

# 分离式地下球壳结构计算

中山大学数学力学系\*  
广东省建筑设计院

## 摘 要

本课题是在兴建地下油库的实践中提出来的,在地下油库的兴建中要考虑到地层抗力对结构物的影响。在解决这个问题的过程中我们共同协作,在以下两个方面进行了研究:

一、当结构是球形薄壳面时,在地层压力作用下,壳面产生地层抗力的分布(包括抗力零点的位置,抗力曲线方程),从而估计壳面所受抗力之大小。

二、在地层压力及地层抗力作用下,球形壳面及环梁内力的计算方法。

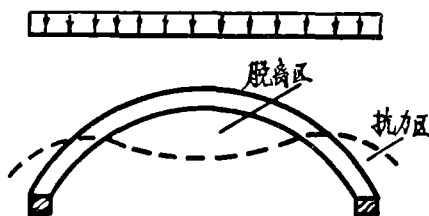
本文提出的一些基本方法,在其他旋转壳体也可以采用。

地下空间结构适用于地下储油库及厂房等。在岩层条件较好(坚硬)的情况下,可采用分离式地下空间结构;在岩层条件较差(松散、渗水)的情况下,则必须采用整体式空间结构。

分离式地下空间结构,由薄壳顶盖及边缘加劲环(环梁)所组成。我们现在研究球壳顶盖的情形。加劲环主要承受由壳面经向传来的压力,起箍紧作用。地下空间结构与地面空间结构,在设计上不同之处在于前者必须考虑地层抗力的影响,因而在数学处理上遭遇了较大的困难。但另一方面,在设计中若能利用地层抗力,却能节省较多的材料。

下面叙述有抗力的情况下,分离式地下球壳结构中球壳和加劲环的各种内力和有关数据的计算问题。

地下空间结构,由于与它周围地层紧紧接触,在受荷的过程中,其变形不能不受到地层的限制,一部分结构离开地层,形成脱离区;而另一部分则紧压地层,引起地层对它的反作用力——弹性抗力,而形成抗力区。抗力的大小是随外力大小、结构变形以及地层的性质而定(见图一)。



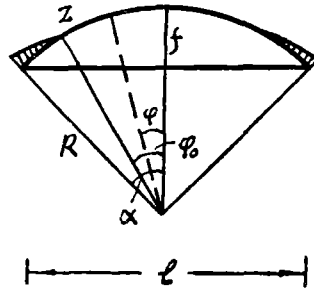
(图一)

\* 执笔人: 许淞庆 傅凯新

## (一) 薄壳顶盖内力计算

薄壳顶盖是为了保护下部使用空间、承受垂直地层压力的壳体，一般采用旋转薄壳。考虑到开挖土方量及加劲环（环梁）应力都不宜过大，我们认为壳体高度  $f$  与跨度  $l$  之比以  $\frac{1}{7} \sim \frac{1}{3}$  为宜。我们现在研究的是球面薄壳的情形。

在地层压力及薄壳自重的作用下，考虑地下球壳的平衡条件时，应将地层抗力作为外力的一个组成部分。设  $k$  为地层弹性压缩系数， $w$  为球壳的法向位移。则由局部变形理论抗力为  $|kw|$ 。以  $Z$  表示  $w=0$  的终点的位置，其对应的余纬角为  $\varphi_0$ ；并设  $\varphi = \alpha$  为球壳底边的余纬角。



(图二)

在开始讨论之前，我们先作一符合实际情况的假定：即设球壳面沿经线自点  $Z(w=0)$  开始，承受地层抗力，在  $Z$  点以上球壳面不承受地层抗力。即设（见图二）

$$kw < 0, \text{ 当 } \varphi \in (\varphi_0, \alpha)$$

$$kw = 0, \text{ 当 } \varphi \in (0, \varphi_0]$$

在这种情形下，球壳的平衡方程以及弹性定律表为下列方程：

$$(1') \quad \frac{d}{d\varphi} (N_{\varphi} \sin \varphi) - N_{\theta} \cos \varphi - Q_{\varphi} \sin \varphi = -RP \sin^2 \varphi - RP_0 \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

$$(2') \quad \frac{d}{d\varphi} (Q_{\varphi} \sin \varphi) + N_{\theta} \sin \varphi + N_{\varphi} \sin \varphi = -RP \sin \varphi \cos \varphi - RP_0 \cos^2 \varphi \sin \varphi + Rkw \sin \varphi$$

$$(3') \quad \frac{d}{d\varphi} (M_{\varphi} \sin \varphi) - M_{\theta} \cos \varphi = RQ_{\varphi} \sin \varphi$$

$$(4') \quad N_{\varphi} = \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{1}{R} \left[ \frac{du}{d\varphi} - w + \mu(uctg\varphi - w) \right]$$

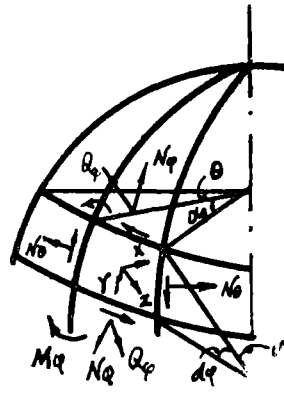
$$(5') \quad N_{\theta} = \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{1}{R} \left[ uctg\varphi - w + \mu \left( \frac{du}{d\varphi} - w \right) \right]$$

$$(6') \quad M_{\varphi} = -\frac{D}{R} \left[ \frac{d\psi}{d\varphi} + \mu\psi ctg\varphi \right]$$

$$(7') \quad M_{\theta} = -\frac{D}{R} \left[ \psi ctg\varphi + \mu \frac{d\psi}{d\varphi} \right]$$

$$(8') \quad \psi = \frac{u + \frac{dw}{d\varphi}}{R} \quad (\text{表经线微元旋转的角度})$$

其中： $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  为壳体的挠曲刚度， $E$  为弹性模量， $\mu$  为泊松比， $h$  为球壳的厚度， $u$  为经向位移， $w$  为法向位移， $N_\varphi$  为经向力， $N_\theta$  为纬向力， $M_\varphi$  为经向弯矩， $M_\theta$  为纬向弯矩， $Q_\varphi$  为横向力， $R$  为球壳的半径。又  $P$  为球壳单位面积自重， $P_0$  为球壳单位水平面积的地层压力。内力及位移的正向如（图三）所示。此外，(2') 式中的  $Rkw\sin\varphi$  一项是由于考虑到壳面有抗力时的结果，在相反的情形下这一项为零。



(图三)

I、按无矩理论计算

现在先按无矩理论在  $\varphi \in [\varphi_0, \alpha]$  区间对壳体进行计算。令  $M_\varphi = M_\theta = Q_\varphi = 0$

此时上列方程可改写成（为了简单起见，在以后的推导中总假定  $\mu = 0$ ，这在钢筋混凝土结构中是允许的）：

$$(1) \quad \frac{d}{d\varphi} (N_\varphi \sin\varphi) - N_\theta \cos\varphi = -RP\sin^2\varphi - RP_0\cos\varphi\sin^2\varphi,$$

$$(2) \quad N_\varphi + N_\theta = -RP\cos\varphi - RP_0\cos^2\varphi + Rkw,$$

$$(3) \quad N_\varphi = \frac{Eh}{R} \left( \frac{du}{d\varphi} - w \right),$$

$$(4) \quad N_\theta = \frac{Eh}{R} \left( w\operatorname{tg}\varphi - w \right).$$

1) 抗力区域零点  $Z$  位置的近似确定

由(1)及(2)消去  $N_\theta$  得

$$\frac{dN_\varphi}{d\varphi} \sin\varphi + 2N_\varphi \cos\varphi = -R(P + P_0\cos\varphi) + Rkw\cos\varphi$$

由此得

$$(5) \quad N_\varphi = -\frac{RP}{1 + \cos\varphi} - \frac{RP_0}{2} + \frac{Rk}{\sin^2\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} w\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$$

代入(2)得

$$(6) \quad N_\theta = RP \left( \frac{1}{1 + \cos\varphi} - \cos\varphi \right) + RP_0 \left( \frac{1}{2} - \cos^2\varphi \right) -$$

$$- \frac{Rk}{\sin^2 \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} w \cos \varphi \sin \varphi d\varphi + Rkw$$

又由(4)得  $u - tg\varphi \left( \frac{R}{Eh} N_{\theta} + w \right) = 0$ , 以(6)代入得:

$$(7) \quad u - tg\varphi \left\{ \frac{R^2}{Eh} \left[ P \left( \frac{1}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right) + P_0 \left( \frac{1}{2} - \cos^2 \varphi \right) - \frac{k}{\sin^2 \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} w \cos \varphi \sin \varphi d\varphi + kw \right] + w \right\} = 0$$

設壳体在下边缘不下沉(这数量是很小的)則当 $\varphi = \alpha$ 时有:

$$u(\alpha) \sin \alpha + w(\alpha) \cos \alpha = 0$$

因此, 由(7)可得:

$$(8) \quad f(\varphi_0, \alpha) \equiv P \left( \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha \right) + P_0 \left( \frac{1}{2} - \cos^2 \alpha \right) + \frac{k}{\sin^2 \alpha} \int_{\alpha}^{\varphi_0} w \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + (k + a \csc^2 \alpha) w(\alpha) = 0,$$

这里

$$a = \frac{Eh}{R^2},$$

把(8)的左边展为 $\varphi_0 - \alpha$ 的幂級数:

$$f(\varphi_0, \alpha) = f(\alpha, \alpha) + \frac{\varphi_0 - \alpha}{1!} f'_{\varphi_0}(\alpha, \alpha) + \frac{(\varphi_0 - \alpha)^2}{2!} f''_{\varphi_0}(\alpha, \alpha) + \dots$$

由于按弧度計算时,  $|\varphi_0 - \alpha|$  很小, 故可以近似地只取展开式前两项, 因而从(8)式得到:

$$(9) \quad P \left( \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha \right) + P_0 \left( \frac{1}{2} - \cos^2 \alpha \right) + (k + a \csc^2 \alpha) w(\alpha) + (\varphi_0 - \alpha) k w(\alpha) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 0$$

由(9)可以看到抗力区域零点Z的位置所对应的余緯角 $\varphi_0$ 与 $\alpha$ 有关。注意到当 $\alpha = \varphi_0$ 时(一般是 $\varphi_0 \leq \alpha$ ),  $w(\alpha) = w(\varphi_0) = 0$ , 从(9)得

$$P \left( \frac{1}{1 + \cos \varphi_0} - \cos \varphi_0 \right) + P_0 \left( \frac{1}{2} - \cos^2 \varphi_0 \right) = 0$$

化簡得

$$(10) \quad 2P_0 \cos^3 \varphi_0 + 2(P_0 + P) \cos^2 \varphi_0 - (P_0 - 2P) \cos \varphi_0 - (P_0 + 2P) = 0$$

命  $x = \cos \varphi_0$  得

$$(11) \quad F(x) \equiv P_0(2x^2 - 1)(x + 1) + 2P(x^2 + x - 1) = 0$$

由于

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2P\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) > 0,$$

$$F\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = P_0 \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} < 0$$

所以(11)有一个正根  $x = x^* > 0$  存在

$$\frac{\sqrt{2}}{2} > x^* > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

由此推知, (10)有根  $\varphi_0 = \varphi_0^*$  使得

$$\frac{\sqrt{2}}{2} > \cos \varphi_0^* > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

亦即  $45^\circ < \varphi_0^* < 51^\circ 49'$

当然, (11)是  $x$  的三次方程, 它还应该有二个根, 但不管  $P_0 > 0$  及  $P > 0$  为何数, 即不管  $P_0 - 2P \geq 0$  或  $\leq 0$ , 在(11)的各系数之间的符号都只有一个变号, 因此, 按照方程式论的符号法则, (11)只能有一个正根  $x = x^*$ , 其余二根或者都是负根或者是一对相配复根, 按照  $P_0$  及  $P$  的具体数值而定。但  $x = \cos \varphi_0$  而  $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以必须  $\cos \varphi_0 > 0$ , 因此, (11)的其他二根均不适用。

此外, 结合(9)式不难用初等分析的方法得到:

$$(a) \quad \text{当 } a < \varphi_0^* \text{ 时 } w(a) > 0,$$

$$(b) \quad \text{当 } a > \varphi_0^* \text{ 时 } w(a) < 0.$$

也就是说, 只有当  $a > \varphi_0^*$  时球壳面上才会有抗力出现; 当  $a < \varphi_0^*$  时, 特别地当  $a \leq 45^\circ$  时, 整个壳面任何部份都无抗力出现。

现在由(9)解出  $\varphi_0 - a$  与  $w(a)$  的关系:

$$(12) \quad \varphi_0 - a = \frac{P \left( \cos a - \frac{1}{1 + \cos a} \right) + P_0 \left( \cos^2 a - \frac{1}{2} \right) - (k + a \csc^2 a) w(a)}{k w(a)} \operatorname{tga}$$

为了具体计算出  $\varphi_0$  及  $w(a)$  的数值, 仅有一个方程(12)是不够的。我们还要建立一个  $\varphi_0$  及  $w(a)$  的关系式, 由(3)及(4)得

$$N_\varphi + N_\theta = \frac{Eh}{R} \left( \frac{du}{d\varphi} + u \operatorname{ctg} \varphi - 2w \right)$$

代入(2), 消去  $N_\varphi + N_\theta$  得

$$\frac{du}{d\varphi} + u \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{P}{a} \cos \varphi - \frac{P_0}{a} \cos^2 \varphi + \left( \frac{k}{a} + 2 \right) w$$

以积分因子  $\sin \varphi$  乘全式, 并由  $\varphi_0$  到  $\varphi$  积分得

$$u \sin \varphi - u(\varphi_0) \sin \varphi_0 = \frac{P}{2a} (\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi_0) + \frac{P_0}{3a} (\cos^3 \varphi - \cos^3 \varphi_0) + \left( \frac{k}{a} + 2 \right) \int_{\varphi_0}^{\varphi} w \sin \varphi d\varphi$$

为了求得  $u(\varphi_0)$ , 以  $\varphi = \varphi_0$  代入(7)得

$$u(\varphi_0) = \operatorname{tg} \varphi_0 \left[ \frac{P}{a} \left( \frac{1}{1 + \cos \varphi_0} - \cos \varphi_0 \right) + \frac{P_0}{a} \left( \frac{1}{2} - \cos^2 \varphi_0 \right) \right]$$

代入上式, 移项并整理后, 得

$$u = u(\varphi) = \frac{P}{2a} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} + \frac{P}{a \sin \varphi} \left[ -\frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} \left( \frac{1}{1 + \cos \varphi_0} - \cos \varphi_0 \right) \right] + \frac{P_0}{3a} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin \varphi} + \frac{P_0}{a \sin \varphi} \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} \left( \frac{1}{2} - \cos^2 \varphi_0 \right) \right] + \frac{k + 2a}{a \sin \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} w \sin \varphi d\varphi$$

利用条件:  $\varphi = a$  时  $u(a) \sin a + w(a) \cos a = 0$ , 以上式结果代入并化简得到:

$$f(\varphi_0, a) \equiv \frac{P}{2} \cos^2 a + \frac{P}{2} \left( \cos^2 \varphi_0 - 4 + \frac{2}{\cos \varphi_0} \right) + \frac{P_0}{3} \cos^2 a + \frac{P_0}{6} \left( 4 \cos^3 \varphi_0 - 9 \cos \varphi_0 + \frac{3}{\cos \varphi_0} \right) + (k + 2a) \int_{\varphi_0}^a w \sin \varphi d\varphi + a w(a) \cos a = 0$$

按近似展开

$$f(\varphi_0, a) = f(a, a) + (\varphi_0 - a) f'_{\varphi_0}(a, a)$$

得

$$P \left( \cos^2 a - 2 + \frac{1}{\cos a} \right) + \frac{P_0}{2} \left( 2 \cos^3 a - 3 \cos a + \frac{1}{\cos a} \right) + a w(a) \cos a + (\varphi_0 - a) \left[ P \sin a \left( -\cos a + \frac{1}{\cos^2 a} \right) + \frac{P_0 \sin a}{2} \left( -4 \cos^2 a + 3 + \frac{1}{\cos^2 a} \right) - (k + 2a) w(a) \sin a \right] = 0$$

由此解出  $\varphi_0 - a$  得

$$(13) \quad \rho_0 - a = \frac{P \left( \cos^2 a - 2 + \frac{1}{\cos a} \right) + \frac{P_0}{2} \left( 2 \cos^3 a - 3 \cos a + \frac{1}{\cos a} \right) + aw(a) \cos a}{\left[ P \left( \cos a - \frac{1}{\cos^2 a} \right) + \frac{P_0}{2} \left( 4 \cos^2 a - 3 - \frac{1}{\cos^2 a} \right) + (k + 2a)w(a) \right] \sin a}$$

把(12)和(13)联立起来, 消去  $\rho_0 - a$ , 得到一个确定  $w(a)$  的关系式:

$$\frac{P \left( \cos^2 a - 2 + \frac{1}{\cos a} \right) + \frac{P_0}{2} \left( 2 \cos^3 a - 3 \cos a + \frac{1}{\cos a} \right) + aw(a) \cos a}{\left[ P \left( \cos a - \frac{1}{\cos^2 a} \right) + \frac{P_0}{2} \left( 4 \cos^2 a - 3 - \frac{1}{\cos^2 a} \right) + (k + 2a)w(a) \right] \sin a} = \frac{P \left( \cos a - \frac{1}{1 + \cos a} \right) + P_0 \left( \cos^2 a - \frac{1}{2} \right) - (k + a \operatorname{csc}^2 a)w(a)}{kw(a)}$$

将上式移项并整理可以得到关于  $w(a)$  的二次代数方程:

$$Aw^2(a) + Bw(a) + C = 0,$$

其中:

$$A = \sin^2 a (k + 2a)(k + a \operatorname{csc}^2 a) + ak \cos^2 a = (ak + k^2) \sin^2 a + 2ak + 2a^2,$$

$$B = \sin^2 a \left\{ \left[ P \left( \cos a - \frac{1}{\cos^2 a} \right) + \frac{P_0}{2} \left( 4 \cos^2 a - 3 - \frac{1}{\cos^2 a} \right) \right] (k + a \operatorname{csc}^2 a) + \left[ P \left( \frac{1}{1 + \cos a} - \cos a \right) + P_0 \left( \frac{1}{2} - \cos^2 a \right) \right] (k + 2a) \right\} + k \cos a \left[ P \left( \cos^2 a - 2 + \frac{1}{\cos a} \right) + \frac{P_0}{2} \left( 2 \cos^3 a - 3 \cos a + \frac{1}{\cos a} \right) \right],$$

$$C = \sin^2 a \left[ P \left( \cos a - \frac{1}{\cos^2 a} \right) + \frac{P_0}{2} \left( 4 \cos^2 a - 3 - \frac{1}{\cos^2 a} \right) \right] \times \left[ P \left( \frac{1}{1 + \cos a} - \cos a \right) + P_0 \left( \frac{1}{2} - \cos^2 a \right) \right].$$

从  $w(a)$  的二次方程, 可以解出  $w(a)$ 。但是我们所需要的只是负根, 因为负根表示壳体下边缘的法向变位指向岩层, 这时才引起岩层抗力。

$w(a)$  求出后, 代入(12)或(13), 可求得  $\rho_0$  之值。当然, 这个抗力区域零点的确定是近似的, 因为它没有考虑与环梁共同的协调。

实例计算。假设:

$$a = 53^\circ, P_0 = 25.2T/m^2, P = 0.9646T/m^2, R = 9.8m,$$

$$h = 0.35m, E = 2.9 \times 10^8 T/m^2, k = 0.15 \times 10^5 T/m^3, (f_{kp} = 1.5)$$

解二次方程式:

$$Aw^2(a) + Bw(a) + C = 0$$

按照給出的數據，我們有

$$a = \frac{Eh}{R^2} = 1.057 \times 10^4 T/m^3$$

$$A = 0.07853 \times 10^{10},$$

$$B = -10.2740 \times 10^5,$$

$$C = -126.3423.$$

故有：

$$0.07853 \times 10^{10} w^2(a) - 10.2740 \times 10^5 w(a) - 126.3423 = 0$$

解出

$$w(a) = \frac{1}{0.1571 \times 10^5} \left( 10.2740 \pm 12.0516 \right)$$

取負根：

$$w(a) = -11.3151 \times 10^{-5} m.$$

以此值代入(12)得：

$$\varphi_0 - \alpha = -\frac{0.0892}{1.6973} \text{tg} 53^\circ = -0.06974 (\text{弧度}) = -4^\circ$$

因此

$$\varphi_0 = \alpha - 4^\circ = 53^\circ - 4^\circ = 49^\circ$$

## 2) 球壳抗力大小的計算

在1)中我們知道，當球壳的底邊沿的余緯角 $\alpha$ 大於 $\varphi_0$ 時，球壳面在靠近底沿部分向地層方向變形，從而引起地層對壳面的彈性抗力。抗力的大小決定於球壳沿法綫方向的變形 $w$ ，以下我們確定 $w$ 的方程(忽略壳体自重不計，即設 $P=0$ 。)

由(3)(4)兩式得

$$\frac{dw}{d\varphi} - w = \frac{R}{Eh} N_\varphi, \quad u \text{ctg} \varphi - w = \frac{R}{Eh} N_\theta$$

從以上兩式消去 $u$ 及 $\frac{dw}{d\varphi}$ 得到

$$\frac{dw}{d\varphi} + \text{tg} \varphi \cdot w = \text{ctg} \varphi \cdot \frac{R}{Eh} \left[ N_\varphi - \sec^2 \varphi \cdot N_\theta - \text{tg} \varphi \frac{dN_\theta}{d\varphi} \right]$$

將 $N_\varphi, N_\theta$ 的結果(5),(6)代入上式 可得

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\varphi} + \text{tg} \varphi \cdot w = \text{ctg} \varphi \cdot \frac{R^2}{Eh} \left\{ -\frac{F_0}{2} \text{tg}^2 \varphi - 2P_0 \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{k \text{tg}^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} w \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - k \text{tg} \varphi \cdot \left( \frac{dw}{d\varphi} + \text{tg} \varphi \cdot w \right) \right\} \end{aligned}$$

因此，

$$\frac{dw}{d\varphi} + tg\varphi \cdot w = A \left[ -\frac{P_0}{2} tg\varphi - 2P_0 \sin\varphi \cos^3\varphi + \frac{k}{\sin\varphi \cos^2\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} w \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \right]$$

其中

$$A = \frac{R^2}{Eh + kR^2}$$

上式以  $\sin\varphi \cos^2\varphi$  乘两边并微分一次, 得到:

$$\begin{aligned} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \frac{dw}{d\varphi} + \sin\varphi \cos^2\varphi \frac{d^2w}{d\varphi^2} + 2\sin\varphi \cos\varphi \cdot w + \sin^2\varphi \frac{dw}{d\varphi} = \\ = A[-P_0 \sin\varphi \cos^3\varphi - 2P_0 \sin 2\varphi \cos^2\varphi + kw \sin\varphi \cos\varphi] \end{aligned}$$

或

$$(14) \quad \frac{d^2w}{d\varphi^2} + ctg\varphi \frac{dw}{d\varphi} + (2 - Ak)w = -AP_0(1 + 4\cos 2\varphi)$$

容易确定(14)有一个特解

$$w^* = \frac{1}{2 - Ak} \left[ 3AP_0 - \frac{16AP_0}{4 + Ak} \right] + \frac{8AP_0}{4 + Ak} \cos^2\varphi$$

其次, 考虑(14)的对应齐次微分方程:

$$(15) \quad \frac{d^2w}{d\varphi^2} + ctg\varphi \frac{dw}{d\varphi} + (2 - Ak)w = 0$$

作自变量的变换:  $x = \cos^2\varphi$  则有

$$(16) \quad \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1 - 3x}{2x(1-x)} \frac{dw}{dx} - \frac{Ak - 2}{4x(1-x)} w = 0$$

这是超几何方程, 和下列超几何方程标准形式

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{\gamma - (1 + \alpha + \beta)x}{x(1-x)} \frac{dw}{dx} - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} w = 0$$

相比較, 这里

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad 1 + \alpha + \beta = \frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{Ak - 2}{4}$$

故(16)有一特解为

$$\begin{aligned} w_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2! \gamma(\gamma+1)} x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3! \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots = \\ = 1 + \frac{Ak - 2}{2} \cos^2\varphi + \frac{(Ak - 2)(Ak + 4)}{2! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2^2} \cos^4\varphi + \\ + \frac{(Ak - 2)(Ak + 4)(Ak + 18)}{3! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3} \cos^6\varphi + \dots \end{aligned}$$

又有另一个特解为

$$\begin{aligned}
w_2 &= x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) = \\
&= x^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)}{1(2-\gamma)} x + \right. \\
&\quad + \frac{(\alpha+1-\gamma)(\alpha+2-\gamma)(\beta+1-\gamma)(\beta+2-\gamma)}{2!(2-\gamma)(3-\gamma)} x^2 + \\
&\quad \left. + \frac{(\alpha+1-\gamma)(\alpha+2-\gamma)(\alpha+3-\gamma)(\beta+1-\gamma)(\beta+2-\gamma)(\beta+3-\gamma)}{3!(2-\gamma)(3-\gamma)(4-\gamma)} x^3 + \dots \right] = \\
&= \cos\varphi + \frac{Ak}{3 \cdot 2} \cos^3\varphi + \frac{Ak(Ak+10)}{2! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2} \cos^5\varphi + \\
&\quad + \frac{Ak(Ak+10)(Ak+28)}{3! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^3} \cos^7\varphi + \dots
\end{aligned}$$

所以(14)的通解为:

$$\begin{aligned}
w &= C_1 w_1 + C_2 w_2 + w^* = \\
&= C_1 \left[ 1 + \frac{Ak-2}{2} \cos^2\varphi + \frac{(Ak-2)(Ak+4)}{2! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2^2} \cos^4\varphi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(Ak-2)(Ak+4)(Ak+18)}{3! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3} \cos^6\varphi + \dots \right] + \\
&\quad + C_2 \left[ \cos\varphi + \frac{Ak}{3 \cdot 2} \cos^3\varphi + \frac{Ak(Ak+10)}{2! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2} \cos^5\varphi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{Ak(Ak+10)(Ak+28)}{3! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^3} \cos^7\varphi + \dots \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2-Ak} \left[ 3AP_0 - \frac{16AP_0}{4+Ak} \right] + \frac{8AP_0}{4+Ak} \cos^2\varphi
\end{aligned}$$

讨论: 以上两个超几何级数均收敛, 因为对于 $w_1$ 来说,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n^2 - 6n + Ak}{2n(2n-1)} \cos^2\varphi < 1, \text{ 当 } \varphi \neq 0,$$

对于 $w_2$ 来说,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n^2 - 2n - 2 + Ak}{2n(2n+1)} \cos^2\varphi < 1, \text{ 当 } \varphi \neq 0$

总之,  $u_{n+1} \leq u_n \cos^2\varphi$  (注意  $Ak = \frac{R^2k}{Eh + R^2k} < 1$ )

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \leq u_n (\cos^2\varphi + \cos^4\varphi + \dots) = \frac{\cos^2\varphi}{1 - \cos^2\varphi} u_n = u_n \operatorname{ctg}^2\varphi$$

上式可以作为误差估计。

在实际计算时，可以取起几何级数的前几项进行（在误差的范围内）。常数  $C_1, C_2$  的确定将在以后讨论，但由于二阶微分方程(14)，是由一阶微分方程微分得到，所以确定  $C_1, C_2$  的一个条件应是：

$$\left. \frac{dw}{d\varphi} \right|_{\varphi = \varphi_0} = A \left( -\frac{P_0}{2} \operatorname{tg}\varphi_0 - P_0 \operatorname{Sin}2\varphi_0 \right)$$

II、按有矩理论进行计算

我们知道，壳体实现无矩应力状态往往是不可能的，因此必须考虑在不同的边界条件下产生的弯曲应力，而弯曲应力只在边界附近产生影响。对于微分方程来说，就是还要求出(1')，(2')，(3')的对应齐次微分方程的通解，并使它和按无矩理论计算时所得到的结果迭加起来，要求这个和满足边界条件，这样才能确定壳体的一切内力。由于这个问题是超静定的，所以必须同时考虑几个按弹性定律建立起来的方程。

这一组方程和一般球壳应力状态基本方程不同之处，在于(2')的右端附加了一项  $Rkwsin\varphi$ ，这就给求解这一组方程在数学处理上带来了困难。但是我们回顾一下一般球壳用边界效应近似理论求解这组方程是有益的。在那里为了解这组方程（不考虑地层抗力），我们消去其他未知函数，得到关于  $Q_\varphi$  的一个四阶线性方程，或分解成为如下的两个二阶线性齐次微分方程（参见〔1〕）。

$$(17) \quad \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg}\varphi \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} - \operatorname{ctg}^2\varphi \cdot Q_\varphi \pm 2i\bar{\kappa}^2 Q_\varphi = 0$$

它的一种解法，是化为超几何方程来进行的，这里

$$\bar{\kappa}^4 = \frac{3R^2}{h^2}$$

考虑到  $\bar{\kappa}$  的数值很大，w·弗留盖在〔1〕中经过分析得到所有位移，变形和内力将具有下列函数形式：

$$e^{\pm \bar{\kappa}\varphi} f(\varphi) \frac{\cos -}{\sin \bar{\kappa}\varphi}$$

其中  $f(\varphi)$  在坐标  $\varphi$  的有意义区域内不会有很大的变化。这样一个乘积的每一个导数具有相同的形式，但增加一个因子  $\bar{\kappa}$ 。当  $\bar{\kappa}$  充分大时，假如所考虑的函数的原有系数不是很大，则与最高阶导数相比，可以略去这个函数的较低阶导数项。

当我们把这一设想应用于(17)时，不难看到较低阶的导数是乘以  $\operatorname{ctg}\varphi$  和  $\operatorname{ctg}^2\varphi$  的。当  $\varphi > 30^\circ$  时，低阶项比起二阶导数  $\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2}$  及  $\bar{\kappa}^2$  来，是可以忽略的，因而而把(17)简化为：

$$\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} \pm 2i\bar{\kappa}^2 Q_\varphi = 0$$

或合并为一个四阶常系数线性方程:

$$(18) \quad \frac{d^4 Q_\varphi}{d\varphi^4} + 4\bar{\kappa}^4 Q_\varphi = 0$$

进一步求解这个方程就没有任何困难了。

以下我們应用这一思想(即边界效应近似理論)于地下球壳边界效应应力状态的基本方程,并假定壳面边沿部份承受有地层抗力。应力状态的基本方程如下(假定 $\mu=0$ ):

$$(I) \quad \frac{d}{d\varphi} (N_\varphi \sin\varphi) - N_\theta \cos\varphi - Q_\varphi \sin\varphi = 0,$$

$$(II) \quad \frac{d}{d\varphi} (Q_\varphi \sin\varphi) + N_\theta \sin\varphi + N_\varphi \sin\varphi = Rkw \sin\varphi,$$

$$(III) \quad \frac{d}{d\varphi} (M_\varphi \sin\varphi) - M_\theta \cos\varphi = RQ_\varphi \sin\varphi,$$

$$(IV) \quad N_\varphi = \frac{Eh}{R} \left( \frac{du}{d\varphi} - w \right),$$

$$(V) \quad N_\theta = \frac{Eh}{R} (u \operatorname{ctg}\varphi - w),$$

$$(VI) \quad M_\varphi = -\frac{D}{R} \frac{d\psi}{d\varphi},$$

$$(VII) \quad M_\theta = -\frac{D}{R} \psi \operatorname{ctg}\varphi,$$

$$(VIII) \quad \psi = \frac{u + \frac{dw}{d\varphi}}{R}$$

由平衡方程(I)及(II)消去 $N_\theta$ ,得恰当微分方程,积分后,首先获得:

$$N_\varphi = -Q_\varphi \operatorname{ctg}\varphi + \frac{Rk}{\sin^2\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} w \sin\varphi \cos\varphi d\varphi,$$

其次得

$$N_\theta = -\frac{dQ_\varphi}{d\varphi} + Rkw - \frac{Rk}{\sin^2\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} w \sin\varphi \cos\varphi d\varphi$$

此外,由平衡方程(III)得到:

$$\frac{dM_\varphi}{d\varphi} = RQ_\varphi + \operatorname{ctg}\varphi (M_\theta - M_\varphi),$$

由此,得近似方程(假设 $\varphi > 30^\circ$ ):

$$Q_\varphi = \frac{1}{R} \frac{dM_\varphi}{d\varphi},$$

或将(Ⅵ)式代入得到

$$(19) \quad Q_\varphi = -\frac{D}{R^2} \frac{d^2\psi}{d\varphi^2},$$

此外由(Ⅳ)及(Ⅴ)得:

$$N_\varphi + N_\theta = -\frac{Eh}{R} \left( \frac{du}{d\varphi} + uctg\varphi - 2w \right),$$

或近似地写为

$$N_\varphi + N_\theta = \frac{Eh}{R} \left( \frac{du}{d\varphi} - 2w \right),$$

以 $N_\varphi$ 、 $N_\theta$ 之结果代入,并整理得:

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{R}{Eh} \left( -\frac{dQ_\varphi}{d\varphi} - Q_\varphi ctg\varphi + Rkw \right) + 2w,$$

或近似地写为

$$(20) \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{R}{Eh} \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} + \left( \frac{R^2k}{Eh} + 2 \right) w,$$

而由(Ⅳ)我们有

$$\frac{du}{d\varphi} = w + \frac{R}{Eh} N_\varphi,$$

以(20)和已求得的 $N_\varphi$ 值代入,并整理得:

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{R^2k}{Eh} \right) w &= \frac{R}{Eh} \left( \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} \right) + \frac{R}{Eh} \left( -Q_\varphi ctg\varphi + \right. \\ &\left. + \frac{Rk}{\sin^2\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} w \cos\psi \sin\varphi d\varphi \right) \end{aligned}$$

取近似方程为:

$$\left( 1 + \frac{R^2k}{Eh} \right) w = \frac{R}{Eh} \left( \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} \right)$$

两边微分并整理得到:

$$(21) \quad \frac{dw}{d\varphi} = \frac{R}{Eh + R^2k} \cdot \frac{d^2Q_\varphi}{d\varphi^2},$$

而由(20)可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\varphi^2} &= -\frac{R}{Eh} \left( \frac{d^2Q_\varphi}{d\varphi^2} \right) + \left( \frac{R^2k}{Eh} + 2 \right) \frac{dw}{d\varphi} = \\ &= -\frac{R}{Eh} \left( \frac{d^2Q_\varphi}{d\varphi^2} \right) + \frac{R}{Eh + R^2k} \left( \frac{R^2k}{Eh} + 2 \right) \frac{d^2Q_\varphi}{d\varphi^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{R}{Eh + R^2k} \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2},$$

以上面兩式的結果代入基本方程(Ⅷ)得到:

$$\frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = \frac{\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \frac{d^3 w}{d\varphi^3}}{R} = \frac{1}{Eh + R^2k} \left( \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \frac{d^4 Q_\varphi}{d\varphi^4} \right).$$

或者和(19)一起, 消去  $\frac{d^2 \psi}{d\varphi^2}$  得到:

$$- \frac{R^2}{D} Q_\varphi = \frac{1}{Eh + R^2k} \left( \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \frac{d^4 Q_\varphi}{d\varphi^4} \right),$$

以D之值代入, 并略去  $\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2}$  最后近似地得到:

$$(22) \quad \frac{d^4 Q_\varphi}{d\varphi^4} + 12 \frac{R^2(Eh + R^2k)}{Eh^3} Q_\varphi = 0$$

令:  $\kappa^4 = 3 \frac{R^2(Eh + R^2k)}{Eh^3}$  我們得到了方程:

$$(23) \quad \frac{d^4 Q_\varphi}{d\varphi^4} + 4\kappa^4 Q_\varphi = 0,$$

此方程的特征方程  $m^4 + 4\kappa^4 = 0$  的四个根为  $m = \pm\kappa(1 \pm i)$ , 因此, (23) 的通解为:

$$(24) \quad \tilde{Q}_\varphi = e^{\kappa\varphi} (A_1 \cos \kappa\varphi + B_1 \sin \kappa\varphi) + e^{-\kappa\varphi} (C_1 \cos \kappa\varphi + D_1 \sin \kappa\varphi)$$

設壳体下边界即底部环梁的余緯角为  $\alpha$ , 上边界即頂部环梁的緯余角为  $\beta$ , 則:  $\alpha \geq \varphi \geq \beta$ 。

$$\text{令} \quad \varphi_1 = \alpha - \varphi, \quad \varphi_2 = \varphi - \beta,$$

那么(24)可以改写为:

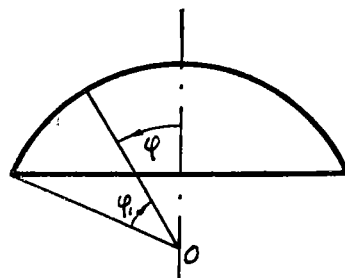
$$\tilde{Q}_\varphi = e^{-\kappa\varphi_1} (A \cos \kappa\varphi_1 + B \sin \kappa\varphi_1) + e^{-\kappa\varphi_2} (C \cos \kappa\varphi_2 + D \sin \kappa\varphi_2)$$

我們現在討論的情形沒有上边界, 即  $\beta = 0$  (見圖四) 故只考慮下边界效应, 此时  $\varphi_2$  接近于  $\alpha$ , 而  $\kappa$  又很大, 所以  $e^{-\kappa\varphi_2}$

很小, 可以忽略  $\tilde{Q}_\varphi$  的第二項, 因此計及到平衡方程(1')、(2')及(3')对应的齐次方程

組和一些按彈性定律建立起来的方程可以求得: (參閱〔2〕)

$$(a) \quad \tilde{Q}_\varphi = e^{-\kappa\varphi_1} (A \cos \kappa\varphi_1 + B \sin \kappa\varphi_1)$$



(圖四)

$$(b) \quad \tilde{\psi} = \frac{1}{Eh + R^2k} \frac{d^2 \tilde{Q}_\varphi}{d\varphi^2} = \frac{1}{Eh + R^2k} \frac{d^2 \tilde{Q}_\varphi}{d\varphi_1^2} =$$

$$= \frac{2}{Eh + R^2k} \kappa^2 e^{-\kappa\varphi_1} (A \sin \kappa\varphi_1 - B \cos \kappa\varphi_1),$$

在计算  $\tilde{N}_\varphi$  及  $\tilde{N}_\theta$  时, 需要用到变位  $\tilde{w}$  的结果:

$$(25) \quad \tilde{w} = -\frac{R}{Eh + R^2k} \cdot \frac{d\tilde{Q}_\varphi}{d\varphi} = -\frac{R}{Eh + R^2k} \cdot \frac{d\tilde{Q}_\varphi}{d\varphi_1} =$$

$$= -\frac{R\kappa}{Eh + R^2k} \cdot e^{-\kappa\varphi_1} [(B - A) \cos \kappa\varphi_1 - (A + B) \sin \kappa\varphi_1],$$

$$(c) \quad \tilde{N}_\varphi = -\tilde{Q}_\varphi \operatorname{ctg}\varphi + \frac{Rk}{\sin^2\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \tilde{w} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi =$$

$$= -e^{-\kappa\varphi_1} (A \cos \kappa\varphi_1 + B \sin \kappa\varphi_1) \operatorname{ctg}\varphi + \frac{Rk}{\sin^2\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \tilde{w} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi,$$

$$(d) \quad \tilde{N}_\theta = -\frac{d\tilde{Q}_\varphi}{d\varphi} + Rk\tilde{w} - \frac{Rk}{\sin^2\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \tilde{w} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{Eh\kappa}{Eh + R^2k} \cdot e^{-\kappa\varphi_1} [(B - A) \cos \kappa\varphi_1 - (A + B) \sin \kappa\varphi_1] -$$

$$- \frac{Rk}{\sin^2\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \tilde{w} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi,$$

将(25)式得到的  $\tilde{w}$  的结果, 代入  $\tilde{N}_\varphi$ 、 $\tilde{N}_\theta$  之右端, 出现形如:

$$I_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{\kappa\varphi} \sin\kappa\varphi \sin\varphi \cos\varphi d\varphi,$$

及

$$I_2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{\kappa\varphi} \cos\kappa\varphi \sin\varphi \cos\varphi d\varphi,$$

的积分, 这类积分不难由熟知的“分部积分法”求得。

$$(e) \quad \tilde{M}_\theta = -\frac{D}{R} \tilde{\psi} \operatorname{ctg}\varphi =$$

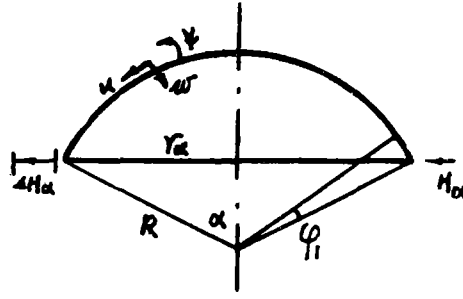
$$= -\frac{2D\kappa^2}{R(Eh + R^2k)} \operatorname{ctg}\varphi e^{-\kappa\varphi_1} (A \sin \kappa\varphi_1 - B \cos \kappa\varphi_1),$$

$$(f) \quad \tilde{M}_\varphi = -\frac{D}{R} \frac{d\tilde{\psi}}{d\varphi} = \frac{2D}{R(Eh + R^2k)} \kappa^3 e^{-\kappa\varphi_1} \left[ (B - A)\sin \kappa\varphi_1 + (A + B)\cos \kappa\varphi_1 \right],$$

由上面(a)–(f)除A、B是待 定常数外，我們获得了‘按有 矩理論’計算的各项内力分量表达式、常数A、B的确定需要用到边界条件。

此外，由(图五)可以看出，在球壳边缘部分我們有：

$$(26) \quad \tilde{H}_\alpha = -\tilde{N}_\varphi \alpha \cos \alpha + \tilde{Q}_\varphi \alpha \sin \alpha$$

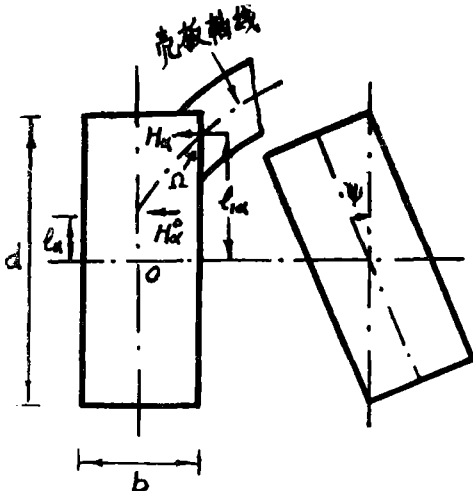


(图五)

我們称 $\tilde{H}_\alpha$ 为水平推力，它表示各内力在下边缘沿水平方向的投影之和。同样，我們称 $\tilde{M}_\varphi$ 当 $\varphi = \alpha$  (即当 $\varphi_1 = 0$ ) 时的值 $\tilde{M}_{\varphi\alpha}$ 为壳体在边缘的弯矩。

(二) 加劲环(环梁)的水平位移和转角

1) 先求环梁与球壳中面的經綫的交点 $\Omega$ 由于球壳在下边界的 $\tilde{N}_\varphi, N_\varphi^0, \tilde{Q}_\varphi,$



(图六)

$\tilde{M}_\varphi$ 的作用和岩层抗力对环的反作用下而产生的水平位移 $\Delta H_{环}$  (見图六)。

(a) 由于球壳在下边缘的水平推力

$$\tilde{H}_\alpha = -\tilde{N}_{\varphi\alpha} \cos \alpha + \tilde{Q}_{\varphi\alpha} \sin \alpha$$

及  $H_\alpha^0 = -N_\varphi^0 \cos \alpha$

对环梁的点 $\Omega$ 的作用，因此产生水平位移：

$$\frac{\varphi^2}{EF} (\tilde{H}_\alpha + H_\alpha^0)$$

再考虑到环梁上点 $\Omega$ 对应的水平位移必然引起侧面岩层的抗力 $-kd\Delta H'_{环}$ ，我們

得到下关系式

$$\Delta H'_{\text{环}} = \frac{r^2}{EF} (\tilde{H}_\alpha + H_\alpha^0) - kd \Delta H'_{\text{环}} \frac{r^2}{EF}$$

并解得

$$(27) \quad \Delta H'_{\text{环}} = \frac{r^2}{EF + kdr^2} (\tilde{H}_\alpha + H_\alpha^0)$$

这里  $r = R \sin \alpha + \frac{b}{2}$  是壳体的旋转轴到环梁中面的水平距离。  $F = bd$  为环梁的截面积。

(b) 由于作用于环梁的各种矩所产生的转动而引起点  $\Omega$  的水平位移  $\Delta H''_{\text{环}}$ 。

首先，由于  $\tilde{H}_\alpha$  的作用线不一定通过环梁截面的形心  $O$ ，所以  $\tilde{H}_\alpha$  使环梁产生力矩

$$M_1 = \tilde{H}_\alpha \ell_{1\alpha}$$

并从而产生转角  $\theta_1 = \frac{M_1 r^2}{EJ} = \frac{\tilde{H}_\alpha r^2}{EJ} \ell_{1\alpha}$

这里  $J = \frac{1}{12} F d^3$

因此  $\theta_1 = \frac{12 \tilde{H}_\alpha r^2}{EF d^2} \ell_{1\alpha}$

而这转角引起的点  $\Omega$  的对应的水平位移为：

$$\theta_1 \cdot \ell_{1\alpha} = \frac{12 \tilde{H}_\alpha r^2}{EF d^2} \ell_{1\alpha}^2$$

第二，由  $H_\alpha^0$  产生的力矩为

$$M_2 = H_\alpha^0 \cdot \ell_\alpha$$

从而产生转角  $\theta_2 = \frac{12 H_\alpha^0 r^2}{EF d^2} \ell_\alpha$

而这转角引起点  $\Omega$  的水平位移为：

$$\theta_2 \ell_{1\alpha} = \frac{12 H_\alpha^0 r^2}{EF d^2} \ell_\alpha \ell_{1\alpha}$$

第三，由  $\tilde{M}_\alpha$  引起的转角为

$$\theta_3 = \frac{\widetilde{M}_{\varphi\alpha} r^2}{EJ} = \frac{12\widetilde{M}_{\varphi\alpha} r^2}{EFd^2}$$

而它引起点  $\Omega$  的对应水平位移为

$$\theta_3 \cdot \ell_{1a} = \frac{12\widetilde{M}_{\varphi\alpha} r^2}{EFd^2} \ell_{1a}$$

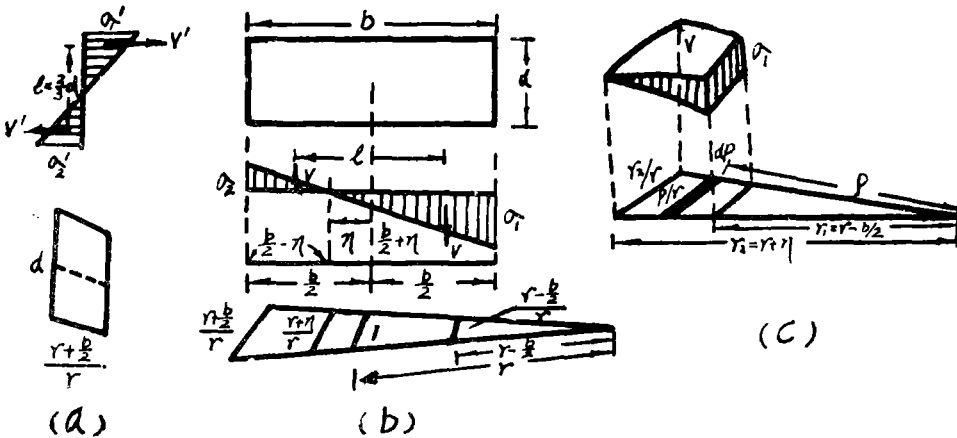
第四，由彈性地基的抗力产生的矩  $M_4$  与由侧面岩层的抗力产生的矩  $M_5$  而引起点  $\Omega$  的对应水平位移为

$$- \frac{12(M_4 + M_5)}{EFd^2} \ell_{1a}$$

所以推得

$$\begin{aligned} \langle 28 \rangle \quad \Delta H''_{\text{环}} = & \frac{r^2}{EF} \left[ \widetilde{H}_{\alpha} \cdot \frac{12\ell^2}{d^2} 1\alpha + H_{\alpha}^0 \cdot \frac{12\ell a \ell_{1a}}{d^2} + \right. \\ & \left. + \frac{12\widetilde{M}_{\varphi\alpha} \ell_{1a}}{d^2} - \frac{12(M_4 + M_5)}{d^2} \ell_{1a} \right] \end{aligned}$$

現在計算  $M_4$  和  $M_5$ 。考慮环梁和彈性地基接觸的表面上的一個楔形。設取环梁中面和地面相交的圆弧長度为一个单位，則显然楔形的形心偏在中綫弧的一側，其距离为  $\eta$  (見圖七)



(圖七)

設  $\sigma_1, \sigma_2$  为地基产生的应力，它們引起  $M_4$

$$(29) \quad M_4 = V\ell$$

式中  $V$  表地基应力的合力，等于楔形应力体积， $\ell$  表偶力  $V$  的力臂。

如(图七,c)楔形的面积元素为  $\frac{\rho}{r} d\rho$ , 右楔形中  $V$  的对应高度为  $y$ :

$$\frac{y}{\sigma_1} = \frac{r_2 - \rho}{r_2 - r_1}$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad V &= \int_{r_1}^{r_2} y \cdot \frac{\rho}{r} d\rho = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_1 \frac{r_2 - \rho}{r_2 - r_1} \cdot \frac{\rho}{r} d\rho = \\ &= \frac{\sigma_1}{6r} (r_2 - r_1)(r_2 + 2r_1), \end{aligned}$$

以  $r_1 = r - \frac{b}{2}$ ,  $r_2 = r + \eta$  代入, 得

$$V = \frac{\sigma_1}{6} \left( \frac{b}{2} + \eta \right) \left[ \frac{2}{r} \left( r - \frac{b}{2} \right) + \frac{r + \eta}{r} \right]$$

同样, 左边楔形应力的体积应为:

$$V = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_2 \frac{\rho - r_1}{r_2 - r_1} \cdot \frac{\rho}{r} d\rho = -\frac{\sigma_2}{6r} (r_2 - r_1)(2r_2 + r_1),$$

以  $r_1 = r + \eta$ ,  $r_2 = r + \frac{b}{2}$  代入, 得

$$V = \frac{\sigma_2}{6} \left( \frac{b}{2} - \eta \right) \left[ \frac{2}{r} \left( r + \frac{b}{2} \right) + \frac{r + \eta}{r} \right]$$

使左、右楔形的体积相等, 得到

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{\left( \frac{b}{2} + \eta \right) \left( 3r - b + \eta \right)}{\left( \frac{b}{2} - \eta \right) \left( 3r + b + \eta \right)}$$

又因(图七, b)中两个有阴影的三角形相似, 故有

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\frac{b}{2} - \eta}{\frac{b}{2} + \eta}$$

代入上式消去  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , 得

$$\left( \frac{b}{2} - \eta \right)^2 \left( 3r + b + \eta \right) = \left( \frac{b}{2} + \eta \right)^2 \left( 3r - b + \eta \right)$$

$$\text{故有} \quad 6r\eta = \frac{b^2}{2}$$

$$(30) \quad \eta = \frac{b^2}{12r}$$

根据温克尔假定(局部变形理论)

$$\sigma_1 = \bar{k} y_1$$

这里  $\bar{k}$  为垂直地层弹性压缩系数。沉陷量  $y_1$  可用环梁的角度变位表示:

$$y_1 = \theta \left( \frac{b}{2} + \eta \right)$$

地基应力为 
$$\sigma_1 = \bar{k} \theta \left( \frac{b}{2} + \eta \right)$$

将  $\sigma_1$  代入  $V$ , 得 
$$V = \bar{k} \theta \frac{\left( \frac{b}{2} + \eta \right)^2}{6} \left( 3 - \frac{b}{r} + \frac{\eta}{r} \right)$$

我们可以把地基应力的合力  $V$  看成作用于阴影三角形的形心,

于是有 
$$e = \frac{2}{3} b$$

所以地基抗力产生的力矩

$$(31) \quad M_4 = V e = \frac{b}{9} \bar{k} \theta \left( \frac{b}{2} + \eta \right)^2 \left( 3 - \frac{b}{r} + \frac{\eta}{r} \right) = \frac{b^3}{12} \bar{k} \theta \omega$$

这里 
$$\omega = \left( 1 + \frac{2\eta}{b} \right)^2 \left( 1 - \frac{b}{3r} + \frac{\eta}{3r} \right)$$

以(30)代入, 并化简得

$$(32) \quad \omega = \left[ 1 - \left( \frac{b}{6r} \right)^2 \right]^2$$

同样, 设  $\sigma_1' \sigma_2'$  为环梁侧面岩层产生的应力, 它们引起  $M_5$ :

$$(33) \quad M_5 = V' e'$$

式中  $V'$  表岩层应力的合力, 等于矩形  $\frac{d}{2} \times \frac{r + \frac{b}{2}}{r}$  的应力体积,  $e'$  表偶力  $V'$  的力臂, 如(图七a), 有  $\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma$

$$V' = \frac{1}{2} \sigma \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{r + \frac{b}{2}}{r}$$

而 
$$\sigma = kx = k\theta \frac{d}{2}$$

故 
$$V' = \frac{1}{8} kd^2 \frac{r + \frac{b}{2}}{r} \theta$$

$$(34) \quad M_5 = V' \varrho' = \frac{1}{8} k d^2 \frac{r + \frac{b}{2}}{r} \theta \cdot \frac{2}{3} d = \frac{d^3}{12} k \frac{r + \frac{b}{2}}{r} \theta$$

但 
$$\theta = \frac{\Delta H''_{环}}{\varrho_1 a}$$

故 
$$M_4 + M_5 = \left( \frac{b^3}{12} k \omega + \frac{d^3}{12} k \frac{r + \frac{b}{2}}{r} \right) \frac{\Delta H''_{环}}{\varrho_1 a}$$

代入(28)式得

$$\begin{aligned} \Delta H''_{环} = & \frac{r^2}{EF} \left[ \tilde{H}_a \cdot \frac{12 \varrho_1^2 a}{d^2} + H_a^0 \cdot \frac{12 \varrho_1 a \varrho_1 a}{d^2} + \frac{12 \tilde{M} \varphi_a \varrho_1 a}{d^2} \right] \\ & - \frac{r^2}{EF} \frac{b^3 k \omega + d^3 k \frac{r + \frac{b}{2}}{r}}{d^2} \Delta H''_{环} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \Delta H''_{环} = & \frac{r^2}{EF + \frac{1}{d^2} \left[ k b^3 \omega r^2 + k d^3 r \left( r + \frac{b}{2} \right) \right]} \left[ \tilde{H}_a \frac{12 \varrho_1^2 a}{d^2} + \right. \\ & \left. + H_a^0 \frac{12 \varrho_1 a \varrho_1 a}{d^2} + \frac{12 \tilde{M} \varphi_a \varrho_1 a}{d^2} \right] \end{aligned}$$

而

$$(35) \quad \begin{aligned} \Delta H_{环} = & \Delta H'_{环} + \Delta H''_{环} = \frac{r^2}{EF + k d r^2} \left[ \tilde{H}_a + H_a^0 \right] + \\ & + \frac{r^2}{EF + \frac{1}{d^2} \left[ k b^3 \omega r^2 + k d^3 r \left( r + \frac{b}{2} \right) \right]} \times \\ & \times \left[ \tilde{H}_a \frac{12 \varrho_1^2 a}{d^2} + H_a^0 \frac{12 \varrho_1 a \varrho_1 a}{d^2} + \frac{12 \tilde{M} \varphi_a \varrho_1 a}{d^2} \right] \end{aligned}$$

2) 现在计算环梁的转角  $\psi_{环}$ ，按照 1) 所求的各力矩包括弹性地基及侧面岩层抗力产生的力矩所引起的各种转角，我们得到：

$$\begin{aligned} \psi_{环} = & \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = \\ = & \frac{\tilde{H}_a r^2}{EJ} \varrho_1 a + \frac{H_a^0 r^2}{EJ} \varrho_1 a + \frac{\tilde{M} \varphi_a r^2}{EJ} - \frac{M_4 + M_5}{EJ} r^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{\widetilde{H}_a r^2}{EJ} \ell_1 a + \frac{H_a^0 r^2}{EJ} \ell_a + \frac{\widetilde{M}_{\varphi a} r^2}{EJ} - \frac{r^2}{EJ} \left[ \frac{b^3}{12} \overline{k} \omega + \right. \\ \left. + \frac{r^3}{12} k \left( r + \frac{h}{2} \right) \right] \psi_{\text{环}}$$

解之, 得

$$(36) \quad \psi_{\text{环}} = \frac{r^2}{EJ + \frac{1}{12} \left[ b^3 \overline{k} \omega r^2 + d^3 k r \left( r + \frac{h}{2} \right) \right]} \left( \widetilde{H}_a \ell_1 a + H_a^0 \ell_a + \widetilde{M}_{\varphi a} \right)$$

### (三) 边界协调条件及关于抗力曲线的进一步讨论

#### I、边界协调条件

为了获得壳体内力分布的最终结果, 需要将无矩理论的解和有矩理论的解加在一起, 并使壳体的变形和环梁的变形相协调, 定出常数  $A$  和  $B$  从而确定全部干扰内力。

以下记

$$(37) \quad \begin{cases} N_{\varphi} = N_{\varphi}^0 + \widetilde{N}_{\varphi}, & N_{\theta} = N_{\theta}^0 + \widetilde{N}_{\theta}, & \psi = \psi_0 + \widetilde{\psi} \\ M_{\varphi} = \widetilde{M}_{\varphi}, & M_{\theta} = \widetilde{M}_{\theta}, & Q_{\varphi} = \widetilde{Q}_{\varphi} \end{cases}$$

这里上角带“0”者表按无矩理论计算的结果, 带“-”者表按有矩理论计算的结果。

在球壳承受地层压力的情况下(忽略壳体自重), 我们有:

$$N_{\varphi}^0 = -\frac{P_0 R}{2} + \frac{Rk}{\sin^2 \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} w^0 \cos \rho \sin \varphi d\rho, \\ N_{\theta}^0 = \frac{1}{2} P_0 R (1 - 2 \cos^2 \rho) - \frac{Rk}{\sin^2 \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} w^0 \cos \rho \sin \varphi d\rho + Rk w^0$$

$$\text{而} \quad \psi^0 = \frac{1}{Eh} \left[ \text{ctg} \varphi \left( N_{\varphi}^0 - N_{\theta}^0 \right) - \frac{d N_{\theta}^0}{d \varphi} \right]$$

注意:  $w^0$  的获得要参照(一)段中的结果, 这里取  $\varphi_0$  为(一)中按无矩理论计算获得的抗力曲线零点所对应的余角。因此只有当  $\varphi > \varphi_0$  时  $N_{\varphi}^0$ 、 $N_{\theta}^0$  及  $\psi^0$  中才有与  $w^0$  有关的项出现。

另外, (37)中  $\widetilde{N}_{\varphi}$ 、 $\widetilde{N}_{\theta}$ ……诸量则是(一)段中(a)至(f)式的结果。同样, 只有

当 $\varphi > \varphi_0$ 时才考虑壳面承受有地层抗力的计算问题。即当 $\varphi < \varphi_0$ （特别是当 $\alpha < 45^\circ$ 时）不考虑壳面地层抗力的计算问题（仅考虑环梁侧面的抗力计算问题），这时应令(a)至(f)式中 $k = 0$ ，此时 $\kappa^4 = \frac{3R^2}{h^2}$ 。

所谓满足变形协调条件，是指在壳体底部和环梁连接处，壳体的水平位移和经向转角应与环梁的半径伸长及转角相等(边界协调方程)：

$$\Delta H_{\alpha壳} = \Delta H_{环}, \quad \psi_{\alpha壳} = \psi_{环},$$

而

$$(38) \quad \Delta H_{\alpha壳} = \frac{N_{\theta\alpha}}{Eh} \cdot r = \frac{r}{Eh} \left( N_{\theta\alpha}^0 + \tilde{N}_{\theta\alpha} \right)$$

$$(39) \quad \psi_{\alpha壳} = \psi_{\alpha}^0 + \tilde{\psi}_{\alpha},$$

(38)、(39)式中诸量 $N_{\theta\alpha}^0$ 、 $\tilde{N}_{\theta\alpha}$ 、 $\psi_{\alpha}^0$ 及 $\tilde{\psi}_{\alpha}$ 表示 $N_{\theta}^0$ 、 $\tilde{N}_{\theta}$ 、 $\psi^0$ 及 $\tilde{\psi}$ 当 $\varphi = \alpha$ 时的值。

注意当 $\alpha < \varphi_0^*$ 时，在壳面上不考虑承受抗力，这时以(38)、(39)及(二)中的(35)、(36)式代入边界协调方程，仅得到两个关于 $\bar{A}$ 及 $\bar{B}$ 的线性方程，由此可以解出 $A$ 及 $B$ 的值。

### II、关于抗力曲线的进一步讨论

当壳体的矢高与跨度之比较大时，可以作为壳面有抗力的情形来考虑，下面就壳面抗力曲线的确定问题作一讨论。

我们知道抗力曲线方程为：

$$(40) \quad w = w^0 + \tilde{w} = C_1 w_1 + C_2 w_2 + w^* + \tilde{w}$$

这里 $w_1$ 、 $w_2$ 、 $w^*$ 及 $\tilde{w}$ 分别为：

$$w_1 = 1 + \frac{\bar{A}k - 2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{(\bar{A}k - 2)(\bar{A}k + 4)}{2! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2^2} \cos^4 \varphi + \dots,$$

$$w_2 = \cos \varphi + \frac{\bar{A}k}{3 \cdot 2} \cos^3 \varphi + \frac{\bar{A}k(\bar{A}k + 10)}{2! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2} \cos^5 \varphi + \dots,$$

$$\left( \bar{A} = \frac{R^2}{Eh + R^2k} \right)$$

$$w^* = \frac{1}{2 - \bar{A}k} \left[ 3\bar{A}P_0 - \frac{16\bar{A}P_0}{4 + \bar{A}k} \right] + \frac{8\bar{A}P_0}{4 + \bar{A}k} \cos^2 \varphi,$$

$$\tilde{w} = -\frac{Rk}{Eh + R^2k} e^{-\pi\varphi_1} \left[ (B-A)\cos k\varphi_1 - (A+B)\sin k\varphi_1 \right].$$

因此，抗力曲綫方程的确定，依赖于确定常数  $C_1$ 、 $C_2$  以及  $A$ 、 $B$ 。現假设抗力曲綫零点位置的余緯角为  $\varphi_0$ （抗力曲綫和  $\varphi_0$  密切相关），为了确定  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $A$ 、 $B$  四个常数及  $\varphi_0$  的位置，我們可以从以下五个方面进行考虑。

1. 在抗力曲綫零点位置，位移  $w$  应适合

$$w(\varphi_0) = 0$$

这样获得了确定抗力曲綫的第一个方程。此外

2. 由于  $w^0$  是按无矩理論計算所获得的位移，因此（参见（一））

$$\left. \frac{dw^0}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = \bar{A} \left( -\frac{P_0}{2} \operatorname{tg} \varphi_0 - P_0 \operatorname{Sin} 2\varphi_0 \right)$$

因为  $w^0$  关于  $C_1$ 、 $C_2$  是綫性的，因此这是关于  $C_1$ 、 $C_2$  的綫性方程。

由于，壳体在其边沿的变形应与环梁的变形相协调，即是說：

$$3. \quad \Delta H_{\alpha\text{壳}} = \Delta H_{\text{环}},$$

$$4. \quad \psi_{\alpha\text{壳}} = \psi_{\text{环}},$$

这里

$$\Delta H_{\alpha\text{壳}} = \frac{r}{Eh} \left( N_{\theta\alpha}^0 + \tilde{N}_{\theta\alpha} \right) \quad \psi_{\alpha\text{壳}} = \psi_{\alpha}^0 + \tilde{\psi}_{\alpha},$$

而  $\Delta H_{\text{环}}$  及  $\psi_{\text{环}}$  的表达式由（35）、（36）所确定。应用 3 及 4 的结果，得到了确定抗力曲綫的第三、四个方程。

5. 最后，确定抗力曲綫的第五个方程可以从关于壳体边沿不下沉的原始假定得到，在此不作贅述。

綜合前述的五个方面，我們得到了关于待定常数  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $A$ 、 $B$  及  $\varphi_0$  的一组方程（对于  $\varphi_0$  說是超越方程）。若能从这一组方程确定  $\varphi_0 \in (0, \alpha)$ ，則說明球壳壳面部分承受地层抗力，否則整个壳面上的抗力为零。当然，求解这组方程是十分繁复的。

在实际工作中，我們可以从以下两个方面进行計算：

（1）由前述的五个确定抗力曲綫方程出发，采用数值計算法（例如迭代法），确定抗力零点  $\varphi_0$  的近似值，并确定常数  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $A$ 、 $B$ ，从而計算全部内力。

（2）为了簡化我們的計算，假定  $\varphi_0$  为按无矩理論对抗力零点位置計算的结果，然后由其余四个关于  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $A$ 、 $B$  的綫性方程，确定常数值，从而确定全部内力。

#### （四）边缘构件内力计算

I、在壳体边缘处的水平推力的作用下，使环梁产生軸向内力（以拉力为正）

$$N_{ka} = \left[ H_a^0 + H_a \right] r - kd \Delta H_1 r = \left[ H_a^0 + \tilde{H}_a - kd \Delta H_1 \right] r$$

其中, 
$$\Delta H_1 = \frac{r^2}{EF + kd r^2} \left[ H_a^0 + \tilde{H}_a \right]$$

或 
$$N_{ka} = EF \cdot \frac{r \left( H_a^0 + \tilde{H}_a \right)}{EF + kd r^2}$$

II、在经向弯矩  $\bar{M}_a$  的作用下, 环梁产生旋转变矩 (以环梁截面下部受拉为正)

$$M_{ka} = -\bar{M}_a \cdot r,$$

由  $\psi_{环} = \frac{\bar{M}_a r^2}{EJ}$ , 得到

$$\bar{M}_a = EJ \frac{\psi_{环}}{r^2} = \frac{EJ}{EJ + \frac{1}{12} \left[ b^3 k \omega r^2 + d^3 k r \left( r + \frac{b}{2} \right) \right]} \left[ \tilde{M}_{\varphi a} + H_a^0 \ell_a + \tilde{H}_a \ell_{1a} \right]$$

以上公式采用的记号, 和前面的一致。

### 参 考 资 料

- [1] w· 弗留盖《壳体中的应力》中国工业出版社, 1965年
- [2] H·B·科尔库诺夫《弹性壳体计算的基本理论》高等教育出版社, 1966年