时滞微分方程組解的稳定性

謝 大 来*

（西北大学）

摘 要

本文藉助于 Б С.Разумихин[2] 及 С К.Персидескии[4]方法和比較定理[1]，应用 V_ 函数，研究时滞微分方程組解的稳定性問題。幷給出了关于解的稳定性，漸近稳定性，对初始函数一致漸近稳定性及不稳定性定理，他們是文[2]-[6]相应定理的改进和推广。

本文藉助于 Wazewski 关于微分不等式的定理[1]及 Б.С.Разумихин[2]的思想，利用 Ляпунов 函数 v，研究时滞微分方程組解的稳定性問題。

所证明的解的稳定性、漸近稳定性、及对初始函数一致漸近稳定性的定理，改进和推广了 Б.С.Разумихин[2]及文[3][4][5][6]的相应定理；同时还证明了解的不稳定性定理，它是文[3]相应定理的改进。

我們研究时滞微分方程組[2]

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_j(t),\ x_{jk}(t-\tau),\ t) \quad (i,\ j=1,\cdots,n,\ k=1,\ \cdots,m) \qquad (A)$$

其間各泛函 X_i 在域 (H)：$\|y(-\tau)\|^{(h)} < H$，$t \geqslant t_0$，連續有界，且对除 t 之外其它变元滿足 $Lip.$ 条件，$X_i(0,\cdots 0,t) \equiv 0$，

而 mn 个函数 $X_{jk}(t-\tau)$ 在区間 $0 \leqslant \tau \leqslant h_{jk}(t)$ 上定义，$0 \leqslant h_{jk}(t) \leqslant h$，$h$ 为常数，而

$$\|y(-\tau)\|^{(h)} = \sup_{\substack{i=1,\cdots,n \\ 0 \leqslant \tau \leqslant h}} \left\{ |y_i(-\tau)| \right\};\ \|x\| = \sup_{i=1,\cdots,n} \{ |x_i| \},$$

在以下討論中，我們用到在区域 (H)：$\|x\| < H$，$t \geqslant t_0$ 中連續幷具有連續

本文于1965年8月4日收到。

* 作者是在我校进修的西北大学教师，本文在胡金昌教授指导下写成。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

偏导数的定正函数 $v(x,t)=v(x_1,\cdots x_n,t)$。設它通过方程組$(A)$对 t 的全导数为:

$$\frac{dv}{dt}=f(v,t)+g(x_i(t),x_{jk}(t-\tau),t)$$

并将方程 $\frac{du}{dt}=f(u,t)$满足条件 $u(t^*)=u^*$ 的解記为:

$$u(t)=u(u^*,t^*,t)$$

定义1: 所謂向量函数 $y(-\sigma)$ $(0\leqslant\sigma\leqslant h)$在指定的 t 值下满足条件(p)，指:

$$(p)\ \begin{cases} y(0)=x(t),\ x(t)\text{为}(A)\text{的解} \\ v(y(0),\ t)\geqslant u(v(y(-\sigma),\ t-\sigma),\ t-\sigma,\ t), \\ \qquad (0\leqslant\sigma\leqslant h) \end{cases}$$

因研究零解的稳定性时，只討論其附近解的性状，显然，若 m 为满足: $m\leqslant \min\limits_{\substack{t_0\leqslant t<\infty \\ 0\leqslant v\leqslant u_0}} \{f(u,t)\}$ 的数，(其中 u_0 可为某一很小的数)，那末如果 $y(-\sigma)$满足条件(p)必满足下面的条件(p'):

$$(p')\ \begin{cases} y(0)=x(t),\ x(t)\text{为}(A)\text{的解} \\ v(y(0),t)\geqslant v(y(-\sigma),t-\sigma)+m\sigma \end{cases}$$

其中 $m\sigma$ 一項，当 $m>0$ 时可略去，当 $m<0$ 时可代以 mh。

有时，(例如不易求得 $\frac{du}{dt}=f(u,t)$ 的解等情况)用条件(p')代替定理中的条件(p)是方便的。

用 $S_0(H,t_0,t)$ 記一切对应于初始函数 $\varphi(t),t_0-h\leqslant t\leqslant t_0$，$\|\varphi\|\leqslant H$ 的解 $x(\varphi,t_0,t)$所构成的函数段的集合: $\{x(\varphi,t_0,t-\sigma)\}$ $0\leqslant\sigma\leqslant h,t\geqslant t_0$

用 $S(H,t_0,t)$記某一包含 $S_0(H,t_0,t)$ 的函数集合;

$$\{y(-\sigma)\}\quad 0\leqslant\sigma\leqslant h$$

定理 1 假設: (i)存在定正函数 $v(x,t)$，其通过方程組(A)对 t 的全导数为:

$$\frac{dv}{dt}=f(v,t)+g(x_j(t),x_{jk}(t-\tau),t)$$

(ii)g 对于一切属于$S(H,t_0,t)$且满足条件(p)的向量函数 $y(-\sigma)$，$0\leqslant\sigma\leqslant h$，在$(H)$中成立关系

$$g(y_j(0),\ y_{jk}(-\tau),\ t)\leqslant 0 \qquad t\geqslant t_0$$

(iii) $$\frac{du}{dt}=f(u,t) \tag{E}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

f 定义于域 (G)：$|u|<R_1$，$t\geqslant t_0$；其 $R_1\geqslant R=Sup\{v(x,t),(x,t)\epsilon(H)\}$ 連續，滿足解的唯一性条件，$f(0,t)\equiv 0$，且零解在初値 $u_0\geqslant 0$ 的条件下为稳定。

則方程組(A)的零解为稳定。

証明：由 $v(x,t)$的定正性，存在定正函数 $w(x)$滿足

$$v(x,t)\geqslant w(x) \tag{1}$$

今对任給 $\varepsilon>o$，有正数 $l=\inf\limits_{\|x\|=\varepsilon} w(x)$ （2）

由条件(iii)，对此 $l>0$，存在 $\eta>0$，使当 $0<u(t_0)=u_0\leqslant\eta$ 时解 $u(u_0,t_0,t)<l$，对$t\geqslant t_0$

由 $v(0,t)\equiv 0$及其連續性，并应用方程組(A)的解对初始函数的連續依賴性，可求得$\delta>0$，$(\delta<\varepsilon)$使得一切定义于$t_0-h\leqslant t\leqslant t_0$上的初始函数$\varphi(t)$：$\|\varphi\|\leqslant\delta$，所对应的解$x(\varphi,t_0t)$在区間 $t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h$ 上成立不等式：

$$v(x(\varphi,t_0,t),t)\leqslant u(\eta,t_0,t) \tag{4}$$

可以证明：（4）式对一切 $t\geqslant t_0$ 成立；若不然，必有 $\varphi^*(t)$：$\|\varphi^*\|\leqslant\delta$ 及 $t^*>t_0+h$ 使得下列两不等式同时成立：

$$v(x(\varphi^*,t_0,t),t)\leqslant u(\eta,t_0,t),\ 当\ t_0\leqslant t\leqslant t^*, \tag{5}$$

$$v(x(\varphi^*,t_0,t),t)>u(\eta,t_0,t),\ 当\ t^*<t\leqslant t^*+e, \tag{6}$$

（e 为某一很小正数）

但这是不可能的，因由（6）及方程(E)解的唯一性，当 $t^*<t\leqslant t^*+e$ 时，以下关系成立：

$$v(x(\varphi^*,t_0,t),t)\geqslant u(v(x(\varphi^*,t_0,t-\sigma),t-\sigma),t-\sigma,t)$$
$$(0\leqslant\sigma\leqslant h)$$

即 $x(\varphi^*,t^0,t-\sigma)$，$0\leqslant\sigma\leqslant h$ 滿足条件(p)，由定理假設得知：当 $t^*<t\leqslant t^*+e$ 时，$g(x_j(\varphi^*,t_0,t),\ x_{jk}(\varphi^*,t_0,t-\sigma),t)\leqslant 0$ 亦即，当 $t^*<t\leqslant t^*+e$时

$$\frac{dv(x(\varphi^*,t_0,t),t)}{dt}\leqslant f(v(x(\varphi^*,t_0,t),t),t)$$

对此微分不等式及方程(E)，应用比較定理[1]，并注意到：

$v(x(\varphi^*,t_0,t^*),t^*)=u(\eta,t_0,t^*)$，得到：

$$v(x(\varphi^*,t_0,t),t)\leqslant u(\eta,t_0t) \tag{7}$$
$$t^*<t\leqslant t^*+e$$

（7）与（6）矛盾，故证明（4）式当 $t\geqslant t_0$ 时恒成立。

最后，证明对一切对应于初始函数 $\varphi(t)$，$t_0-h\leqslant t\leqslant t_0$，$\|\varphi\|\leqslant\delta$ 的解 $x(\varphi,t_0,t)$，

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当 $t \geqslant t_0$ 时，恒有 $\|x(\varphi, t_0, t)\| < \varepsilon$。

若不然，設对某一个 $\|\bar{\varphi}\| \leqslant \delta$，存在 $\bar{t} > t_0$ 使得：

$$\|x(\bar{\varphi}, t_0, t)\| < \varepsilon \quad 当\ t_0 \leqslant t < \bar{t};$$

而

$$\|x(\bar{\varphi}, t_0, \bar{t})\| = \varepsilon$$

由（1）与（2）式得到。

$$v(x(\bar{\varphi}, t_0, \bar{t}), \bar{t}) \geqslant W(x(\bar{\varphi}, t_0, \bar{t})) \geqslant l$$

得到矛盾，故定理得证。

注1 考虑此定理的特殊情况：即 $f(v, t) \equiv 0$，此时若定理条件(ii)中的向量函数 $y(-\sigma)$ 取自一切連續函数 $\|y(-\sigma)\|^{(h)} < H$，則得文[3]定理1。若还要求滿足条件(p)則得文[2]定理4。若 $y(-\sigma)$ 取自 $S_0(H, t_0, t)$ 且滿足条件(p)則得文[2]定理1。

例1 研究时滞方程

$$\frac{dx}{dt} = cost \cdot x(t) - ax(t) + b(t)\, x(t - h(t)), \quad a > 0,\ 0 \leqslant h(t) \leqslant h$$

的零解的稳定性

取

$$v(x, t) = \frac{x^2}{2a}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{cost}{a} x^2(t) - x^2(t) + \frac{b(t)}{a} x(t) x(t - h(t))$$

$$= 2cost \cdot v - x^2(t) + \frac{b(t)}{a} x(t) x(t - h(t))$$

$$g(x, x(t-h)) = -x^2(t) + \frac{b(t)}{a} x(t) x(t - h(t))$$

$$\frac{du}{dt} = 2cost \cdot u，其解为\ u = u_0 e^{2(sint - sint_0)},\ u \equiv 0 为稳定。$$

条件(p)为

$$\frac{x^2(t)}{2a} \geqslant \frac{x^2(t-\sigma)}{2a} e^{2(sint - sin(t-\sigma))}$$

即

$$|x(t-\sigma)| \leqslant |x(t)| e^{-(sint - sin(t-\sigma))} \leqslant |x(t)| e^2$$

代入 g，易見当 $|b(t)| \leqslant ae^{-2}$ 时 $g \leqslant 0$

由定理1得零解为稳定

特別，当 $0 < a \leqslant 1$ 时，不論 $0 < b(t)$ 如何小，用文[2]或文[3]的方法均难以判定 $\frac{dv}{dt}$ 的符号，但可用本定理給出結果。

推論1 照定理1的假設，更若方程(E)的零解在条件 $u_0 \geqslant 0$ 之下为渐近稳定，則方程組(A)的零解为渐近稳定。

证明 由定理1知組(A)的零解为稳定。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

根据方程(E)的零解在 $u_0 \geqslant 0$ 之下漸近稳定的假設，存在 $\eta_0 > 0$，使当 $0 \leqslant u_0 \leqslant \eta_0$ 时，其对应解 $u(u_0, t_0, t)$ 滿足：

$$\lim_{t \to \infty} u(u_0, t_0, t) = 0 \tag{8}$$

类似定理 1 同样可证：存在 $\delta_0 > 0$，使当初始函数 $\varphi(t)$ $t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0$ 滿足 $\|\varphi\| \leqslant \delta_0$ 时，将对应解 $x(\varphi, t_0, t)$ 代入 $v(x, t)$ 后，下列关系成立：

$$v(x(\varphi, t_0, t), t) \leqslant u(\eta_0, t_0, t) \qquad t \geqslant t_0$$

由(8)式得：　$\lim\limits_{t \to \infty} v(x(\varphi, t_0, t), t) = 0$

再由 $v(x, t)$ 的定正性，得 $\lim\limits_{t \to \infty} x(\varphi, t_0, t) = 0$

故已証明組(A)的零解为漸近稳定。

定义2[4]　函数 $v(x, t)$ 称为强定正的，如果它在域(H)中是定正的，其次若对 $\eta > 0$，用 $D(\eta)$ 記滿足不等式 $v(x, t) \leqslant \eta$ 的(H)中的点集合，将集 $D(\eta)$ 与平面 $t = t^* \geqslant t_0$ 的交記为 $\sigma(\eta, t^*)$，則存在数 $B > 0$ 使对一切滿足 $B \geqslant \eta > 0$ 的 η，点 $(t^*, x) \in \sigma(\eta, t^*)$ 滿足条件：当 $t^* \to \infty$ 时，$max \|x\| \to 0$

推論 2　照定理 1 的假設，更若 $v(x, t)$ 为强定正函数，則方程組(A)的零解对初始函数为一致漸近稳定。

証明　由定理 1 得知組(A)的零解为稳定。

按定理 1 的証明，对强定正函数 $v(x, t)$ 定义中的 $B > 0$．存在 $\delta_0 > 0$，使得当 $\|\varphi\| \leqslant \delta_0$ 时，一切解 $x(\varphi, t_0, t)$，当 $t \geqslant t_0$ 时滿足：$v(x(\varphi, t_0, t), t) \leqslant B$

再根据强定正函数的定义，得到

对一切 $\|\varphi\| \leqslant \delta_0$，一致的有 $\lim\limits_{t \to \infty} x(\varphi, t_0, t) = 0$

故(A)的零解对初始函数为一致漸近稳定。

注 2　如将方程組(A)代以常微分方程組，推論 2 当然成立，此时它是文[4]定理 2 充分条件的推广，本身也是零解对初值一致漸近稳定的必充条件；幷包括文[5]定理 1 及文[6]一定理为其特例，因在这些定理条件下，(E)的零解为稳定，且文[5],[6]中的函数 v 为强定正函数之故。

Б. С. Разумихин，仅研究了零解的稳定性和漸近稳定性，在这里，我們再給出零解不稳定性的定理。其証明方法类似文[7]証明漸近稳定性的方法。

定理 2　假設对方程組(A)存在滿足以下条件的函数 $v(x, t)$，定义于域(H)：$\|x\| < H$，$t \geqslant t_0$

(i)　$v(0, t) \equiv 0$

(ii)　对一切 $t \geqslant t_0$，在原点任意小的邻域中，有域 $v > 0$ 存在。

(iii) 在域 $v > 0$ 中函数 v 有界。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(iV) 設v通过方程組(A)对t的全导数为

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_A = U(x_j(t), x_{jk}(t-\tau), t)$$

而在域$v>0$中的一切滿足条件:

$$v(y(-\sigma),\ t-\sigma) > f(v(x(t),t)) \qquad (9)$$
$$0 < \sigma \leqslant h$$

的連續曲綫$y(-\sigma)$上有$U(y_j(0),\ y_{jk}(-\sigma), t) > 0$

而在域$v \geqslant \alpha(\alpha>0)$中的一切滿足(9)的連續曲綫$y(-\sigma)$上，有$U(y_j(0), y_{jk}(-\sigma), t) \geqslant l(\alpha) > 0$。上面的$f(\gamma)$为任一連續函数，滿足条件：$0<f(\gamma)<\gamma$，$\gamma>0$；$f(\gamma'')-f(\gamma')>0$，当$\gamma''>\gamma'$。　(10)

則方程組(A)的零解为不稳定。

証明　1°对已給的无論怎样小的数$\delta>0$,我們总可在域$v>0$中选初始函数$\varphi(t)$，使：$\|\varphi\| \leqslant \delta$，設其对应解为$x(\varphi, t_0, t)$，記 $v_0 = \inf\limits_{t_0-h \leqslant t \leqslant t_0} \{v(\varphi(t), t)\}$，类似以前可証：当$t \geqslant t_0$，而解$x(\varphi, t_0, t)$未走出$(H)$时，恒有

$$v(x(\varphi, t_0, t), t) \geqslant v_0 \qquad (11)$$

2° 現証：如果对某个$\gamma>0$，存在有数$\alpha(\gamma)>0$，$T(\gamma)>0$，使得每当$t \geqslant t_0 + T(\gamma)$，而$v(x(\varphi, t_0, t), t) \leqslant \gamma$时，在曲綫段$x(\varphi, t_0, t-\sigma)$，$0 \leqslant \sigma \leqslant h$上有

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_A > \alpha(\gamma)。 \qquad (12)$$

那末，若$x(\varphi, t_0, t)$不走出(H)（若走出(H)則已証不稳定），必存在$\overline{T}(\gamma)$，当$t \geqslant t_0 + \overline{T}(\gamma)$时，有

$$v(x(\varphi, t_0, t), t) > \gamma \qquad (13)$$

首先証明：若当$t^* \geqslant t_0 + \overline{T}(\gamma)$时，$v(x(\varphi, t_0, t^*), t^*) > \gamma$，則对一切$t \geqslant t^*$恒有$v(x(\varphi, t_0, t), t) > \gamma$；若不然，設当$t^{**} > t^*$不等式开始破坏，則在$t^{**}$附近，

一方面有　$v(x(\varphi, t_0, t), t) > \gamma$，当　$t \in (t^{**} - \varepsilon, t^{**})$

另一方面由(12)有　$v(x(\varphi, t_0, t), t) < \gamma$，当　$t \in (t^{**} - \varepsilon, t^{**})$

便得到矛盾。

其次証明：$v(x(\varphi, t_0, t), t)$必有某一时刻大于γ，因为由(12)，在$v \leqslant \gamma$的一切时間內，有：

$$v(x(\varphi, t_0, t), t) - v(x(\varphi, t_0, t_0+T(\gamma)), t_0+T(\gamma)) \geqslant \alpha(\gamma)[t - t_0 - T(\gamma)]$$

但因v在域$v>0$中有界，故必有某一时刻，使$v(x(\varphi, t_0, t), t)$大于γ。总括以上証明，知若解不走出(H)，必有$\overline{T}(\gamma)$，当$t \geqslant t_0 + \overline{T}(\gamma)$时，$v>\gamma$。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

3° 再证：在本定理条件下，对一切 $\gamma>0$，必存在数 $\alpha(\gamma)>0$，$T(\gamma)>0$，使得在滿足条件 $v(x(\varphi,t_0,t),t)\leqslant\gamma$ 的曲綫段 $x(\varphi,t_0,t-\sigma)$ $(0\leqslant\sigma\leqslant h)$上，有

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_A>\alpha(\gamma),\quad t\geqslant t_0+T(\gamma).$$

显然，当$\gamma<v_0$时，論断成立，这因 $v(x(\varphi,t_0,t),t)\geqslant v_0$的原故。现証对一切$\gamma>0$論断成立，若不然，設$\gamma^*$为此論断成立的一切 γ 的上界。根据(10)存在 $\eta>0$，使得

当 $\gamma^*-\eta\leqslant\gamma\leqslant\gamma^*+\eta$ 时，　　$\gamma-f(\gamma)>2\eta$

由2°及 γ^* 为上界的定义，存在 $\overline{T}(\gamma^*-\eta)>0$，

当 $t\geqslant t_0+\overline{T}(\gamma^*-\eta)$时，有 $v(x(\varphi,t_0,t),t)>\gamma^*-\eta$

故当 $t\geqslant t_0+\overline{T}(\gamma^*-\eta)+h$ 时，若滿足不等式：

$v(x(\varphi,t_0,t),t)\leqslant\gamma^*+\eta$，則必滿足不等式

$v(x(\varphi,t_0,t-\sigma),t-\sigma)>\gamma^*-\eta>f(\gamma^*+\eta)\geqslant f(v(x(\varphi,t_0,t),t))$，$(0\leqslant\sigma\leqslant h)$

即滿足(9)，由(iV)得 $\left(\frac{dv}{dt}\right)_A\geqslant l(\gamma^*-\eta)=\alpha(\gamma^*+\eta)>0$，当 $t\geqslant t_0+\overline{T}(\gamma^*-\eta)+h=t_0+T(\gamma^*+\eta)$

此与 γ^* 为上界的假設矛盾，故論断对一切 $\gamma>0$ 成立。

最后，再应用2°的結果，若 $x(\varphi,t_0,t)$不走出域(H)

則 $\lim\limits_{t\to\infty} v(x(\varphi,t_0,t),t)=\infty$

这又与 $v(x,t)$在域 $v>0$中为有界的假設矛盾，故定理得证。

注4　考虑定理2的特殊情况：即将条件(iV)中要求 $y(-\sigma)$滿足(9)的限制略去，便得文[3]的不稳定性定理。

例2　应用定理2研究时滞方程組

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-xy^2\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=2xy-2y^3-ay^2x^2(t-h(t))+\alpha y^2y(t-h(t)),\quad 0\leqslant h(t)\leqslant h\end{cases}$$

令 $v=y-x^2$　$v>0$ 区域：即 $y=x^2$所界的原点邻域的上部区域。

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=-2x(y-xy^2)+2xy-2y^3-\alpha y^2x^2(t-h(t)+ay^2y(t-h(t))\\&=-2y^2[y-x^2]+ay^2[y(t-h(t))-x^2(t-h(t))]\end{aligned}$$

若取 $f(\gamma)=K\gamma$，$0<K<1$；易見当 $a>\dfrac{2}{K}$ 时，便滿足定理2的一切条件，故此时零解为不稳定。

本文写作中，胡金昌教授曾給于热情鼓励和指导，作者特此致謝。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参考文献

〔1〕 Wažewski.T., Systômes des èquations et des iuèqalitès diffèrentielles ordinaires anx dexièmes membres monotones et leurs applications, Ann. Soc, Polon. Math., 23(1950) 112-166.

〔2〕 Разумихин Б.С., Об устойчивости систем с запаздыванием, ПММ, 20, В. 4(1956), 500-512.

〔3〕 Эльсгольц Л. Э. Качественные Методы В Математическом анализе.(1955) 239-242.

〔4〕 Персидскии С.К.Ко второй методе Ляпунова ПММ, 25 : 1 (1961) 17-23.

〔5〕 梁永富 关于李雅普諾夫第二方法的几个問題。四川大学学报（自然科学） 1964年第3期 61-68

〔6〕 契塔耶夫 Н.Г. 运动的稳定性(中譯本) 第28頁。

〔7〕 Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.(1959) 184-186.

On the Stability of Solutions of Delay Differential Equations

Hsieh Da-lai

Abstract

In this paper we use the Liapunov-functions, by the aid of the methods of Б.С. Разумихин[2], of С.К. Персидский[4] and the comparison theorem, to examine the stability of solutions of delay differential equations. We give the stabiiity, asymptotic stability, equiasymptotic stability and instability theorems. They are the improvements and extensions of corresponding theorems of papers[2]-[6].

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net