

扁球壳对称屈曲

蔡承武

(数学力学系)

摘要

本文应用积分方程逐次逼近法分析了扁球壳在边缘力矩作用下的对称屈曲问题。该问题为胡海昌^[1]研究过,但文献[1]提出的方法不能解决当边缘力矩是边缘转角多值函数时的情形。本文所用的方法没有这个限制。

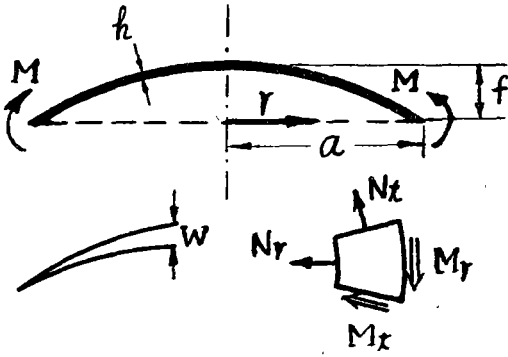
一 引言

早在二十五年以前,卡門和錢学森^[2]就已指出壳体屈曲问题具有非线性特点。由于求解非线性微分方程数学上的困难,早年有关壳体稳定性的文献大多用能量法处理。基于非线性微分方程积分的研究,才是近十年来的事情。

扁球壳轴对称屈曲是壳体屈曲问题中最简单的一个,由于它的相对简单性,使得有较多的可能找到各种有效的近似途径。扁球壳在边缘力矩作用下的大挠度问题,已为胡海昌^[1]、別列佐夫斯基(А.А.Березовский)^[3]研究过,胡氏以两个线性问题为基础,近似地求得 M (边缘力矩)与 θ (边缘转角)的关系,不足的是这种关系仅当 M 是 θ 的单值函数时找到,至于当 M 是 θ 的多值函数时的情形,尚有待研究。別列佐夫斯基引入平板中的格林函数,将问题归结为求解非线性积分方程,并以边缘力矩为摄动参数用小参数法求解。十分遗憾,这种方法不能用来研究跳跃现象。因产生跳跃时,边缘力矩已不能唯一确定挠度函数,这时选择边缘力矩作摄动参数是没有意义的。

本文将扁球壳轴对称大挠度微分方程组化为含有两个未定参数的积分方程组,这两个未定参数由扁球壳的边界条件决定。作者应用逐次逼近法求解,对三级近似进行了讨论,并得到 M 与 θ 的关系,这种关系是用参数方程表达的,包含 M 与 θ 互相多值的情形。

二 符号与基本微分方程(1)



图一

r . 径向坐标。

W . 挠度。

a, f, h 扁球壳的周界半径,
拱高, 厚度。

E, ν . 弹性模量、泊松比。

N_r, N_t 薄膜力。

M_r, M_t 弯矩。

M 外力矩。

$\rho, \theta, k, S_r, S_t, S, m_r, m_t, m$ 无量纲
参数。

$$\text{其中 } \rho = \frac{r}{a}, y = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{W}{h}, \theta = -\frac{dy}{d\rho}, k^4 = 48(1-\nu^2) \frac{f^2}{h^2}$$

$$S_r = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{Eh^3} N_r, S_t = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{Eh^3} N_t, S = \rho S_r,$$

$$m_r = \frac{12(1-\nu^2)\sqrt{12(1-\nu^2)}a^2}{Eh^4} M_r, m_t = \frac{12(1-\nu^2)\sqrt{12(1-\nu^2)}a^2}{Eh^4} M_t$$

$$m = \frac{12(1-\nu^2)\sqrt{12(1-\nu^2)}a^2}{Eh^4} M。$$

扁球薄壳在边缘力矩作用下的无量纲方程和边界条件为:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta) + k^2 S = \frac{\theta S}{\rho} \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho S) - k^2 \theta = -\frac{\theta^2}{2\rho} \quad (1.2)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时 } \frac{d\theta}{d\rho} + \nu \frac{\theta}{\rho} = m, S=0 \quad (1.3)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时 } \theta=0, S=0 \quad (1.4)$$

θ, S 与内力的关系式为:

$$S_r = \frac{S}{\rho}, S_t = \frac{dS}{d\rho}, m_r = \frac{d\theta}{d\rho} + \nu \frac{\theta}{\rho}, m_t = \frac{\theta}{\rho} + \nu \frac{d\theta}{d\rho} \quad (2)$$

其中第二式可从径向平衡条件得到。

已知扁球壳弯曲成平板状态时的解答是:

$$\theta = k^2 \rho, S = -\frac{k^4}{16} \rho(1-\rho^2), m = (1+\nu)k^2 \quad (3)$$

若把平板状态作为新的起始状态, 只要作如下的变换:

$$\theta = k^2 \rho + \theta', S = -\frac{k^4}{16} \rho(1-\rho^2) + S' \quad m = (1+\nu)k^2 + m' \quad (4)$$

将(4)式代入方程组(1), 便得

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta') + \frac{k^4}{16} (1-\rho^2)\theta' = \frac{\theta' S'}{\rho} \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho S') = -\frac{\theta'^2}{2\rho} \quad (5.2)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时 } \frac{d\theta'}{d\rho} + \nu \frac{\theta'}{\rho} = m' \quad S' = 0 \quad (5.3)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时 } \theta' = 0 \quad S' = 0 \quad (5.4)$$

将(4)式代入(2)式, 得:

$$\left. \begin{aligned} S_r &= -\frac{k^4}{16}(1-\rho^2) + S_r', \quad S_t = -\frac{k^4}{16}(1-3\rho^2) + S_t', \\ m_r &= (1+\nu)k^2 + m_r', \quad m_t = (1+\nu)k^2 + m_t'. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

$$\text{其中 } S_r' = \frac{S'}{\rho}, \quad S_t' = \frac{dS'}{d\rho}, \quad m_r' = \frac{d\theta'}{d\rho} + \nu \frac{\theta'}{\rho}, \quad m_t' = \frac{\theta'}{\rho} + \nu \frac{d\theta'}{d\rho} \quad (6.2)$$

方程组(1)或(5)是扁球壳在边缘力矩作用下的基本微分方程。

三 基本积分方程

引入新的函数

$$y_1 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta'), \quad z_1 = \frac{\theta'}{\rho} \quad y_2 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho S'), \quad z_2 = \frac{S'}{\rho} \quad (7)$$

从方程(5)不难导出 $y_i, z_i (i=1,2)$ 应满足如下积分方程。

$$y_1 = y_1^0 + \int_c^\rho [z_1 z_2 - \frac{k^4}{16}(1-\rho^2)z_1] \rho d\rho \quad (8.1)$$

$$z_1 = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho y_1 \rho d\rho \quad (8.2)$$

$$y_2 = y_2^0 + \int_0^\rho (-\frac{1}{2}z_1^2) \rho d\rho \quad (8.3)$$

$$z_2 = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho y_2 \rho d\rho \quad (8.4)$$

其中 y_1^0, y_2^0 分別為 y_1, y_2 當 $\rho=0$ 時的值。

通過(6,2)式和(7)式, 可得到內力和新函數的關係:

$$y_1 = \frac{1}{1+\nu} (m_t' + m_r'), z_1 = \frac{1}{1-\nu^2} (m_t' - \nu m_r'), \quad y_2 = S_t' + S_r', z_2 = S_r' \quad (9.1)$$

$$\text{或 } m_r' = y_1 - (1-\nu)z_1, \quad m_t' = \nu y_1 + (1-\nu)z_1, \quad S_r' = z_2, \quad S_t' = y_2 - z_2 \quad (9.2)$$

因此, 邊界條件(5.3)(5.4)可表為:

$$\text{當 } \rho=1 \text{ 時 } y_1 - (1-\nu)z_1 = m' \quad z_2 = 0 \quad (10.1)$$

$$\text{當 } \rho=0 \text{ 時 } y_i, z_i (i=1,2) \text{ 有界} \quad (10.2)$$

方程(8)中的常數 y_1^0, y_2^0 決定於扁球殼中心處的彎矩和薄膜力, 但這是預先無法知道的。因此, 方程(8)的解中包含兩個未知常數, 這兩常數應該用邊界條件(10.1)式確定。

積分方程(8)和確定 y_1^0, y_2^0 的(10.1)式構成本文分析的基礎。

四 基本積分方程解的存在定理

方程(8)可寫成下面較為一般的形式

$$y_1 = y_1^0 + \int_0^\rho f_1(\rho, z_1, z_2) \rho d\rho \quad (11.1)$$

$$z_1 = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho y_1 \rho d\rho \quad (11.2)$$

$$y_2 = y_2^0 + \int_0^\rho f_2(\rho, z_1, z_2) \rho d\rho \quad (11.3)$$

$$z_2 = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho y_2 \rho d\rho \quad (11.4)$$

其存在定理敘述如下:

假設: (1) 函數 f_i 在閉區域

$$D: 0 \leq \rho \leq A, \frac{y_i^0}{2} - B \leq z_i \leq \frac{y_i^0}{2} + B \quad (i=1,2)$$

內連續。(可推出存在正數 M^* , 使得變元在 D 內均有 $|f_i| \leq M^*, i=1,2$)

(2) 在 D 內函數 $f_i (i=1,2)$ 對於變元 z_1, z_2 滿足李普希茲條件: $|f_i(\rho, z_1', z_2') - f_i(\rho, z_1'', z_2'')| \leq K \{ |z_1' - z_1''| + |z_2' - z_2''| \} (i=1,2)$ 。其中 ρ, z_1', z_2' , 和 ρ, z_1'', z_2'' ,

z_2'' 是属于 D 的任意两组值, K 是某一正数。

满足上述假设下方程组(11)存在唯一的一组解案 $y_i = y_i(\rho), z_i = z_i(\rho), (i=1,2)$ 确定于区间 $0 \leq \rho \leq h$ 。其中 $h = \min\left(A, \sqrt{\frac{8B}{M^*}}\right)$ 。

我们用逐次逼近法^[4]证明此定理。定义如下函数叙列

$$y_i^{(0)} = y_i^0 \quad z_i^{(0)} = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho y_i^{(0)} \rho d\rho \quad (i=1,2) \quad (12.0)$$

$$y_i^{(1)} = y_i^0 + \int_0^\rho f_i(\rho, z_1^{(0)}, z_2^{(0)}) \rho d\rho$$

$$z_i^{(1)} = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho y_i^{(1)} \rho d\rho \quad (i=1,2) \quad (12.1)$$

.....

$$y_i^{(n)} = y_i^0 + \int_0^\rho f_i(\rho, z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-1)}) \rho d\rho$$

$$z_i^{(n)} = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho y_i^{(n)} \rho d\rho \quad (i=1,2) \quad (12.n)$$

显然这样定义的函数是连续的。下面将证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $y_i^{(n)}, z_i^{(n)} (i=1,2)$ 极限存在并且就是方程(11)的解。证明分三步完成。

(1) 当 $0 \leq \rho \leq h$ 时 $\rho, z_1^{(n)}, z_2^{(n)}$ 属于 D

$$\text{因为 } \left| y_i^{(1)} - y_i^0 \right| = \left| \int_0^\rho f_i(\rho, z_1^{(0)}, z_2^{(0)}) \rho d\rho \right| \leq \frac{M^*}{2} \rho^2 \quad (i=1,2)$$

$$\left| z_i^{(1)} - \frac{y_i^0}{2} \right| = \left| \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho (y_i^{(1)} - y_i^0) \rho d\rho \right| \leq$$

$$\leq \frac{M^*}{8} \rho^2 \leq \frac{M^*}{8} h^2 \leq B \quad (i=1,2)$$

所以 $\rho, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}$ 属于 D

如果当 $0 \leq \rho \leq h$ 时, $\rho, z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-1)}$ 属于 D , 那么 $\rho, z_1^{(n)}, z_2^{(n)}$ 也不会越出 D ,

$$\text{事实上 } \left| y_i^{(n)} - y_i^0 \right| = \left| \int_0^\rho f_i(\rho, z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-1)}) \rho d\rho \right| \leq \frac{M^*}{2} \rho^2 \quad (i=1,2)$$

$$\begin{aligned} \left| z_i^{(n)} - \frac{y_i^{\circ}}{2} \right| &= \left| \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} (y_i^{(n)} - y_i^{\circ}) \rho d\rho \right| \leq \\ &\leq \frac{M^*}{8} \rho^2 \leq \frac{M^*}{8} h^2 \leq B \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $y_i^{(n)}, z_i^{(n)}$ 极限存在

考察下列級数

$$y_i^{(\circ)} + \sum_{n=1}^{\infty} (y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}), \quad z_i^{(\circ)} + \sum_{n=1}^{\infty} (z_i^{(n)} - z_i^{(n-1)}) \quad (i=1,2) \quad (13)$$

我們來估計 Σ 号下的各項

$$\left| y_i^{(1)} - y_i^{(\circ)} \right| \leq \frac{M^*}{2} \rho^2, \quad \left| z_i^{(1)} - z_i^{(\circ)} \right| \leq \frac{M^*}{8} \rho^2 \quad (i=1,2) \quad (14.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \left| y_i^{(2)} - y_i^{(1)} \right| &= \left| \int_0^{\rho} [f_i(\rho, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) - f_i(\rho, z_1^{(\circ)}, z_2^{(\circ)})] \rho d\rho \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\rho} K \{ |z_1^{(1)} - z_1^{(\circ)}| + |z_2^{(1)} - z_2^{(\circ)}| \} \rho d\rho \right| \\ &\leq \frac{2M^*(2K)\rho^4}{2^2 \times 4^2} \quad (i=1,2) \\ \left| z_i^{(2)} - z_i^{(1)} \right| &= \left| \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} (y_i^{(2)} - y_i^{(1)}) \rho d\rho \right| \leq \\ &\frac{2M^*(2K)\rho^4}{2^2 \times 4^2 \times 6} \quad (i=1,2) \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

用数学归纳法容易证明估计式

$$\left. \begin{aligned} \left| y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)} \right| &\leq \frac{2M^*(2K)^{n-1}\rho^{2n}}{(2n!!)^2} \leq \frac{2M^*(2K)^{n-1}h^{2n}}{(2n!!)^2} \quad (i=1,2) \\ \left| z_i^{(n)} - z_i^{(n-1)} \right| &\leq \frac{2M^*(2K)^{n-1}\rho^{2n}}{(2n!!)^2 \cdot 2(n+1)} \leq \frac{2M^*(2K)^{n-1}h^{2n}}{(2n!!)^2 \cdot 2(n+1)} \quad (i=1,2) \end{aligned} \right\} \quad (14.n)$$

成立。由此可知函数項級数(13)，当 $0 \leq \rho \leq h$ 时，一致收敛。它們的极限

$$Y_i = \lim_{n \rightarrow \infty} y_i^{(n)} \quad Z_i = \lim_{n \rightarrow \infty} z_i^{(n)} \quad (i=1,2) \quad (15)$$

存在，而且是 ρ 的連續函数。

(3) $Y_i, Z_i (i=1,2)$ 是积分方程(11)的解
等式(12.n)可写成

$$\left. \begin{aligned}
 y_i^{(n)} &= y_i^{\circ} + \int_0^{\rho} \left[f_i(\rho, z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-1)}) - f_i(\rho, Z_1, Z_2) \right] \rho d\rho + \\
 &\quad \int_0^{\rho} f_i(\rho, Z_1, Z_2) \rho d\rho \quad (i=1,2) \\
 z_i^{(n)} &= \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} (y_i^{(n)} - Y_i) \rho d\rho + \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} Y_i \rho d\rho \quad (i=1,2)
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 便得

$$\left. \begin{aligned}
 Y_i &= y_i^{\circ} + \int_0^{\rho} f_i(\rho, Z_1, Z_2) \rho d\rho \quad (i=1,2) \\
 Z_i &= \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} Y_i \rho d\rho \quad (i=1,2)
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

这就完成了积分方程(11)解案存在性的证明。至于唯一性的证明, 完全可以仿照通常微分方程教科书上关于高阶微分方程存在定理的证明来做^[4]。应该指出不能从方程(11)解的唯一性推断方程(5)的解也唯一。因对于给定的 m' 并不唯一确定 y_1°, y_2° 。

存在定理只保证方程(11)在 $(0, h)$ 区间内有解案存在。若当 $\rho = h$ 时 $\rho, Z_1(\rho), Z_2(\rho)$ 仍在区域 D 的内部, 那么可以延拓解案。总可以使 ρ, Z_1, Z_2 任意接近区 D 域的边界。

五 近似解

积分方程(8)显然满足存在定理中的假定, 因此可以用逐次逼近法求解。取

$$y_1^{(0)} = y_1^{\circ} \quad (18.1)$$

$$z_1^{(0)} = \frac{1}{2} y_1^{\circ} \quad (18.2)$$

$$y_2^{(0)} = y_2^{\circ} - \frac{1}{16} y_1^{\circ 2} \rho^2 \quad (18.3)$$

$$z_2^{(0)} = \frac{1}{2} y_2^{\circ} - \frac{1}{64} y_1^{\circ 2} \rho^2 \quad (18.4)$$

作为零级近似。我们注意到, 当 $y_1^{\circ} = \pm 2k^2, y_2^{\circ} = \frac{k^4}{8}$ 时, 此零级近似为方程(8)的准确解。按照上节给出的程序, 可求得以下各级近似。

$$y_1^{(1)} = y_1^{\circ} + \int_0^{\rho} \left[z_1^{(\circ)} z_2^{(\circ)} - \frac{k^4}{16} (1 - \rho^2) z_1^{(\circ)} \right] \rho d\rho = y_1^{\circ} - \frac{1}{4} y_1^{\circ} \alpha \rho^2 + \frac{1}{8} y_1^{\circ} \beta \rho^4 \quad (19.1)$$

$$z_1^{(1)} = \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} y_1^{(1)} \rho d\rho = \frac{1}{2} y_1^{\circ} - \frac{1}{16} y_1^{\circ} \alpha \rho^2 + \frac{1}{48} y_1^{\circ} \beta \rho^4 \quad (19.2)$$

$$y_2^{(1)} = y_2^{\circ} + \int_0^{\rho} \left[-\frac{1}{2} \left(z_1^{(\circ)} \right)^2 \right] \rho d\rho = y_2^{\circ} - \frac{1}{16} y_1^{\circ 2} \rho^2. \quad (19.3)$$

$$z_2^{(1)} = \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} y_2^{(1)} \rho d\rho = \frac{1}{2} y_2^{\circ} - \frac{1}{64} y_1^{\circ 2} \rho^2 \quad (19.4)$$

$$y_1^{(2)} = y_1^{\circ} - \frac{1}{4} y_1^{\circ} \alpha \rho^2 + \frac{1}{8} y_1^{\circ} \left(\frac{\alpha^2}{8} + \beta \right) \rho^4 - \frac{1}{72} y_1^{\circ} \alpha \beta \rho^6 + \frac{1}{384} y_1^{\circ} \beta^2 \rho^8 \quad (20.1)$$

$$z_1^{(2)} = \frac{1}{2} y_1^{\circ} - \frac{1}{16} y_1^{\circ} \alpha \rho^2 + \frac{1}{48} y_1^{\circ} \left(\frac{\alpha^2}{8} + \beta \right) \rho^4 - \frac{1}{576} y_1^{\circ} \alpha \beta \rho^6 + \frac{1}{3,840} y_1^{\circ} \beta^2 \rho^8 \quad (20.2)$$

$$y_2^{(2)} = y_2^{\circ} - \frac{1}{16} y_1^{\circ 2} \rho^2 + \frac{1}{128} y_1^{\circ 2} \alpha \rho^4 - \frac{y_1^{\circ 2}}{192} \left(\frac{\alpha^2}{16} + \frac{\beta}{3} \right) \rho^6 + \frac{y_1^{\circ 2} \alpha \beta}{6,144} \rho^8 - \frac{y_1^{\circ 2} \beta^2}{46,080} \rho^{10} \quad (20.3)$$

$$z_2^{(2)} = \frac{y_2^{\circ}}{2} - \frac{y_1^{\circ 2}}{64} \rho^2 + \frac{y_1^{\circ 2}}{768} \alpha \rho^4 - \frac{y_1^{\circ 2}}{1,536} \left(\frac{\alpha^2}{16} + \frac{\beta}{3} \right) \rho^6 + \frac{y_1^{\circ 2} \alpha \beta}{61,440} \rho^8 - \frac{y_1^{\circ 2} \beta^2}{552,960} \rho^{10} \quad (20.4)$$

$$y_1^{(3)} = y_1^{\circ} - \frac{y_1^{\circ}}{4} \alpha \rho^2 + \frac{y_1^{\circ}}{8} \left(\frac{\alpha^2}{8} + \beta \right) \rho^4 - \frac{y_1^{\circ} \alpha}{576} \left(8\beta + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{y_1^{\circ 2}}{16} \right) \rho^6 + \frac{y_1^{\circ}}{768} \left[2\beta^2 + \frac{5}{12} \alpha^2 \beta - \frac{y_1^{\circ 2}}{32} \left(\frac{5\alpha^2}{16} + \frac{\beta}{3} \right) \right] \rho^8 - \frac{y_1^{\circ} \alpha}{7,680} \left[\frac{23\beta^2}{15} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{y_1^{\circ 2}}{16} \left(\frac{7}{96} \alpha^2 + \frac{3}{5} \beta \right) \rho^{10} + \frac{y_1^{\circ}}{9,216} \left[\frac{\beta^3}{5} - \frac{y_1^{\circ 2}}{96} \left(\frac{2\beta^2}{5} + \frac{83\alpha^2\beta}{240} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\alpha^4}{128} \right) \right] \rho^{12} + \frac{y_1^{\circ 3} \alpha \beta}{123,863,040} \left(\frac{31\beta}{3} + \alpha^2 \right) \rho^{14} - \\
& -\frac{y_1^{\circ 3} \beta^2}{849,346,560} \left(5\beta + \frac{37}{16} \alpha^2 \right) \rho^{16} + \frac{47y_1^{\circ 3} \alpha \beta^3}{114,661,785,600} \rho^{18} - \\
& -\frac{y_1^{\circ 3} \beta^4}{42,467,328,000} \rho^{20} \quad (21.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1^{(3)} = & \frac{y_1^{\circ}}{2} - \frac{y_1^{\circ}}{16} \alpha \rho^2 + \frac{y_1^{\circ}}{48} \left(\frac{\alpha^2}{8} + \beta \right) \rho^4 - \frac{y_1^{\circ} \alpha}{576} \left(\beta + \frac{\alpha^2}{32} - \right. \\
& - \left. \frac{y_1^{\circ 2}}{128} \right) \rho^6 + \frac{y_1^{\circ}}{7,680} \left[2\beta^2 + \frac{5\alpha^2\beta}{12} - \frac{y_1^{\circ 2}}{32} \left(\frac{5\alpha^2}{16} + \frac{\beta}{3} \right) \right] \rho^8 - \\
& - \frac{y_1^{\circ} \alpha}{92,160} \left[\frac{23\beta^2}{15} - \frac{y_1^{\circ 2}}{16} \left(\frac{7\alpha^2}{96} + \frac{3\beta}{5} \right) \right] \rho^{10} + \frac{y_1^{\circ}}{129,024} \left[\frac{\beta^3}{5} - \right. \\
& - \left. \frac{y_1^{\circ 2}}{96} \left(\frac{2\beta^2}{5} + \frac{83}{240} \alpha^2 \beta + \frac{\alpha^4}{128} \right) \right] \rho^{12} + \frac{y_1^{\circ 3} \alpha \beta}{1,981,808,640} \left(\frac{31\beta}{3} + \right. \\
& + \left. \alpha^2 \right) \rho^{14} - \frac{y_1^{\circ 3} \beta^2}{15,288,238,080} \left(5\beta + \frac{37}{16} \alpha^2 \right) \rho^{16} + \\
& + \frac{47y_1^{\circ 3} \alpha \beta^3}{2,293,235,712,000} \rho^{18} - \frac{y_1^{\circ 3} \beta^4}{934,281,216,000} \rho^{20} \quad (21.2)
\end{aligned}$$

.....

$$\text{式中 } \alpha = \frac{k^4}{16} - \frac{y_2^{\circ}}{2} \quad \beta = \frac{k^4}{16} - \frac{y_1^{\circ 2}}{64} \quad (22)$$

取 $y_1^{(3)}, z_1^{(3)}, y_2^{(2)}, z_2^{(2)}$ 作为方程(8)的近似解, 分别记作 Y_1, Z_1, Y_2, Z_2 。通过变换(7), 可得:

$$\theta' = \rho Z_1 \quad s' = \rho Z_2 \quad (23)$$

式中 Z_1, Z_2 的表达式为式(21.2), (20.4), 其中尚含有两个常数 y_1°, y_2° 。它们应从边界条件(10.1)式决定, 即 y_1°, y_2° 应满足

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时 } Y_1 - (1-\nu)Z_1 = m' \quad Z_2 = 0 \quad (24)$$

当给定 m' 后, 从上式可解得相应的 y_1°, y_2° , (可能不止一组值) 将它们值代入(23)式, 便得方程(5)的解答。

六 邊緣力矩与邊緣轉角的关系

将(23) (24)式中 θ' , m' 的表达式代入(4)式, 可得邊緣力矩与邊緣轉角如下

$$m = (1 + \nu)k^2 + (Y_1)_{\rho=1} - (1 - \nu)(Z_1)_{\rho=1} \tag{25}$$

$$\Theta \equiv (\theta)_{\rho=1} = k^2 + (Z_1)_{\rho=1} \tag{26}$$

其中参数 y_1°, y_2° 尚須滿足 $(Z_2)_{\rho=1} = 0$ 。此条件是 y_2° 的二次代数方程式, 由

此可解得 y_2° , 它是 y_1° 和 k 的函数。把它代入(25)(26)式, 即得 $m - \Theta$ 曲綫的参数方程, 参变数为 y_1° 。对于給定的 k , (25)(26)式确定一条曲綫 (图二)。

每一条 $m - \Theta$ 曲綫都通过三个特別的点

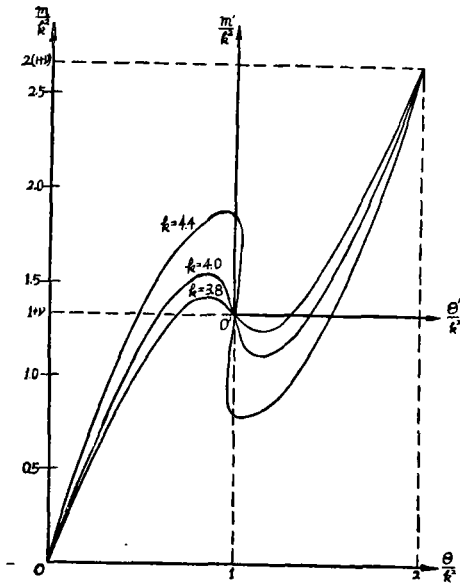
$$\begin{aligned} \text{当 } y_1^\circ = 0 \text{ 时 } (y_2^\circ = 0) \\ m = (1 + \nu)k^2 \quad \Theta = k^2 \end{aligned}$$

这是平板状态的解。

$$\begin{aligned} \text{当 } y_1^\circ = -2k^2 \text{ 时 } (y_2^\circ = \frac{k^4}{8}) \\ m = 0 \quad \Theta = 0 \end{aligned}$$

相应于初始状态。

$$\begin{aligned} \text{当 } y_1^\circ = 2k^2 \text{ 时 } (y_2^\circ = \frac{k^4}{8}) \\ m = 2(1 + \nu)k^2 \quad \Theta = 2k^2 \end{aligned}$$



图二 $M - \Theta$ 曲綫

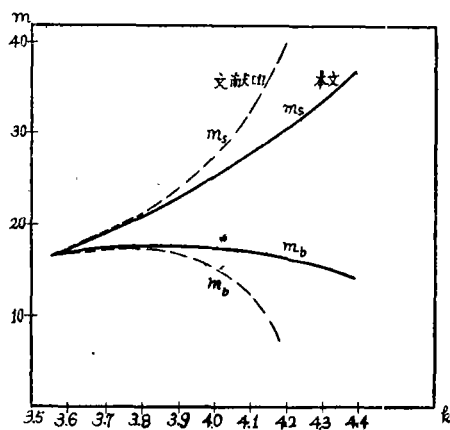
相当于扁球壳由內向外翻轉。

参数 y_1° 从 $-2k^2$ 变到零 (通常不是单调变化), 由(25)(26)式可得到扁球壳从起始状态弯曲到平板状态的 $m - \Theta$ 曲綫。至于 y_1° 从零变到 $2k^2$ 这一段曲綫, 可以从反对称性得到。因 $(Y_1)_{\rho=1}, (Z_1)_{\rho=1}$ 是 y_1° 的奇函数, $m - \Theta$ 曲綫关于 m' , Θ' 坐标是反对称的 (图二)。

对于不同的几何参数 k , 进行数值计算, 当 k 很小时, $m - \Theta$ 曲綫沒有极大和极小值; 当 k 大于某一值 k_1 时, $m - \Theta$ 曲綫就有一个极大和一个极小。图二中給出

了三条这样的曲线。它们分别对应于 $k=3.8, 4.0, 4.4$ ，泊松比一律取 $\frac{1}{3}$ 。

m 的极大值称跳进力矩，记作 m_s ；极小值称回跳力矩，记作 m_b 。 m_s, m_b 与 k 的关系表示在图三中，实线为本文的结果，虚线是文献^[1]得到的。



图三 m_s, m_b 与 k 的关系

七 临界 k

$m-\text{⊕}$ 曲线可分三类；第一类 $m-\text{⊕}$ 互相单值；第二类 ⊕ 是 m 的多值函数但 m 仍是 ⊕ 的单值函数，如图二中 $k=3.8, 4.0$ ；第三类 m 是 ⊕ 的多值函数，如图二中 $k=4.4$ 。第一类不产生跳跃现象，第二，

三类均产生跳跃。从第一类过渡到第二类的 k 值称为产生跳跃现象的临界 k ，记作 k_1 。从第二类过渡到第三类的 k 值称为保证 m 是 ⊕ 单值函数的临界 k ，记作 k_s 。

我们注意到随着 k 的增加， $m-\text{⊕}$ 曲线在 O' 点的切线向顺时针方向转动，当切线转过水平位置后， $m-\text{⊕}$ 曲线就出现有极大，极小值；当切线转过铅垂位置后 m 就不再是 ⊕ 的单值函数了。因此，当 $k=k_1$ 时 $\left(\frac{dm}{d\text{⊕}}\right)_{O'} = 0$ ；当 $k \rightarrow k_s$ 时 $\left(\frac{dm}{d\text{⊕}}\right)_{O'} \rightarrow \infty$ 。我们将根据这两个条件分别求出 k_1, k_s 。

为了求出 $m-\text{⊕}$ 曲线在 O' 点的斜率，只要考察平板状态邻近的解答。把 y_1^0 当作一阶小量，从边条件 $(Z_2)_{\rho=1} = 0$ 可知 y_2^0 应是二阶子量。略去(25)(29)式中二阶及二阶以上的小量，便得平板状态邻近的解答：

$$m = (1 + \nu)k^2 + y_1^0 \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{k^4}{16}\right) + \frac{5}{1,152} \left(\frac{k^4}{16}\right)^2 - \frac{1}{14,400} \left(\frac{k^4}{16}\right)^3 - \frac{1-\nu}{2} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{k^4}{16}\right) + \frac{13}{5,760} \left(\frac{k^4}{16}\right)^2 - \frac{73}{2,419,200} \left(\frac{k^4}{16}\right)^3 \right] \right\} \quad (27)$$

$$\text{⊕} = k^2 + \frac{y_1^0}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{12} \left(\frac{k^4}{16}\right) + \frac{13}{5,760} \left(\frac{k^4}{16}\right)^2 - \frac{73}{2,419,200} \left(\frac{k^4}{16}\right)^3 \right\} \quad (28)$$

k_1 应适合如下条件：

$$\frac{dm}{d\theta} = 0 \quad (29.1)$$

$$\text{或} \quad \frac{dm}{dy_1^0} = 0 \quad (29.2)$$

取 $\nu = \frac{1}{3}$ ，从式(29.2)解得：

$$k_1 = 3.54 \quad (30)$$

k_s 应满足的条件是

$$\frac{d\theta}{dy_1^0} = 0 \quad (31)$$

$$\text{解得：} k_s = 4.22 \quad (32)$$

k_s 与 ν 无关。

表一列出了临界 k 准确的上、下界。本文求得的 k_1 十分准确，误差在 0.6% 以内；但求得的 k_s 已低于下界，误差在 1.9% 到 2.4% 之间。

表一 临界 K 的准确值

参 考 文 献	K_1		K_s	
	上 界	下 界	上 界	下 界
[1]	3.5946	3.4813	4.369	4.237
本 文 附 录	3.56	3.54	4.32	4.30

八 小 挠 度 解 答

这里指的小挠度是相对于初始状态而说的，即 θ, S 很小，但相对于平板状态，乃是大挠度。在第六节曾指出过，扁球壳处于初始状态时， $y_1^0 = -2k^2$ ， $y_2^0 = \frac{k^4}{8}$ 。

$$\text{代入(22)式得} \quad \alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad (33)$$

故在小挠度的条件下， α, β 都是小量。从(25)(26)式中略去包含在 $Y_1 Z_1$ 里的 α, β 的高次项，可得：

$$m = (1 + \nu)k^2 + y_1^0 \left(1 - \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8}\right) + \frac{y_1^0 k^4}{18,432} (8\alpha - \beta) \\ - (1 - \nu) \left[\frac{y_1^0}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{24}\right) + \frac{y_1^0 k^4}{18,432} \left(\alpha - \frac{\beta}{10}\right) \right] \quad (34)$$

$$\textcircled{7} = k^2 + \frac{y_1^0}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{24} \right) + \frac{y_1^0 k^4}{18,432} \left(\alpha - \frac{\beta}{10} \right) \quad (35)$$

而 α, β 应适合如下条件

$$\left(72 - \frac{k^4}{16} \right) \beta - \left(72 - \frac{3k^4}{8} \right) \alpha = 0 \quad (36)$$

这是从(24)式的第二式略去高阶小量后得到的。从上式可解出 α ，然后代入(34)，(35)式，便得到 $m, \textcircled{7}$ 仅包含参数 k 与 y_1^0 的表达式。 $m - \textcircled{7}$ 曲线在起始点的斜率为：

$$\left(\frac{dm}{d\textcircled{7}} \right)_{y_1^0} = -2k^2 = \left(\frac{dm}{dy_1^0} \right)_{y_1^0} = -2k^2 : \left(\frac{d\textcircled{7}}{dy_1^0} \right)_{y_1^0} = -2k^2 \quad (37)$$

取 $\nu = \frac{1}{3}$ ， $k=0, 1, 2, 3, 4$ 。进行数值计算，把计算结果与线性理论的精确值^[1]一并列于表二

表二 $m - \textcircled{7}$ 曲线在起始点的斜率

k		0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
斜率	本文结果	1.333	1.344	1.490	1.977	2.779
	精确值	1.333	1.344	1.490	1.969	2.689

从表二可以看到，当 k 较小时、本文的结果非常理想，随着 k 的增加，误差逐渐增大，当 $k=4$ 时，误差增至 3.4%。这是不难理解的，(14.9) 式表明逐次逼近法的收敛快慢与常数 k 有关，显然，当 k 增大时 K 亦增大，这样就收敛得慢了。因此，对于较大的 k ，就应该取更高一级的近似。

九 结 论

本文用逐次逼近法分析扁球壳在边缘力矩作用下的大挠度问题。取三级近似进行讨论，获得下列结果：

1. 求得：产生跳跃现象的临界 $k=3.54$ 误差小于 0.6%；保证 m 是 $\textcircled{7}$ 单值函数的临界 $k=4.22$ ，偏低 1.9%—2.4%

2. 获得 $m - \textcircled{7}$ 曲线，特别是得到了 m 是 $\textcircled{7}$ 多值函数时的曲线。

本文得到的 $m - \textcircled{7}$ 曲线在起始点的斜率用线性理论的准确解检验，发现随着 k 的增加误差增大，当 k 比 3 小时，与准确解一致，当 $k=4$ 时，误差达 3.4%。这对大挠度理论来说，仍然是良好的。但对于比 4 大得多的 k ，应该取高一级的近似。

本文提出的方法适用于旋转扁壳（中央不开口）在对称载荷（无集中力）作用的大挠度问题。

最后，作者在研究过程中曾多次与郭金基，张滌明，刘德良，陈树坚等同志共同讨论，从中得到不少启发，向他们表示感谢。

附 录

临界 k 的准确值。

产生跳跃现象的临界 k 是特征值问题

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta') + \frac{k^4}{16} (1-\rho^2)\theta' = 0 \quad (38.1)$$

$$\text{当 } \rho = 1 \text{ 时 } \frac{d\theta'}{d\rho} + \nu \frac{\theta'}{\rho} = 0, \text{ 当 } \rho = 0 \text{ 时 } \theta' = 0 \quad (38.2)$$

的最小特征值⁽¹⁾。

$$\text{令 } \theta' = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \rho^{2n+1} \quad (39)$$

将上式代入方程(38.1), 解得

$$A_3 = -\frac{k^4}{128} A_1, \quad A_{2n+1} = -\frac{k^4}{64} \frac{(A_{2n-1} - A_{2n-3})}{n(n+1)} \quad n=2,3,4,\dots, \quad (40)$$

将(39)式代入边条件(38.2), 使得 k_1 应满足的特征方程

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1+\nu)A_{2n+1} = 0 \quad (41)$$

由于(38.1) (38.2)是齐次的, 因此幂级数(39)可相差一常数因子, 不妨令

$$A=1 \quad (42)$$

取 $\nu = \frac{1}{3}$, 将 k 从小增大逐次代入(41)式的左端, 发现当 $k \leq 3.54$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1+\nu)A_{2n+1} > 0, \text{ 而当 } k=3.56 \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1+\nu)A_{2n+1} < 0$$

故 $3.54 < k_1 < 3.56$ 。

k_1 是下面特征值问题的最小特征值⁽¹⁾

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta') + \frac{k^4}{16} (1-\rho^2)\theta' = 0 \quad (43.1)$$

$$\text{当 } \rho = 1 \text{ 时 } \theta' = 0; \text{ 当 } \rho = 0 \text{ 时 } \theta' = 0. \quad (43.2)$$

特征方程为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} = 0 \quad (44)$$

其中 A_{2n+1} 仍由(40)(42)式决定。

当 $k \leq 4.30$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} > 0$, 而当 $k = 4.32$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} < 0$, 因此有

$4.30 < k_c < 4.32$.

从特征方程(41), (44)原则上可以求得任意精确的 k_1, k_2 。特征方程(41), (44)左端的幂级数, 除去前面几项以外, 是一般项绝对值递减并趋于零的交错级数, 对于给定的 k , 容易判定级数的符号。

参 考 文 献

- [1] 胡海昌 球面扁薄圆壳的跳跃问题, (中国科学院力学研究室专刊, 力学问题集第一辑 1954.76-98.)。
- [2] Karman, T. von 钱学森 The Buckling of Spherical Shells by External Pressure (J. Aero. sci. Vol.7. No.2. 1939.43)。
- [3] А. А. березовский Нелинейные интегральные уравнения Теории пологих тонких оболочек, теории пластин и оболочек. (Тр. II Всесоюзной конференции 1961.120-123.)
- [4] В.В. 史捷班诺夫 微分方程教程 高等教育出版社. 1956 128-137.

On the Symmetrical Buckling of Shallow Spherical Shells

Chai Cheng-wu

Abstract

In this paper, we study the symmetrical buckling of shallow spherical shells under the action of edge moments by the method of successive approximations of integral-equations. This problem have been studied by wu Hai-cheng^[1], but his method is not valid when the edge-moments are many-valued functions of the edge rotation-angles.