}(t)\to 0$，$X(t)$有界，且(3.6)成立，由方程(3.1)得：

$$X'=-P^{-1}(t)\int_T^t Q(s)X(s)ds+P^{-1}(t)C_1$$

显然等式右端收斂，并且趋于零，故此$X'(t)\to 0$，$t\to\infty$，此外由定理3.3知存在解$X(t)$，使$X(\infty)$非奇异(因为(3.1)是非振动的)，因而存在解$X_1(t)$，使

$$X_1(t)\to E,\quad X_1'(t)\to 0\quad t\to\infty.$$

設

$$X_0(t)=-X_1(t)\int_t^{\infty}(X_1^*PX_1)^{-1}d\tau$$

則$X_0(t)$也是(3.1)的解，且$X_0(t)\to 0$ 而

$$PX_0'=-PX_1'\int_t^{\infty}(X_1^*PX_1)^{-1}d\tau+X_1^{*-1}\to E\quad t\to\infty.$$

作为上述定理的一个应用，有如下的

例．給出方程

$$X''-(L(t)+\psi(t))X=0\,. \tag{3.8}$$

其中 $L(t)=l(t)E$，$l(t)\geqslant l_0>0$，对 $t\geqslant t_1\geqslant t_0$，且設

$\int_{t_1}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{l}}<\infty$，若 $\int_{t_1}^{\infty}||\psi||\,dt<\infty$，则(3.8)有如下形式的解

$$x(t)=e^{\int_{t_1}^{t}\sqrt{l}\,d\tau}E+o\left(e^{\int_{t_1}^{t}\sqrt{l}\,d\tau}\right)E$$

$$x'(t)=\sqrt{l}\;e^{\int_{t_1}^{t}\sqrt{l}\,d\tau}E+o\left(e^{\int_{t_1}^{t}\sqrt{l}\,d\tau}\right)E.$$

§4　解的有界性

矩陣微分方程解的有界性与向量微分方程解的有界性，无大区别，故这一論題，已經多见于通常穩定性书本，例如[6]这里只作如下一些补充

考慮方程

$$(PX')'+QX=0 \tag{4.1}$$

定理4.1　設 P^*P 为半定正矩陣，P^*Q为对称定正可微矩陣，若$(P^*Q)'$的最大特征根 $\beta(t)>0$，且滿足条件：$\int_{t_0}^{\infty}\beta(t)dt<\infty$，　则方程(4.1)之解是有界的。

証明：設$X(t)$为(4.1)的任一解，令 $X_i=XE_i$，其中E_i表$n\times1$阶矩陣，位于第 i 行的元素为 1，其余元素为 0，则 X_i 滿足方程

$$(PX_i')'+QX_i=0\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

以$(PX_i')^*$左乘之得：

$$(PX_i')^*(PX_i')'+(PX_i')^*QX_i=0$$

积分得：

$$\tfrac{1}{2}(PX_i')^*(PX_i')+\int_{t_0}^{t}(PX_i')^*QX_i\,d\tau=C_1$$

利用分部积分法，并注意到 P^*Q 的对称性可得：

$$\tfrac{1}{2}X_i'^*P^*PX_i'+\tfrac{1}{2}X_i^*P^*QX_i-\tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t}X_i^*(P^*Q)'X_i\,d\tau=C_2$$

其中

$$C_2=\tfrac{1}{2}(X_i'^*P^*X_i'+X_i^*P^*QX_i)\big|_{t=t_0}$$

因为 P^*P 为半定正陣，故有：

$$X_t^*P^*QX_t \leqslant \int_{t_0}^{t} X_t^*(P^*Q)'X_t d\tau + 2C_2 \tag{4.2}$$

由于P^*Q为定正陣，故有：

$$X_t^*P^*QX_t \geqslant \alpha X_t^*X_t \qquad \alpha > 0 \text{ 为常数}$$

由(4.2)得：

$$\alpha X_t^*X_t \leqslant \int_{t_0}^{t} \beta(\tau)X_t^*X_t + 2C_2$$

由 Bellman 引理[6]

$$X_t^*X_t \leqslant \frac{2C_2}{\alpha} \, exp\left(\frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t}\beta(\tau)\,d\tau\right) \leqslant \frac{2C_2}{\alpha} \, exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\beta(\tau)\,d\tau\right) < \infty$$

故 X_t 有界，从而 $X(t)$ 也有界，

同样方法可証明

定理4.2 給出方程

$$X'' + QX = 0 \tag{4.3}$$

設 $Q = L + \psi(t)$，其中 L 是对角形常陣，其元素为 l_{ii}，且 $l_{ii} > 0$，$i = 1,2,\cdots,n$，若 $\int_{t_0}^{\infty} \|\psi\| dt < \infty$，則方程(4.3)的一切解及其导数有界。

利用逐步逼近法可証明如下的

定理4.3 若存在常数 $a > 0$，使 $\|Q + a^2E\| \leqslant m < a^2$，$t \geqslant 0$ 則方程(4.3)滿足条件 $X(0) \neq 0$ 的解及其导数均有界。

参 考 文 献

〔1〕 M. Morse, Calculus of Variations in the Large, AMS. Coll. V. 18 (1934)

〔2〕 W.M.Whyburn, Amer. J.Math. Vol. 56 (1934) pp.587—592

〔3〕 W.T.Reid, Amer. J.Math. Vol. 68 (1946) pp.237—246.

〔4〕 J.H.Barrett, Portugaliae Mathematica, Vol. 14 (1955) pp.79—89

〔5〕 J.H.Barrett, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 8 (1957) pp.510—518

〔6〕 R.Bellman. 張燮譯 微分方程解的稳定性理論 科学出版社，(1957)

〔7〕 A.Wintner, Duke Math. J. Vol. 15 (1948) pp. 55—67

〔8〕 W.F.Trench, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 14. № 1. (1963) pp.12—14.
〔9〕 R.A.Moore, Pacifio J.Math. Vol. 5 (1955) pp.125—145.
〔10〕 P.Hartman and A.Wintner, Canad. J.Math. (1958) 8. № 1. pp.72—81
〔11〕 E.T.Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4 th. ed. (1952)
〔12〕 Z.Opial, Ann. Polon. Math. VI. № 2 (1959) pp. 181—200

On Self-conjugate Linear Differential Matrix-equations of Second Order

Shen Shin-ying

Abstract

In this paper we deal with differential matrix-equation (1). In § 1 we give some sufficient conditions for the oscillating, strong oscillating and non-oscillating solutions. In § 2 we propose an idea of the matrix analogue to the hyperbolic sine and cosine and thence derive a non-oscillating theorem in a finite range. Finally in § § 3 and 4 we consider the asymptotic behaviour and the condition for boundedness of the matrix-solutions.