

# 导电介质的辐射

物理系 郭硕鸿

## 1. 本工作分析导电介质圆柱体的辐射

在考虑的波段 ( $10^6 \sim 10^7$  赫) 上, 假设介质可以用导电率  $\sigma$ , 导磁系数  $\mu$  和介电常数  $\epsilon$  等三个参数描述。我们的目的是研究辐射功率和效率对这些参数的依赖关系。

介质的复介电常数为

$$\epsilon' = \epsilon + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} \equiv \epsilon + i \epsilon_i$$

我们讨论的范围是:

- (1)  $\epsilon_i \gg \epsilon$ , 因而  $\epsilon' \approx i \epsilon_i$
- (2)  $\sqrt{\mu \epsilon_i} \gg \lambda / l$  ( $\lambda$ —真空中波长,  $2l$ —柱体长度);
- (3)  $l \ll \lambda$ ,  $a \ll l$ , ( $a$ —柱体半径)。

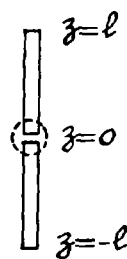
## 2. 电流积分方程

考虑半径为  $a$ , 长度为  $2l$  的介质圆柱体, 在中点对称激发。在忽略上下底面的贡献, 以及略去由电源直接辐射的场之后, 由普遍电磁理论导出电流  $I(z)$  满足的方程。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \int_{-l}^l dz' \Gamma(z, z') I(z') + i\omega E_z^{(i)}(a, z) = i\omega E_z^{(0)}(a, z) \quad (1)$$

式中  $k_0$  为真空中波数 ( $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ),  $E_z^{(i)}(a, z)$

为介质表面上电场强度,  $E_z^{(0)}$  为激发源的场强,



(图一)

$$\Gamma(z, z') = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik_0 r}}{r} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$r = \left[ (z - z')^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$\Gamma(z, z')$  是环状源所生矢势  $A_z$  的格林函数。

在条件  $\sqrt{\mu\epsilon_i} \gg \lambda/l$  下,  $E_z^{(i)}(a, z)$  和  $H_\theta^{(i)}(a, z)$  有关系

$$E_z^{(i)}(a, z) = \sqrt{\frac{\mu}{i\epsilon_i}} \frac{iJ_0(k_0 a \sqrt{\mu\epsilon_i'})}{J_1(k_0 a \sqrt{\mu\epsilon_i'})} H_\theta^{(i)}(a, z) \equiv \alpha(\mu, \epsilon_i) H_\theta^{(i)}(a, z) \quad \left(\sqrt{\mu\epsilon_i} \gg \frac{\lambda}{l}\right) \tag{3}$$

如果再有  $\sqrt{\mu\epsilon_i} > \lambda/a$ , 则  $\alpha(\mu, \epsilon_i)$  近似为

$$\alpha(\mu, \epsilon_i) = \sqrt{\frac{\mu}{i\epsilon_i}} \quad (\sqrt{\mu\epsilon_i} > \lambda/a) \tag{4}$$

把 (3) 式及  $H_\theta^{(i)}(a, z) = 2I(z)/ac$  代入 (1) 式, 并把激发场简化为  $z=0$  点上的  $\delta$  函数, 最后得到电流的积分—微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right) \int_{-l}^l dz' \Gamma(z, z') I(z') + \frac{2i\omega}{ac} \alpha(\mu, \epsilon_i) I(z) = i\omega V_0 \delta(z) \tag{5}$$

$V_0$  为激发电压。

(5) 式是下面分析介质辐射问题的基本方程。对于理想导体情况,  $\epsilon_i \rightarrow \infty$ ,  $\alpha(\mu, \epsilon_i) \rightarrow 0$ , 在这极限下(5)式左边第二项为 0, (5)式就变为良导体天线电流的积分—微分方程。因此, 我们讨论的范围内, 介质的影响完全反映在 (5) 式第二项中, 即由参数  $\alpha(\mu, \epsilon_i)$  决定。

如果介质参数不满足  $\sqrt{\mu\epsilon_i} \gg \lambda/l$ , 则(3)式不成立, 这时必须对 (1) 式沿  $z$  方向作富氏分析, 由此推出电磁场富氏分量的一系列关系, 整个计算将变得复杂得多。因此, 我们只限于研究  $\sqrt{\mu\epsilon_i} \gg \lambda/l$  的情形。

### 3. 电流积分方程的自洽迭代解法

现在我们用逐步近似法来解 (5) 式。这方法的主要点是注意到  $\Gamma(z, z')$  在  $z' = z$  点有对数型奇异性, 因此, 积分  $\int_{-l}^l dz' \Gamma(z, z') I(z')$  的主要部分来自  $z' \cong z$  处。从物理上说, 就是当柱体半径小时,  $z$  点的场主要受其附近  $z'$  点的电流的影响。因此, 我们可以把这积分分离为主要项以及一级小项:

$$\int_{-l}^l dz' \Gamma(z, z') I(z') = \Omega I(z) + \int_{-l}^l dz' \hat{\Gamma}(z, z') I(z') \tag{6}$$

$$\hat{\Gamma}(z, z') \equiv \Gamma(z, z') - \Omega \delta(z - z') \tag{7}$$

参数 $\Omega$ 主要是代表  $\int_{-l}^l dz' \Gamma(z, z')$  的值。由直接积分求出

$$\int_{-l}^l dz' \Gamma(z, z') = 2 \ln \frac{2l}{a} + \ln \left( 1 - \frac{z^2}{l^2} \right) - i\pi + \dots$$

除了接近端点 ( $|z| \cong l$ ) 之外, 上式的实部接近于  $2 \ln \frac{2l}{a}$ 。因此我們选取参数 $\Omega$ 为

$$\Omega = 2 \ln \frac{2l}{a} + i \operatorname{Im} \Omega \quad (8)$$

并以  $\Omega^{-1}$  作为展开的小参数。 $\Omega$  的虚部暂不确定, 它将由辐射电阻计算的自洽性来确定。当  $l/a$  愈高时,  $\Omega$  值愈大, 近似展开式就愈精确。

把 (6) 式代入 (5) 式得

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \left[ \Omega I(z) + \int_{-l}^l dz' \hat{\Gamma}(z, z') I(z') \right] \\ + \frac{4\pi i}{\lambda a} \alpha(\mu, \epsilon_i) I(z) = i\omega V_0 \delta(z) \end{aligned} \quad (9)$$

令

$$K_0^2 = k_0^2 + \frac{4\pi i}{\lambda a \Omega} \alpha(\mu, \epsilon_i) \quad (10)$$

把 (9) 式写为

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_0^2 \right) I(z) = \frac{i\omega V_0}{\Omega} \delta(z) - \frac{1}{\Omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \int_{-l}^l dz' \hat{\Gamma}(z, z') I(z') \quad (11)$$

把右边第二项作为一级小量看待, 就可以对上式用逐步近似法求解。先略去末项, 求出零级近似电流分布

$$I^{(0)}(z) = -\frac{i\omega V_0 \sin K_0(l-|z|)}{2k_0 \Omega \cos K_0 l} \quad (12)$$

其中已经考虑了边界条件  $I^{(0)}(|z|=l) = 0$ , 对于我們所作的初步分析来说, 由近似解  $I^{(0)}(z)$  已经足够导出一些基本结果。因此, 我们将不再详细讨论高级近似的计算。

由 (11) 和 (12) 式可见对电流分布  $I(z)$  来说,  $K_0$  起着有效波数的作用。介质的影响首先就是使电流分布的有效波长有所缩短, 这点对于小辐射体 (綫度  $\ll \lambda$ ) 来说是有利的。

輸入阻抗  $Z = R - iX$  由  $V_0 / I(0)$  确定。由 (12) 式

$$I(0) = -\frac{i\omega V_0}{2K_0 \Omega} \operatorname{tg} K_0 l = -\frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{R - iX}$$

$$X = -\frac{2}{\omega l} \operatorname{Re} \left( \frac{\Omega K_0 l}{tg K_0 l} \right), \tag{13.a}$$

$$R = -\frac{2}{\omega l} \operatorname{Im} \left( \frac{\Omega K_0 l}{tg K_0 l} \right). \tag{13.b}$$

#### 4. 损耗电阻与辐射电阻

在讨论(13)式之前,需要先计算损耗电阻和辐射电阻。下面计算结果表明,在损耗不致太大的情况下,  $K_0 l \ll 1$ , 因此,取近似值电流分布

$$I(z) \cong I(0) \frac{l - |z|}{l},$$

计算出辐射电阻(定义为  $R_r I^2(0) =$  辐射功率)

$$R_r = \frac{8\pi^2}{3c} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \text{ 欧} \tag{14}$$

损耗功率是

$$\begin{aligned} 2\pi a \int_{-l}^l dz \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} \left[ E_z^{(i)} * H_\theta^{(i)} \right] &= \frac{2}{ac} \operatorname{Re}(\mathbf{a}) \int_{-l}^l dz I^2(z) \\ &= \frac{4l}{3ac} R_a \mathbf{a} \cdot I^2(0) \end{aligned}$$

因此损耗电阻  $R_a$  为

$$R_a = \frac{4}{3c} \frac{l}{a} \operatorname{Re} \mathbf{a} = 40 \frac{l}{a} \operatorname{Re} \mathbf{a} \text{ 欧}, \tag{15}$$

辐射效率  $\eta$  为

$$\eta = \frac{R_r}{R_a + R_r}.$$

[ 数字举例 ]

取典型綫度

$$l/\lambda = 1/40, \quad l/a = 60 \tag{16}$$

这时辐射电阻为

$$R_r = 0.5 \text{ 欧}.$$

$R_a$  与参数  $\mu, \epsilon_i$  有关,当  $\sqrt{\mu \epsilon_i} > \lambda/a$  时,  $\operatorname{Re} \mathbf{a} \cong \sqrt{\frac{\mu}{2\epsilon_i}}$ , 选参数  $\sqrt{\frac{\mu}{2\epsilon_i}} = 0.01$  得

$$R_a = 24 \text{ 欧}.$$

辐射效率  $\eta \cong 2\%$ , 若  $\sqrt{\frac{\mu}{2\epsilon_i}}$  增大至 1, 则  $R_a$  增至  $O(10^3 \text{ 欧})$ , 辐射效率将变得很小。因

此,在损耗不太大的情况下,必须有  $\sqrt{\mu/2\epsilon_i} \leq 1$ ;

由(13a)输入电抗为

$$X \cong -\frac{2}{\omega l} \operatorname{Re} \Omega = -\frac{30\lambda}{\pi l} \operatorname{Re} \Omega \text{ 欧,}$$

当  $l/a = 60$  时,  $\operatorname{Re} \Omega = 9.6$ ,

$$X = -3.7 \times 10^3 \text{ 欧.}$$

由于输入电抗与饋电点的具体情况有密切关系,因此,这数值只作为数量级的参考。

由(13b), (10)和(15)式可定出  $\operatorname{Im} \Omega$  :

$$\begin{aligned} R &\cong -\frac{2}{\omega l} \operatorname{Im} \left[ \Omega \left( 1 - \frac{1}{3} K_0^2 l^2 \right) \right] = -\frac{2}{\omega l} \operatorname{Im} \left[ \Omega - \frac{4\pi i l^2}{3\lambda a} X(\mu, \epsilon_i) \right] \\ &= -\frac{2}{\omega l} \operatorname{Im} \Omega + R_a \end{aligned}$$

因此,  $\operatorname{Im} \Omega$  只与辐射电阻  $R_r$  有关:

$$\operatorname{Im} \Omega = -\frac{\omega l}{2} R_r$$

用参数(16)求得的  $\operatorname{Im} \Omega$  只有  $10^{-3}$  的数量级,下面我们略去  $\operatorname{Im} \Omega$ 。

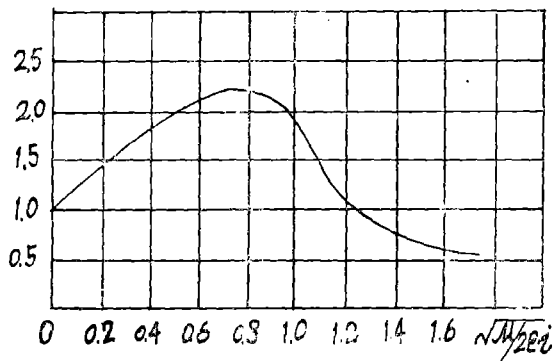
### 5. 辐射功率与介质参数的关系

现在我们说明,尽管不良导电介质内的损耗电阻远大于辐射电阻,但由于阻抗匹配的改善,在相同激发下介质的辐射功率仍然可能比理想导体的辐射功率略有提高。导致这情况的原因有两方面:

(1) 由于电抗降低导致总阻抗  $|Z|$  的下降;

(2) 由于电流分布有效波长的缩短导致辐射电阻的增加。

在相同激发电压下,辐射功率正比于  $R_r/|Z|^2$ 。



(图二)

先计算  $|Z|^2$ 。由(13)式

$$|Z|^2 = X^2 + R^2 = \frac{4}{\omega^2 l^2} \left| \frac{\Omega K_0 l}{t_g K_0 l} \right|^2,$$

若  $k_0 l \ll 1$ , 并以  $Z_0$  表示理想导体情况的阻抗, 则

$$|Z_0|^2 / |Z|^2 = \left| \frac{t_g K_0 l}{K_0 l} \right|^2$$

设  $K_0 l = u + iv$  则

$$\frac{|Z_0|^2}{|Z|^2} = \frac{ch 2v - \cos 2u}{(u^2 + v^2)(ch 2v + \cos 2u)} \tag{17}$$

在(10)式中略去  $k_0^2$  项, 得  $u$  和  $v$  的值为

$$u + iv = \sqrt{\frac{4\pi l^2}{\Omega \lambda a}} \sqrt{\frac{\mu}{2\epsilon_i}} (1.10 + i 0.455)$$

用电流分布(12)式计算辐射电阻, 并令理想导体情况的辐射电阻为  $R_{r0}$ , 得

$$\frac{R_r}{R_{r0}} = \left| \frac{t_g(K_0 l/2)}{K_0 l/2} \right|^2 = \frac{4}{u^2 + v^2} \frac{chv - \cos u}{chv + \cos u} \tag{18}$$

由(17)及(18)式取典型数值(16), 算出介质辐射功率  $P$  与理想导体辐射功率  $P_0$  的比值如附图曲线所示。由图可见, 当  $\sqrt{\mu/2\epsilon_i} \sim O(1)$  时, 介质的辐射功率比理想导体的辐射略有提高, 最大可增加一倍左右, 当  $\sqrt{\mu/2\epsilon_i}$  继续增加时, 由于损耗很大, 辐射功率迅速下降。当然, 这些结果只有在满足条件  $\sqrt{\mu\epsilon_i} > \lambda/a$  时才成立。

若  $\sqrt{\mu\epsilon_i} > \lambda/a$  不成立, 则我们必须用较准确的表示式

$$\alpha(\mu, \epsilon_i) = \sqrt{\frac{\mu}{i\epsilon_i}} \frac{iJ_0(k_0 a \sqrt{\mu\epsilon_i'})}{J_1(k_0 a \sqrt{\mu\epsilon_i'})} \tag{19}$$

来代替近似式  $\alpha(\mu, \epsilon_i) \cong \sqrt{\mu/i\epsilon_i}$ 。(19)式比起  $\sqrt{\mu/i\epsilon_i}$  来说, 一方面其绝对值增大了, 另一方面位相从  $-45^\circ$  变为较小的负值。两个效应都使得损耗增大, 且不利于阻抗匹配。因此, 在相同的  $\sqrt{\mu/2\epsilon_i}$  之下, 提高  $\sqrt{\mu\epsilon_i}$  的值有利于辐射, 即在相同的  $\mu\rho$  之下, 提高  $\mu$  值比提高  $\rho$  值有效。

### 6. 结 论

由上面的分析, 得出几点主要结论:

(1). 在本文考虑的范围內, 介质的辐射仍然是电流产生的辐射, 没有新的辐射机构。

(2). 介质对辐射影响的主要参数为

$$\alpha(\mu, \epsilon_i') = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_i'}} \frac{iJ_0(k_0 a \sqrt{\mu\epsilon_i'})}{J_1(k_0 a \sqrt{\mu\epsilon_i'})} \tag{19}$$

当滿足条件 $\sqrt{\mu\epsilon_i} > \lambda/a$ 时,  $\alpha(\mu, \epsilon')$ 近似为

$$\alpha(\mu, \epsilon') \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \quad (\sqrt{\mu\epsilon_i} > \lambda/a) \quad (20)$$

$\alpha$ 的实部决定損耗电阻, 而 $\alpha$ 的負虛部則使电流分布有效波長縮短, 起着改善阻抗匹配的作用。

(3). 当(20)式滿足时,

$$-Im\alpha = Re\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{2\epsilon_i}} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu\rho f} \quad (f - \text{頻率}) \quad (21)$$

因而阻抗匹配的改善必然伴随着損耗电阻的增大。輻射效率一般較小, 并反比于参数 $\sqrt{\mu/2\epsilon_i}$ 。(当 $\sqrt{\mu/2\epsilon_i} \sim 10^{-2}$ 时, 效率 $\sim 10^{-2}$ )。

(4). 尽管有相当大的損耗, 但由于阻抗匹配的改善, 在相同激发下, 介质的輻射功率仍然有可能比理想导体情形略有提高, 如附图曲綫所示。但当 $\sqrt{\mu/2\epsilon_i}$ 增大至 $\sim 1$ 或 $\sqrt{\mu\epsilon_i} \leq \lambda/a$ 时, 由于損耗很大, 輻射功率迅速下降。

(5). 当(20)式不滿足时, 由(19)式得出

$$Re\alpha > -Im\alpha,$$

因而損耗的效应增大, 这趋势随着 $\sqrt{\mu\epsilon_i} = \sqrt{2\mu/\rho}$ 的降低而加强。因此, 在相同的 $\mu\rho$ 值下, 增大 $\mu/\rho$ 有利于輻射。

以上的結論是由近似电流分布(12)式导出的。高級近似可能改变某些数值, 但我們估計上面的主要結論不会有显著的改变。

上述理論預言經初步实验証明是正确的。