高次样条函数的插值方法与偶次样条函数的极值理論*

李岳生

（数学力学系计算数学教研室）

摘　要

現在只有奇次样条函数的极值理論和插值方法，它們是在三次样条函数基础上建立起来的[1]。而現有的三次以上样条函数插值方法实际上是不好用的。本文指出，偶次(二次及更高次)样条函数，同样是有力学意义的。并針对任意高次(不論奇偶)样条函数提出了三类基本的插值問題，給出了統一的、便于程序标准化的插值方法；这些方法都归結为解帶狀矩陣綫代数方程組，很便求解。同时，針对稍微改变了提法的偶次样条函数插值問題，建立了偶次样条函数插值的极值理論，它是集中弯矩作用下的梁的撓度曲綫变形能极小性質的推广。此外，作为本文插值方法的基础的是我們提出和論証的δ-样条基函数系統。

引　言

在[2]中，我们把$a\leqslant x\leqslant b$上以x_j（$j=1,2,\cdots,N-1$）为“结点”的任意k次样条函数定义为$k+1$阶广义微分方程式

$$y^{(k+1)}(x)=\sum_{j=1}^{N-1}\beta_j\delta(x-x_j)\tag{0.1}$$

的广义解，其中结点x_j为分划

$$\Delta: \quad a=x_0<x_1<\cdots<x_{N-1}<x_N=b$$

的内分点　将(0.1)积分$k+1$次得通解

* 1974.10.15 接稿。

$$y(x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x^j+\sum_{j=1}^{N-1}\beta_j(x-x_j)_+^k/k! \qquad (0.2)$$

由此可见，如下$N+k$个函数作成的函数系：

$$\left\{1,x,\cdots,x^k,\ (x-x_j)_+^k/k!\ (j=1,2,\cdots,\ N-1)\right\}, \qquad (基\,\mathrm{I})$$

作成上述k次样条函数空间的一组基底，简称基Ⅰ。问题是基Ⅰ常使计算不稳定，不便直接应用。本文§1就是要建立起与基Ⅰ等价的δ-样条函数基,作为本文的基本工具。在§2利用δ-基给出统一的插值方法。§3论证偶次样条函数插值的极值性质即变分性质。这些就是本文的基本结果，在[1]中是没有涉及的。

§1. δ-样条基函数系的建立

1.等距分划的情形

设分划Δ是等距的，$x_0=a$，$x_j=x_0+jh$，$(j=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$ $h=(b-a)/N$，往下一律采用[2]中记号，定义

$$\Omega_k(x)=\bar{\Delta}^{k+1}\left\{x_+^k/k!\right\}=\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\binom{k+1}{j}\left(x+\frac{k+1}{2}-j\right)_+^k/k!$$

$$\bar{\Delta}f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f\left(x-\frac{1}{2}\right)。$$

$\Omega_k(x)$的各种基本性质详见[2]。它按段为k次多项式，属于$C^{k-1}(-\infty,\ \infty)$，于结点$\xi_j^{(k)}=-\dfrac{k+1}{2}+j(j=0,1,\cdots,\ k+1)$处，其$k$阶导数不连续，且呈对称山形，以$x=0$为山峰，夸度为$|x|\leqslant\dfrac{k+1}{2}$即

$$\Omega_k(x)\begin{cases}>0 & 当|x|<\dfrac{k+1}{2},\\[2mm] =0 & 当|x|\geqslant\dfrac{k+1}{2}\end{cases}$$

定理1. 于$a\leqslant x\leqslant b$上看，基Ⅰ和如下δ-基：

$$\left\{\Omega_k\left(\frac{x-x_i}{h}\right),\left(i=-\frac{k-1}{2},-\frac{k-1}{2}+1,\cdots,N+\frac{k-1}{2}\right)\right\}$$

是线性等价的。且

$$p(x)=\sum_{j=-\frac{k-1}{2}}^{N+\frac{k-1}{2}}C_j\Omega_k\left(\frac{x-x_j}{h}\right) \qquad (1.1)$$

是$a\leqslant x\leqslant b$上任意μ($\leqslant k$)次多项式的充要条件是其系数$\{C_j\}$为$\mu+1$阶差分方程式

$$\bar{\Delta}^{\mu+1}C_j=0\left(j=-\frac{k-\mu-2}{2},\cdots,N+\frac{k-\mu-2}{2}\right)\qquad(1.2)$$

之解。又若$\{C_j\}$满足

$$\bar{\Delta}^{k+1}C_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当} j=i,\\ 0 & \text{当} j\neq i\end{cases}$$

对$j=1,2,\cdots,N-1$，$i=1,2,\cdots,N-1$，且

$$C_{i-\frac{k+1}{2}}=\cdots=C_{i+\frac{k-1}{2}}=0$$

则(1.1)式的$p(x)=\left(\dfrac{x-x_i}{h}\right)_+^k/k!$

证明．对任一非负整数k，基Ⅰ和δ-基中函数，在$a<x<b$内同以$x_i(i=1,2,\cdots,N-1)$为结点且δ-基中每一函数均可由基Ⅰ线性表示出来，这是比较明显的。往证定理1的其余部分。为此将$p(x)$求$\mu+1$阶导数，注意$\Omega_k(x)$求导的性质并利用分部求和法便得

$$h^{\mu+1}p^{(\mu+1)}(x)=\sum_{j=-\frac{k-1}{2}}^{N+\frac{k-1}{2}}C_j\bar{\Delta}^{\mu+1}\Omega_{k-\mu-1}\left(\frac{x-x_j}{h}\right)=$$

$$=\sum_{j=-\frac{k-\mu-2}{2}}^{N+\frac{k-\mu-2}{2}}\Omega_{k-\mu-1}\left(\frac{x-x_j}{h}\right)\bar{\Delta}^{\mu+1}C_j\qquad(1.3)$$

当$\mu=k$时，(1.3)中$\Omega_{-1}(x)=\delta(x)$，由(1.3)立得定理1。

2．分划结点任意分布的情形

Δ：$\cdots x_{-1}<x_0=a<x_1<\cdots<x_{N-1}<x_N=b<x_{N+1}<\cdots$ 以上区间$[a,b]$外的分点$\cdots x_{-1}$，$\cdots x_{N+1}\cdots$等可以是任意设置的。只有讨论周期插值的情形，才自然要求分划也是周期地开拓出去，即$x_{j+N}-x_j=b-a$。

代替$\Omega_k\left(\dfrac{x-x_i}{h}\right)$的取非对称山形样条函数[2]

$$G_{k,i}(x)=\sum_{j=i-\frac{k+1}{2}}^{i+\frac{k+1}{2}}\prod_{l\neq j}\left(\frac{1}{(x_j-x_l)}\right)G_k(x_j-x)\qquad(1.4)$$

$$\left(i=-\frac{k-1}{2},\ -\frac{k-1}{2}+1,\ \cdots,\ N+\frac{k-1}{2}\right)$$

其中 $G_k(x)=x_+^k/k!$. $G_{k,i}(x)$有许多类似$\Omega_k\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$的性质(参〔2〕).定义

$$\omega_{ji}=\begin{cases}\prod\limits_{\substack{l=j-\frac{k+1}{2}\\ l\neq i}}^{j+\frac{k+1}{2}}\left(\frac{1}{x_i-x_l}\right), & j=-\frac{k-1}{2},\ \cdots,\ N+\frac{k-1}{2}\\ 0 & \text{当}\,|j-i|>\frac{k+1}{2}\end{cases}$$

定理2. 于 $a\leqslant x\leqslant b$ 上看

$$p(x)=\sum_{j=-\frac{k-1}{2}}^{N+\frac{k-1}{2}}C_jG_{k,j}(x)$$

为$k+1$阶微分方程式$y^{(k+1)}(x)=0$之解的充要条件是数列$\{C_j\}$,$\left(j=-\frac{k-1}{2},\ \cdots,\ N+\frac{k-1}{2}\right)$为$k+1$阶差分方程式之解:

$$\sum_{j=i-\frac{k+1}{2}}^{i+\frac{k+1}{2}}C_j\omega_{ji}=0\ (i=1,2,\cdots,N-1) \tag{1.5}$$

又若$\{C_l\}$满足$k+1$阶非齐差分方程式

$$(-1)^{k+1}\sum_{l=j-\frac{k+1}{2}}^{j+\frac{k+1}{2}}C_l\omega_{lj}=\delta_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,N-1 \tag{1.6}$$

且

$$C_{i-\frac{k+1}{2}}=C_{i-\frac{k+1}{2}+1}=\cdots=C_{i+\frac{k-1}{2}}=0 \tag{1.7}$$

则$p(x)=(x-x_i)_+^k/k!$

证明，注意

$$G_{k,j}(x)=\sum_{l=j-\frac{k+1}{2}}^{j+\frac{k+1}{2}}\omega_{jl}G_k(x_l-x)$$

$$p(x)=\sum_{j=-\frac{k-1}{2}}^{N+\frac{k-1}{2}} C_j G_{k,j}(x)=\sum_{l=-k}^{N+k}\ \sum_{j=l-\frac{k+1}{2}}^{l+\frac{k+1}{2}} C_j\omega_{jl}G_k(x_l-x)$$

$$G_{k,j}^{(k)}(x_i+0)-G_{k,j}^{(k)}(x_i-0)=(-)^{k+1}\omega_{ji}$$

$$p^{(k)}(x_i+0)-p^{(k)}(x_i-0)=(-1)^{k+1}\sum_{j=i-\frac{k+1}{2}}^{i+\frac{k+1}{2}} C_j\omega_{ji} \qquad (1.8)$$

由于$p(x)$显然为按段k次多项式且有$k-1$次连续导数，比较(1.5)，(1.8)看出，当且仅当（1.5）满足时，$p^{(k)}(x)$ 于 $x=x_i(i=1,2,\cdots,N-1)$ 处连续，从而$p(x)$ 为 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的 k 次(不超过 k 次) 多项式。

又比较(1.6)，(1.7)和(1.8)看出，当(1.6)满足时，$p^{(k)}(x)$仅在结点x_i处有单位跳跃，再由条件(1.7)及方程式(1.5)得知 $p(x)=0$于 $x\leqslant x_i$，而$(x-x_i)_+^k/k!$也是如 此，即 $p(x)=(x-x_i)_+^k/k!$。定理2证完。

由定理1和定理2，今后总取

$$(\delta\text{-基}):\qquad \varphi_i(x)=\begin{cases}\Omega_k\left(\dfrac{x-x_i}{h}\right)=\Omega_k\left(\dfrac{x-x_0}{h}-i\right) & \text{等距结点情形}\\ G_{k,i}(x) & \text{非等距结点情形}\end{cases}$$

$$\left(i=-\frac{k-1}{2},-\frac{k-1}{2}+1,\cdots,N+\frac{k-1}{2}\right)$$

作为k次样条函数的δ-基。

3。广义结点样条函数的δ-基

我们称

$$y^{(k+1)}(x)=\sum_{i=1}^{N-1}\ \sum_{0\leqslant j\leqslant r_i}\beta_{ij}\delta^{(j)}(x-x_i) \qquad (1\leqslant r_i\leqslant k-1)$$

之解

$$y(x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x^j+\sum_{i=1}^{N-1}\ \sum_{0\leqslant j\leqslant r_i}\beta_{ij}(x-x_i)_+^{k-j}\Big/(k-j)!$$

为广义结点样条函数，它们仍为按段k次多项式，但在结点处只保证连续性要求。对这类样条函数的δ-基可取为：

$$\varphi_i^j(x)=\begin{cases}\varphi_i(x) & \text{对}-\frac{k-1}{2}\leqslant i<1\text{及}N-1<i\leqslant N+\frac{k-1}{2},\ j=0,\\ \varphi_i^{(j)}(x) & \text{对}0\leqslant j\leqslant r_i,\ 1\leqslant i\leqslant N-1\end{cases}$$

最后，我们给出前几个$\Omega_k(x)$的函数值表，它们是在计算中反复用到的。

$\Omega_k(x)$的函数值表

k \ x	0	$\pm\frac{1}{2}$	±1	±1.5	±2	±2.5	$+3$
1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
2	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{23}{48}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{48}$	0	0	0
4	$\frac{230}{384}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{76}{384}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{384}$	0	0
5	$\frac{66}{120}$	$\frac{1682}{3840}$	$\frac{26}{120}$	$\frac{237}{3840}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{3840}$	0

§2．样条函数插值方法

现有的样条函数插值法仅限于奇次样条函数，且对$2n-1$次样条插值，由于直接推广"三弯矩法"，总以$S^{(2n-2)}(x_i)=M_i$作为基本未知量，尚须积分$2n-2$次才能得到$S(x)$本身。对$n>2$的情形，这种作法很不方便。对偶次样条函数插值则仅仅提及[1]

本节的方法是对任意k次样条插值作统一处理。系数矩阵一般是宽度为k的带矩阵，具有对角优势，计算稳定，程序便于标准化。

1．不带边界条件的样条函数插值

设给了插值节点x_i及相应函数值y_i，求k次样条函数$S_k(x)=\sum\limits_{j=-\frac{k-1}{2}}^{N+\frac{k-1}{2}}C_j\varphi_i(x)$

使满足：

$$S_k(x_i)=y_i\left(i=-\frac{k-1}{2},\ -\frac{k-1}{2}+1,\cdots,N+\frac{k-1}{2}\right)\qquad(2.1)$$

其中$\{\varphi_i(x)\}$为§1所准备好的δ-基。

条件(2.1)导至决定$C=\left(C_{-\frac{k-1}{2}},\cdots,C_{N+\frac{k-1}{2}}\right)^T$的$N+k$阶线性代数方程组：

$$AC=F \tag{2.2}$$

其中$A=(a_{ij})$为$N+k$阶方阵：

$$a_{ij}=\varphi_j(x_i)$$

$$F=\left(y_{-\frac{k-1}{2}},\cdots,y_{N+\frac{k-1}{2}}\right)^T$$

对任意非负整数k，不论节点x_i的分布等距与否，总有$\varphi_j(x_i)=0$当$|i-j|\geqslant\frac{k+1}{2}$时。因此，当$k$为奇（偶）数时，矩阵$A$为$k$、$(k+1)$对角带矩阵。

对$k=1$时，A为对角形，且

$$a_{ii}=\begin{cases}1 & \text{对等距情形,}\\ \dfrac{1}{x_{i+1}-x_{i-1}} & \text{对非等距情形}\end{cases}$$

从而

$$S_1(x)=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{N}y_j\Omega_1\left(\dfrac{x-x_0}{h}-j\right) & \text{等距情形}\\ \sum\limits_{j=0}^{N}y_j(x_{j+1}-x_{j-1})G_{1,j}(x) & \text{非等距情形}\end{cases}$$

这就是折线函数的表达式。它把离散数据连续化，便于数据磨光之用。

须注意，当k为偶数时，(2.1)中的插值节点x_i的下标为半整数点，此时规定$x_i=\frac{1}{2}\left(x_{i+\frac{1}{2}}+x_{i-\frac{1}{2}}\right)$，但样条函数结点仍保持为整下标点。

对等距节点情形，系数矩阵A变得特别简单，其各行由同样几个正数和零作成，且最大的数位在对角线上。例如，由$\Omega_k(x)$的表知：

$k=2$时　A由$\left(\frac{1}{8},\frac{3}{4},\frac{1}{8}\right)$作成三对角矩阵，

$k=3$时　A由$\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$作成三对角矩阵，

$k=4$时　A由$\left(\frac{1}{384},\frac{76}{384},\frac{230}{384},\frac{76}{384},\frac{1}{384}\right)$作成五对角矩阵，

$k=5$时　A由$\left(\frac{1}{120},\frac{26}{120},\frac{66}{120},\frac{26}{120},\frac{1}{120}\right)$作成五对角矩阵，

形成A的第一行（最末一行）时，须把上述第一个（最后一个）数去掉，如$k=2$时的$\frac{1}{8}$。

矩阵A的元素是非负的，且是对称的具有不可约对角优势的矩阵，从而是正定矩阵。很易用对称带矩阵消元法求解。

对非等矩情形，A的带状结构完全一样，但其每行数据已和节点分布有关。只要给出节点坐标，总可自动形成A。

以下讲带边界条件的插值，分三种常用情形。

2.第一类边界条件插值

$$\text{求 } S_k(x)=\sum_{i=-\frac{k-1}{2}}^{N+\frac{k-1}{2}} C_i\varphi_i(x)\text{使满足：}$$

内点插值条件： $S_k(x_i)=y_i\ (i=1,2,\cdots,N-1)$，

边界插值条件：

当$k=2m+1$为奇数时：

$$\left.\begin{aligned}&S_k^{(\alpha)}(x_0)=y_0^{(\alpha)}\quad(\alpha=0,1,\cdots,m)\\&S_k^{(\alpha)}(x_N)=y_N^{(\alpha)}\quad(\alpha=0,1,\cdots,m)\end{aligned}\right\}$$

当$k=2m$为偶数时：

$$\left.\begin{aligned}&S_k^{(\alpha)}(x_0)=y_0^{(\alpha)}\quad(\alpha=0,1,\cdots,m)\\&S_k^{(\alpha)}(x_N)=y_N^{(\alpha)}\quad(\alpha=0,1,\cdots,m-1)\end{aligned}\right\}$$

以上插值条件和待定常数C_i都是$N+k$个。对k为偶数时，左、右边界条件个数不等，以上是左边比右边多一个条件。当然，也可以反过来，使右边比左边多一个条件。

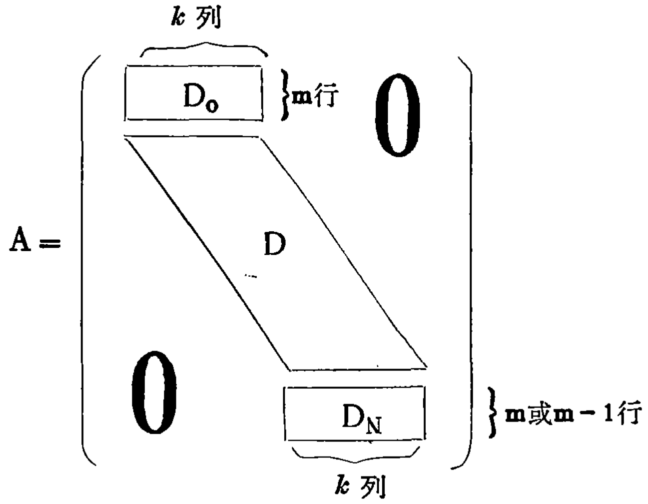
问题归结为求解

$$AC=F$$

其中

$$F=\begin{cases}(y_0^{(m)},y_0^{(m-1)},\cdots,y_0',y_0,y_1,\cdots,y_N,y_N'\cdots,y_N^{(m)}) & \text{当}k=2m+1\text{时，}\\(y_0^{(m)},y_0^{(m-1)},\cdots,y_0',y_0,y_1,\cdots,y_N,y_N'\cdots,y_N^{(m-1)}) & \text{当}k=2m\text{时}\end{cases}$$

A为$(N+k)\times(N+k)$阶方阵，其结构形式如下：



根据节点坐标，A可自动形成，无须详细写出。

作为举例，介绍几个等距节点的情形。

$K=2m=2$ 时：

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \text{0} & \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ \text{0} & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdots\cdots N+2\text{ 阶}$$

由此容易解得

$$\left.\begin{aligned} &C_{-\frac{1}{2}}=y_0-\frac{h}{2}y_0' \\ &C_{i+\frac{1}{2}}=2y_i-C_{i-\frac{1}{2}} \quad (i=0,1,\cdots,N) \end{aligned}\right\} \qquad (2、3)$$

这种分段二次曲线插值属于C^1，有良好的保凸性。关于它有下列定理。

定理3.　$S_2(x)=\sum\limits_{j=-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} C_j\Omega_2\left(\frac{x-x_0}{h}-j\right)$ 是“近似保凸”的，即

$$\frac{\bar{\Delta}}{h}S_2'(x)\Bigg|_{x=x_i}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}$$

定理4.　$S_2''(x)\geqslant 0$（或$\leqslant 0$）于$a\leqslant x\leqslant b$（但在其结点x_i处须理解为左、右导数）的必要条件是原始数据的二阶差分

$$y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}\geqslant 0(\text{或}\leqslant 0),(i=1,\cdots,N-1)$$

充分条件则是：

1) $\Delta^2 y_i\geqslant 0(\text{或}\leqslant 0)$，$(i=0,1,\cdots,N-2)$；

2) $\Delta^3 y_i\geqslant 0(\text{或}\leqslant 0)$，$(i=0,1,\cdots,N-3)$；

3) $y_1-y_0-y_0'h\geqslant 0(\text{或}\leqslant 0)$；

$y_2-3y_1+2y_0+y_0'h\geqslant 0(\text{或}\leqslant 0)$。

证明。在每一小区间$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$ $(i=0,1,\cdots,N-1)$ 上，$S_2''(x)$为常数，从而

$$S_2''(x)=S_2''\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{h^2}\left(C_{i+\frac{3}{2}}-2C_{i+\frac{1}{2}}+C_{i-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{h^2}\Delta^2 C_{i-\frac{1}{2}}$$

而由(2、3)有

$$\Delta^2 C_{i-\frac{1}{2}}+\Delta^2 C_{i+\frac{1}{2}}=2\Delta^2 y_i \quad (i=0,1,\cdots,N-2) \tag{2、4}$$

由此立见条件的必要性。

为证充分性，只要把差分方程(2、4)解出来：

$$\Delta^2 C_{-\frac{1}{2}}=2(y_1-y_0-y_0'h),$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 C_{\frac{1}{2}}&=2\Delta^2 y_0-\Delta^2 C_{-\frac{1}{2}}\\&=2(y_2-3y_1+2y_0+y_0'h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 C_{i+\frac{1}{2}}&=2(\Delta^2 y_i-\Delta^2 y_{i-1})+2(\Delta^2 y_{i-2}-\Delta^2 y_{i-3})+\cdots\\&\quad+2(\Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1)+\Delta^2 C_{\frac{1}{2}} \quad \text{当}i\text{为偶数时，}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 C_{i+\frac{1}{2}}&=2(\Delta^2 y_i-\Delta^2 y_{i-1})+2(\Delta^2 y_{i-1}-\Delta^2 y_{i-2})+\cdots\\&\quad+2(\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0)+\Delta^2 C_{-\frac{1}{2}} \quad \text{当}i\text{为奇数时}\end{aligned}$$

后二式又可写成

$$\Delta^2 C_{2\mu+\frac{1}{2}}=2\sum_{j=1}^{\mu}\Delta^3 y_{2j-1}+\Delta^2 C_{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta^2 C_{2\mu+1+\frac{1}{2}}=2\sum_{j=0}^{\mu}\Delta^3 y_{2j}+\Delta C^2_{-\frac{1}{2}}$$

由此可见，条件3)就是

$$\Delta^2 C_{-\frac{1}{2}}\geqslant 0(\text{或}\leqslant 0),\quad \Delta^2 C_{\frac{1}{2}}\geqslant 0(\text{或}\leqslant 0)$$

条件3)和2)合起来则足以保证

$$\Delta^2 C_{i+\frac{1}{2}} \geqslant 0(\text{或}\leqslant 0),\ (i=0,1,\ \cdots\cdots,\ N-2)$$

即保证$S_2''(x)\geqslant 0$(或$\leqslant 0$)于$a\leqslant x\leqslant b$.定理4证完。

推论1。设定理4条件1)、2)保留，将条件3)换成3)′ $y_0''>0$(或<0)则当h甚小时，定理4结论仍对。

因为据泰劳展开，3)成为

$$y_1-y_0-y_0'h=\frac{1}{2}y_0''h^2+\frac{1}{6}y_0'''h^3+O(h^4),$$

$$y_2-3y_1+2y_0+y_0'h=y_0''h^2+\frac{5}{3}y_0'''h^3+O(h^3)。$$

推论2。设被插函数$f(x)$满足$f''(x)>0$(或<0)和$f'''(x)>0$(或<0)于$a\leqslant x\leqslant b$，则当h甚小时，其二次样条插值函数$S_2(f;x)$也满足$S_2''(f;x)>0$(或<0)和$S_2'''(f;x)>0$(或<0)。

定理5。设被插函数$f(x)\in C^3[a,b]$，$S_2(f;x)$为其二次样条插值函数，则于$a\leqslant x\leqslant b$上一致地有

$$R_2^{(\alpha)}(f;x)=f^{(\alpha)}(x)-S_2^{(\alpha)}(f;x)=O(h^{3-\alpha})\qquad(\alpha=0,1,2,3)$$

证明。由于

$$R_2''\left(f;x_{i+\frac{1}{2}}\right)=f''\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)-S_2''\left(f;x_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{h^2}\left(\overline{\Delta}^2 f_{i+\frac{1}{2}}-\overline{\Delta}^2 C_{i+\frac{1}{2}}\right)+\left(f''(x_{i+\frac{1}{2}})-\frac{\overline{\Delta}^2}{h^2}f_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{h^2}\left(\overline{\Delta}^2 f_{i+\frac{1}{2}}-\overline{\Delta}^2 C_{i+\frac{1}{2}}\right)+O(h)$$

令 $\eta_{i+\frac{1}{2}}=f_{i+\frac{1}{2}}-C_{i+\frac{1}{2}}$ 则

$$\overline{\Delta}^2\eta_{i-\frac{1}{2}}+\overline{\Delta}^2\eta_{i+\frac{1}{2}}=\overline{\Delta}^2\left(f_{i-\frac{1}{2}}+f_{i+\frac{1}{2}}\right)-\overline{\Delta}^2\left(C_{i-\frac{1}{2}}+C_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\overline{\Delta}^2\left(f_{i-\frac{1}{2}}+f_{i+\frac{1}{2}}\right)-2\ \overline{\Delta}^2 f_i=O(h^3)$$

解出$\overline{\Delta}^2\eta_{i+\frac{1}{2}}$ 得

$$\overline{\Delta}\eta_{i+\frac{1}{2}}=O(h^3)\ ,\qquad \frac{\overline{\Delta}^2}{h^2}\eta_{i+\frac{1}{2}}=O(h)$$

于是$R_2''\left(f;\ x_{i+\frac{1}{2}}\right)=O(h)\left(i=0,1,\cdots,N-1\right)$进而于子区间$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$上有

$$R_2''(f;x)=R_2''\left(f;\ x_{i+\frac{1}{2}}\right)+\int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x}f'''(x)dx=O(h)$$

由罗尔定理知，至少有一点ξ，$x_i<\xi<x_{i+1}$ 使 $R_2'(f;\xi)=0$，从而 $R_2'(f;x)=$

$=\int_\xi^x R_2''(f;x)dx=0(h^2)$，再进一步有 $R_2(f;x)=R_2(f;x_i)+\int_{x_i}^x R_2'(f;x)dx$

$=O(h^3)$，定理五证完。

以上 $k=2m=2$ 的结果，是针对如下提法：

$$S_2(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,N),\quad S_2'(x_0)=y_0'$$

而言的。但应用上也有要求把导数条件作为右边界条件的，即要求：

$$S_2(x_i)=y_i\ (i=0,1,\cdots,N),\ S'(x_N)=y'_N \tag{2.5}$$

此时，$S_2(x)$ 的系数可以由右到左递推得到：

$$\left.\begin{aligned}&C_{N+\frac{1}{2}}=y_N+\frac{h}{2}y'_N\\&C_{i-\frac{1}{2}}=2y_i-C_{i+\frac{1}{2}}\quad(i=N,N-1,\cdots,0)\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

定理3、5仍对，定理4的充分条件1)—3)则要改成：

1′) $\Delta^2y_i\geqslant0$(或$\leqslant0$)，$(i=0,1,\cdots,N-2)$

2′) $\Delta^3y_i\leqslant0$(或$\geqslant0$)，$(i=0,1,\cdots,N-3)$

3′) $y_{N-1}-y_N+y'_Nh\geqslant0(\leqslant0)$，$y_{N-2}-3y_{N-1}+2y_N-y'_Nh\geqslant0$(或$\leqslant0$)

差别就在于由要求 Δ^2y_i，Δ^3y_i 为同号不等式 1)、2) 改成反号不等式 1′)、2′)。3′) 则是右端条件 $\nabla^2C_{N+\frac{1}{2}}\geqslant0$(或$\leqslant0$)，$\nabla^2C_{N-\frac{1}{2}}\geqslant0(\leqslant0)$

下表是要求作保凸光滑插值的实际问题。正属于此后一情况。我们是用由右向左作按段二次插值的方法解决的。

$k=2m+1=3$ 的情形：

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2h}&0&\frac{1}{2h}&0&&&\\\frac{1}{6}&\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&0&&\mathbf{0}&\\0&\frac{1}{6}&\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&&\\&\mathbf{0}&&&\frac{1}{6}&\frac{2}{3}&\frac{1}{6}\\&&&&-\frac{1}{2h}&0&\frac{1}{2h}\end{pmatrix}\cdots N+3\text{ 阶}$$

x_i	y_i	$\bar{\Delta} y_i$	$\bar{\Delta}^2 y_i$	$\bar{\Delta}^3 y_i$
30	80			
		30		
80	110		−8	
		22		2.75
130	132		−5.25	
		16.75		2.75
180	148.75		−2.5	
		14.25		0.25
230	163		−2.25	
		12		0.75
280	175		−1.5	
		10.5		0.5
330	185.5		−1	
		9.5		0.5
380	195		−0.5	
		9		0.25
430	204		−0.25	
		8.75		
480	212.75			

在此值得指出我们这里的方法和熟知的“三弯矩法”和“三转角法”(参[1]中第一章)的区别与联系。将$S_3(x)=\sum_{j=-1}^{N+1} C_j\Omega_3\left(\frac{x-x_j}{h}\right)$求一次和二次导数，并利用分部求和法得

$$S_3'(x)=\sum_{j=-1}^{N+1} C_j\bar{\Delta}\Omega_2\left(\frac{x-x_j}{h}\right)\Big/h=\sum_{j=-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}}\bar{\Delta}C_j\Omega_2\left(\frac{x-x_j}{h}\right)\Big/h$$

$$S_3''(x)=\sum_{j=0}^{N}\bar{\Delta}^2C_j\Omega_1\left(\frac{x-x_j}{h}\right)\Big/h^2$$

于是

$$m_i=S_3'(x_i)=\frac{\bar{\Delta}}{2h}\left(C_{i-\frac{1}{2}}+C_{i+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2h}\left(C_{i+1}-C_{i-1}\right),$$

$$M_i=S_3''(x_i)=\frac{1}{h^2}(C_{i+1}-2C_i+C_{i-1})$$

在[1]中是将M_i或m_i作为基本未知量，求到它们之后再作积分反求$S_3(x)$；我们则相反，先求出C_i即$S_3(x)$的表达式，然后通过求导数得到M_i或m_i。

若对 $S_3(x_i)=\sum\limits_{j=-1}^{N+1}C_j\Omega_3\left(\dfrac{x_i-x_j}{h}\right)=\sum\limits_{j=-1}^{N+1}C_j\Omega_3(i-j)=y_i$ 两端对 i 作二阶差分，则得

$$\sum_{j=0}^{N}\Omega_3(i-j)\bar{\Delta}^2C_j/h^2=\bar{\Delta}^2y_i/h^2\quad(i=1,\cdots\cdots,N-1)$$

以 $M_i=\bar{\Delta}^2C_i/h^2$ 作基本未知量，则上式成为[1]中熟知的“三弯矩方程”：

$$\frac{1}{6}M_{i-1}+\frac{2}{3}M_i+\frac{1}{6}M_{i+1}=\bar{\Delta}^2y_i/h^2$$

对非等距情形，以上联系也可以建立。总之，既使是对对三次样条插值，我们的方法也比三弯矩法来得灵活和统一。

$K=2m=4$ 的情形：

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{1}{2h^2} & -\frac{1}{2h^2} & -\frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2h^2} & & & & \\
-\frac{1}{6h} & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{2h} & \frac{1}{6h} & & & \mathbf{0} & \\
\frac{1}{24} & \frac{11}{24} & \frac{11}{24} & \frac{1}{24} & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & \frac{1}{24} & \frac{11}{24} & \frac{11}{24} & \frac{1}{24} \\
\mathbf{0} & & & & -\frac{1}{6h} & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{2h} & \frac{1}{6h}
\end{pmatrix}\cdots N+4\text{ 阶}$$

3．第二类边界条件插值

求2中同一形式的 $S_k(x)$ 且满足同样的内点插值条件和如下的边界插值条件：

当 $k=2m+1$ 为奇数时：

$$\left.\begin{aligned}
S_k^{(\alpha)}(x_0)&=y_0^{(\alpha)}\qquad(\alpha=0,m+1,m+2,\cdots,2m)\\
S_k^{(\alpha)}(x_N)&=y_N^{(\alpha)}\qquad(\alpha=0,m+1,m+2,\cdots,2m)
\end{aligned}\right\}$$

当 $k=2m$ 为偶数时：

$$\left.\begin{aligned} S_k^{(\alpha)}(x_0) &= y_0^{(\alpha)} \qquad (\alpha=0,m,m+1,\cdots,2m-1) \\ S_k^{(\alpha)}(x_N) &= y_N^{(\alpha)} \qquad (\alpha=0,m,m+1,\cdots,2m-2) \end{aligned}\right\},$$

此时仍归结为求解$AC=F$，A的结构与2中相似，可按节点坐标自动形成，不再赘述。

4。第三类即周期性边界条件插值

同上求$S_k(x)$使满足同样的内点插值条件和周期性边界插值条件：

$$\left.\begin{aligned} S_k^{(\alpha)}(x_0) &= y_0^{(\alpha)}, \qquad (\alpha=0,1,\cdots,k_0) \\ S_k^{(\alpha)}(x_N) &= S_k^{(\alpha)}(x_0), \qquad (\alpha=0,1,\cdots k-k_0) \end{aligned}\right\}$$

其中$0\leqslant k_0\leqslant k-k_0$ 或 $0\leqslant 2k_0\leqslant k$ 。

此时归结为$AC=F$，A 的结构和上述情形略为不同，主要是左下角将出现非零元素，但仍可自动形成，用标准程序求解。

以上几种插值都能保证在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上对 k 次多项式为精确，误差为 $O(h^{k+1})$ 。但在开拓更大些的区间上达不到这一点。

5。磨光法

在〔2〕中我们引进了$f(x)$的$k+1$次磨光公式：

$$f_{k+1}(x)=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_k\left(\frac{x-t}{h}\right)f(t)dt$$

由分部积分法不难得到

$$f_{k+1}(x)=\bar{\Delta}^{k+1}\{f^{(-k-1)}(x)\}/h^{k+1}$$

$f^{(-k-1)}(x)$表$f(x)$的$k+1$次积分。

$k=0$ 时：　$f_1''(x)=\bar{\Delta}f'(x)/h$ ，

$k=1$ 时：　$f_2''(x)=\bar{\Delta}^2 f(x)/h^2$ 。

由此可见，一次，二次磨光公式有很好的保凸性。若任给了一组离散节点x_i及相应型值 $y_i(i=0,1,\cdots,N)$，我们可以把它们用折线连接起来得

$$S_1(x)=\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} y_j\Omega_1\left(\dfrac{x-x_j}{h}\right) & \text{等距节点情形，} \\ \sum\limits_{j=0}^{N}(x_{j+1}-x_{j-1})y_jG_{1,j}(x) & \text{非等距节点情形。} \end{cases}$$

将之磨光得　$f_{k+1}(x)=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_k\left(\frac{x-t}{h}\right)S_1(t)dt$。在等距节点　$x_{i+1}-x_i=h$

$(i=0,1,\cdots N-1)$，易得

$$f_1''(x_i)=(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})/h^2\quad,$$

$$f_2''(x_i)=(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})/h^2\quad,$$

$$f_1(x_i)=y_i+(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})/8\quad,$$

$$f_2(x_i)=y_i+(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})/6\quad。$$

可见一次，二次磨光公式完全保存了原型值的凹凸性，但型值点经磨光后有偏差。为了克服这一偏差以改进磨光法的逼近性，在吉林大学、三机部六院一所的研究工作中，曾引进“盈亏型值”的概念，即先将原型值y_i修改成

$$\widetilde{y_i}=y_i-(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})/8\qquad(k=0\text{ 时})$$

$$\widetilde{y_i}=y_i-(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})/6\qquad(k=1\text{时})$$

对型值$\left\{\widetilde{y_i}\right\}$磨光得$\widetilde{f_1}(x)$，$\widetilde{f_2}(x)$，于是$\widetilde{f_1}(x_i)=y_i-\overline{\Delta}^4y_i/64$，$\widetilde{f_2}(x_i)=y_i-$ $-\overline{\Delta}^4y_i/36$，从而大大提高了逼近性，同时又保存了凹凸性。这一方法对一些实际模线型值磨光的结果，得到了实际上满意的结果。对非等距情形可作类似分析。

这一方法容易推广到任意形状的空间曲线（包括封闭曲线）和曲面的磨光上去。设$\vec{R}=\vec{R}(t)$ $0\leqslant t\leqslant L$为曲线的参数方程，t为弧长参数（特别应用上为一空间折线），则磨光公式为

$$\vec{R}_{k+1}(s)=\frac{1}{h^{k+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_k\left(\frac{x-t}{h}\right)\vec{R}(t)dt=\overline{\Delta}^{k+1}\left\{\vec{R}^{(-k-1)}\right\}\Big/h^{k+1}$$

设$\vec{R}=\vec{R}(\xi,\eta)$为空间曲面，则磨光公式为

$$\vec{R}_{p,q}(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_{p-1}\left(\frac{u-\xi}{\Delta\xi}\right)\Omega_{q-1}\left(\frac{v-\eta}{\Delta\eta}\right)\vec{R}(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$/(\Delta\xi)^p(\Delta\eta)^q$$

这样从离散数据出发，可得到样条曲面。

§3. 偶次样条函数的极值理论

迄今只有奇次样条函数的极值理论，它是在三次样条函数基础上建立起来的。这一理论不能简单地推广到偶次样条函数上去。但二次样条函数即如下微分方程式

$$y'''(x)=\sum_{j=1}^{N-1}\beta_j\delta(x-x_j)(=q(x)) \tag{3.1}$$

的解，可以解释为集中弯矩作用下的梁的挠度曲线。将它再求一次导数得

$$y^{(4)}(x)=q'(x) \tag{3.2}$$

它可以看作如下泛函

$$J(y)=\frac{1}{2}\int_a^b y''(x)^2dx-\int_a^b q'(x)y\,dx$$

的欧勒方程，事实上，求$J(y)$的一次变分

$$\delta J(y)=\int_a^b y''(x)\delta y''(x)dx-\int_a^b q'(x)\delta y\,dx=$$

$$=\{y''\delta y'-y'''\delta y\}\Big|_a^b+\int_a^b(y^{(4)}(x)-q'(x))\delta y\,dx$$

$$=y''\delta y'\Big|_a^b+\int_a^b(y^{(4)}(x)-q'(x))\delta y\,dx$$

（∵由(3.1)知$y'''(a)=y'''(b)=0$），从$\delta J(y)=0$导至方程(3.2)及如下各种边值条件：

$$\delta y'(a)=\delta y'(b)=0\quad; \tag{3.3}$$

或

$$y''(a)=y''(b)=0\quad; \tag{3.4}$$

等等。由于$J(y)=\frac{1}{2}\int_a^b y''(x)^2dx-\sum_{j=1}^{N-1}\beta_j y'(x_j)$，如果求(3.1)的解$y(x)$不仅要求它满足边值条件(3.3)或(3.4)而且将$y'(x_j)(j=1,2,\cdots,N-1)$约束住(即指定它们的值)，则

$$minJ(y)\xleftrightarrow{\text{等价于}}min\int_a^b y''(x)^2dx$$

由此可以作出结论：在所有属于$H^2[a,b]$*)的函数$f(x)$中，如果满足边值条件(3.3)或(3.4)同时在内结点$x_j(j=1,\cdots,N-1)$处$f'(x_j)$被约束住(即给定)，则以(3.1)的解即二次样条函数使积分

$$\int_a^b f''(x)^2dx\qquad\text{取极小。}$$

*) $H^{m+1}[a,b]$表$[a,b]$上m阶导数絕对連續而m+1阶导数平方可积的函数类

二次样条函数的这一极小模性质也就是变形能的极小性质，它成为我们推广到任意偶次样条函数上去的基础。

下面我们研究$k=2m$次样条函数的插值问题。$2m$次样条函数乃$2m+1$阶方程式

$$S^{(2m+1)}(x)=\sum_{j=1}^{N-1}\beta_j\delta(x-x_j)$$

$$(a=x_0<x_1<\cdots<x_{N-1}<x_N=b)$$

的解：

$$S(x)=\sum_{j=0}^{2m}a_jx^j+\sum_{j=1}^{N-1}\beta_j(x-x_j)_+^{2m}\Big/2m! \tag{3.5}$$

第一类边界条件插值问题：求形如(3.5)的$S(x)$使满足：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{内点插值条件：} & S'(x_i)=y_i' \quad (i=1,2,\cdots,N-1)\\ \text{边界插值条件：} & S(x_0)=y_0,\ S^{(\alpha)}(x_0)=y_0^{(\alpha)},\ S^{(\alpha)}(x_N)=y_N^{(\alpha)}\end{array}\right\}$$

$$(\alpha=1,2,\cdots,m)$$

第二类边界条件插值问题：求$S(x)$除满足上述同一内点条件外，还要求满边界插值条件：

$$S(x_0)=y_0,\ S^{(\alpha)}(x_0)=y_0^{(\alpha)},\ S^{(\alpha)}(x_N)=y_N^{(\alpha)} \quad (\alpha=m+1,\cdots,2m)$$

第三类即周期性条件插值问题：同上求$S(x)$满足内点条件及边界插值条件：

$$\left.\begin{array}{ll}S^{(\alpha)}(x_0)=y_0^{(\alpha)} & (\alpha=0,1,2,\cdots,m_0)\\ S^{(\alpha)}(x_N)=S^{(\alpha)}(x_0) & (\alpha=1,2,\cdots,2m-m_0)\end{array}\right\}$$

$(1\leqslant m_0\leqslant m)$

以上$\left\{y_i',\ y_0^{(\alpha)},\ y_N^{(\alpha)}\right\}$等为给定数据。又加在$x_0$处的条件$S(x_0)=y_0$等可改成右端点条件$S(x_N)=y_N$。

定理6（存在唯一性）。以上三种类型的插值问题的解是存在而且唯一的，但对第二类插值问题须补充要求$N>m$。

证明。只须证齐插值问题的解恒为零。为此设$S(x)$为齐插值问题的任一$2m$次样条函数解。则一方面

$$\int_a^b S^{(2m+1)}(x)S'(x)dx=\sum_{j=1}^{N-1}\int_a^b\beta_j\delta(x-x_j)S'(x)dx=\sum_{j=1}^{N-1}\beta_jS'(x_j)=0$$

另一方面，由分部积分法又有

$$\int_a^b S^{(2m+1)}(x)S'(x)dx = \left\{ S^{(2m)}(x)S'(x) - S^{(2m-1)}(x)S''(x) + \cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^{m-1}S^{(m+1)}(x)S^{(m)}(x) \right\}\Big|_a^b + (-1)^m\int_a^b \left\{ S^{(m+1)}(x) \right\}^2 dx$$

而不论对那一类边界插值条件，都有

$$\left\{ S^{(2m)}(x)S'(x) - S^{(2m-1)}(x)S''(x) + \cdots + \right.$$

$$\left. (-1)^{m-1}S^{(m+1)}(x)\,S^{(m)}(x) \right\}\Big|_a^b = 0$$

从而

$$\int_a^b \left\{ S^{(m+1)}(x) \right\}^2 dx = 0$$

由于$S(x)\epsilon C^{2m-1}[a,b]$，$S^{(m+1)}(x)\epsilon C^{m-2}[a,b]$，对$m\geqslant 1$　$S^{(m+1)}(x)$最低限度也是按段连续函数　于是$S^{(m+1)}(x)=0$于$a\leqslant x\leqslant b$，即$S(x)$为m次多项式。

由第一类边值条件，立即得 $S(x)\equiv 0$于$a\leqslant x\leqslant b$。

对第二类边值条件，由于要求$N>m$，即$S'(x)$有m个以上的零点，从而$S'(x)\equiv 0$于$[a,b]$。再由边值条件 $S(x_0)=0$ 推得 $S(x)\equiv 0$于$[a,b]$。

对第三类插值条件，至少有m个形如：

$S^{(\alpha)}(x_N)=S^{(\alpha)}(x_0)$　$(\alpha=1,2,\cdots,2m-m_0)$的条件。从$S^{(m-1)}(x)=S^{(m-1)}(a)+S^{(m)}(a)(x-a)$，$S^{(m-1)}(b)=S^{(m-1)}(a)$推到$S^{(m)}(a)=0$，依此类推得$S^{(m-1)}(a)=S^{(m-2)}(a)=\cdots=S''(a)=0$，而$S'(x)=S'(a)$。再据边值条件$S'(a)=S(a)=0$推得$S(x)\equiv 0$于$[a,b]$。至此定理6证完。

定理7（第一积分关系）设给定被插函数$f(x)\epsilon H^{m+1}[a,b]$，$S(f;x)$为其$2m$次样条插值函数，边界条件为上述三类中的任何一类。但第二类边界条件限制为齐条件，而周期性边界条件自然要求$f(x)$本身满足。则有第一积分关系：

$$\int_a^b \left\{ f^{(m+1)}(x) \right\}^2 dx = \int_a^b \left\{ S^{(m+1)}(f;x) \right\}^2 dx + \int_a^b \left\{ f^{(m+1)}(x) - S^{(m+1)}(f;x) \right\}^2 dx$$

证明。令$g(x)=f(x)-S(f;x)$则$g(x)$满足齐边值条件。所要证的等价于要证

$$\int_a^b S^{(m+1)}(x)g^{(m+1)}(x)dx = 0$$

由分部积分法有

$$\int_a^b S^{(m+1)}(x)g^{(m+1)}(x)dx = \left\{ S^{(m+1)}(x)g^{(m)}(a) - S^{(m+2)}(x)g^{(m-1)}(x) \right.$$

$$\left. + \cdots + (-1)^{m-1}S^{(2m)}(x)g'(x) \right\}\Big|_a^b + (-1)^m\int_a^b S^{(2m+1)}(x)g'(x)dx =$$

$$0+\sum_{j=1}^{N-1}\beta_j g'(x_j)=0$$

上述$\{\cdots\}\Big|_a^b=0$是由于边界插值条件，而$g'(x_j)=0\quad(j=1,\cdots,N-1)$则根据内点插值条件。定理7得证。

定理8（极小模性质）.设$f(x)\in H^{m+1}[a,b]$为任一给定的被插函数，$g(f;x)$为其任一插值函数，且设$g(f;x)\in H^{m+1}[a,b]$.又设$S(f;x)$为$f(x)$的$2m$次样条插值函数.第二类边界插值条件假定是齐条件。则有如下不等关系式

$$\int_a^b\{S^{m+1}(f;x)\}^2dx\leqslant\int_a^b\{g^{(m+1)}(f;x)\}^2dx$$

当且仅当$g(f;x)=S(f;x)$时方取等号。

证明.可视$g(f;x)$为$S(f;x)$的被插函数，且满足定理7条件，于是由第一积分关系得

$$\int_a^b\{g^{(m+1)}(f;x)\}^2dx=\int_a^b\{S^{(m+1)}(f;x)\}^2dx+$$

$$+\int_a^b\{g^{(m+1)}-S^{(m+1)}(f;x)\}^2dx\geqslant\int_a^b\{S^{(m+1)}(f;x)\}^2dx$$

除非 $\int_a^b\{g^{(m+1)}(f;x)-S^{(m+1)}(f;x)\}^2dx=0$即$g^{(m+1)}(f;x)=S^{(m+1)}(f;x)$于$a\leqslant x\leqslant b$方取等号。但由$g^{(m+1)}(f;x)=S^{(m+1)}(f;x)$推出$g(f;x)=S(f;x)+m$次多项式。从而$g(f;x)$本身也是我们所考虑的$2m$次样条函数。据定理6，$2m$次样条插值函数是唯一的，从而$g(f;x)=S(f;x)$。定理8证完。

定理9（最佳逼近性）设$f(x)\in H^{m+1}[a,b]$为任意给定的被插函数。$S(f;x)$为其$2m$次样条插值函数，$S(x)$为形如(3、5)的任一$2m$次样条函数和$S(f;x)$满足同样的边值条件。则

$$\int_a^b\{f^{(m+1)}(x)-S^{(m+1)}(f;x)\}^2dx\leqslant\int_a^b\{f^{(m+1)}(x)-S^{(m+)}(x)\}^2dx$$

当且仅当$S(x)=S(f;x)$时方取等号；对第二类边值条件，当且仅当$S(x)=S(f;x)+m$次多项式时方取等号。

证明。$f(x)-S(x)=\{f(x)-S(f;x)\}+\{S(f;x)-S(x)\}=g(x)+\widetilde{S}(x)$，$g(x)=f(x)-S(f;x)$满足齐边值条件，$\widetilde{S}(x)=S(f;x)-S(x)$则为一形如(3.5)的样条函数。如前，由分部积分法可以证得$\int_a^b g^{(m+1)}(x)\widetilde{S}^{(m+1)}(x)dx=0$，从而

$$\int_a^b \left\{ f^{(m+1)} - S^{(m+1)}(x) \right\}^2 dx = \int_a^b \left\{ f^{(m+1)}(x) - S^{(m+1)}(f;x) \right\}^2 dx +$$

$$+ \int_a^b \left\{ S^{(m+1)}(f;x) - S^{(m+1)}(x) \right\}^2 dx \geqslant \int_a^b \left\{ f^{(m+1)}(x) - \right.$$

$\left. - S^{(m+1)}(f;x) \right\} dx$当且仅当$\widetilde{S}^{(m+1)}(x) \equiv 0$于$[a,b]$时方取等号。对第一、第三类边值条件，由$\widetilde{S}^{(m+1)}(x) \equiv 0$于$[a,b]$立即推出$\widetilde{S}(x) \equiv 0$即$S(x) \equiv S(f;x)$于$[a,b]$；对第二类边值条件则推出$S(x) = S(f;x) + m$次多项式于$[a,b]$，定理9证完。

定理10（第二积分关系）设$f(x) \in C^{2m+1}[a,b]$为任意给定的被插函数，$S(f;x)$为其样条插值函数，则总有第二积分关系：

$$\int_a^b \left\{ f^{(m+1)}(x) S^{(m+1)}(f;x) \right\}^2 dx = (-1)^m \int_a^b \left\{ f'(x) - S'(f;x) \right\} f^{(2m+1)}(x) dx$$

证明，将上式左端积分反复作m次分部积分得

$$\int_a^b \left\{ f^{(m+1)}(x) S^{(m+1)}(f;x) \right\}^2 dx = \left\{ \left(f^{(m+1)}(x) - S^{(m+1)}(f;x) \right) \left(f^{(m)}(x) - S^{(m)}(f;x) \right) - \cdots + (-1)^{m-1} \left(f^{(2m)}(x) - S^{(2m)}(f;x) \right) \left(f'(x) - S'(f;x) \right) \right\} \Big|_a^b + (-1)^m \int_a^b \left\{ f^{(2m+1)}(x) - S^{(2m+1)}(f;x) \right\} \left\{ f'(x) - S'(f;x) \right\} dx = (-1)^m \int_a^b f^{(2m+1)}(x) \left\{ f'(x) - S'(f;x) \right\} dx$$

上式$\left\{ \cdots \right\} \Big|_a^b = 0$是由于插值边界条件，而$\int_a^b S^{(2m+1)}(f;x) \left\{ f'(x) - S'(f;x) \right\} dx = \sum_{j=1}^{N-1} \beta_j \{ f'(x_j) - S'(f;x_j) \} = 0$则是由于插值的内点条件。定理10证完。

定理11，设$f(x) \in C^{2m+1}[a,b]$，则

$$R(f;x) = f(x) - S(f;x) = 0(h^{2m-1}),$$

$$R^{(\alpha)}(f;x) = 0(h^{2m-\alpha}) \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, m)$$

于$a \leqslant x \leqslant b$上一致地成立。其中$h = \underset{i}{Max} |x_{i+1} - x_i|$。

证明，对任意x，$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$，由于$R'(f;x_j)=0(j=1,2,\cdots,N-1)$，反复应用劳尔定理得知，在$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$上，至少有$R''(f;x)$的一个零点。在$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$隣近而长度不超过$2h$的区上，至少有$R'''(f;x)$的一个零点。依此类推，在$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$隣近而长度不超过$(m-1)h$的区间内，至少有$R^{(m)}(f;x)$的一个零点$\xi$，于是$R^{(m)}(f;x)=$ $=\int_\xi^x R^{(m+1)}(f;x)dx$ 从而

$$|R^{(m)}(f;x)|\leqslant L\|R^{(m+1)}(f;x)\|h^{\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

其中$\|R^{(m+1)}(f)\|=\left\{\int_a^b|R^{(m+1)}(f;x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$，$L$为某常数。进而将(3.6)积分$(m-1)$次得

$$|R'(f;x)|\leqslant L_1\|R^{(m+1)}(f)\cdot\|h^{\frac{1}{2}+m-1} \tag{3.7}$$

由第二积分关系

$$\|R^{(m+1)}(f)\|\leqslant \underset{a\leqslant x\leqslant b}{Max}|R'(f;x)|^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b|f^{(2m+1)}(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

以之代入(3.7)右端得

$$\underset{a\leqslant x\leqslant b}{Max}|R'(f;x)|\leqslant \underset{a\leqslant x\leqslant b}{Max}|R'(f;x)|^{\frac{1}{2}}\ L_1\left\{\int_a^b|f^{(2m+1)}(x)|^2ax\right\}\ h^{m-\frac{1}{2}}$$

两边平方之得

$$\underset{a\leqslant x\leqslant b}{Max}|R'(f;x)|=O(h^{2m-1}) \tag{3.9}$$

进而

$$\underset{a\leqslant x\leqslant b}{Max}|R(f;x)|=\underset{a\leqslant x\leqslant b}{Max}\left|\int_a^x R'(f;x)\,dx\right|=O(h^{2m-1})$$

此后一不等式正是要证的第一个不等式。

将(3.9)再代入(3.8)又得

$$\|R^{(m+1)}(f)\|=O\left(h^{m-\frac{1}{2}}\right)$$

再代入(3.6)得

$$|R^{(m)}(f;x)|=O(h^m)$$

将它逐次积分，便得定理所要证的不等式。

对$m=1$的二次样条函数插值的具体分析表明$R'(f,x_i)=0$，从而$R'(f;x)=O(h^2)$，$R(f;x)=O(h^2)$这比定理11中的估计关于h要高一阶。一般说来，定理11的估计关于h也可以提高一阶，但证明不能借第二积分关系，而需更细致的矩阵分析。

关于本节所述插值的实际构造，我们仍建议采用δ-基。如果事先只给了$f(x)$的

一组离散值$f(x_i)(i=0,1,\cdots,N)$，则可令

$$f'(x_i)=\mu_i\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}+\lambda_i\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

$$\lambda_i=\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_{i-1}},\quad \mu_i=1-\lambda_i$$

从而可作本节所述的插值。

本节的结果可以推广到$2m$次广义结点样条函数

$$S(x)=\sum_{j=0}^{2m}\alpha_j x^j+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{0\leqslant j\leqslant r_i}\beta_{ij}(x-z_i)_+^{2m-j}/(2m-j)!$$

上去，只要限制$0\leqslant r_i\leqslant m-1(i=1,2,\cdots,N-1)$。而相应插值问题的三类边值条件不变。内点条件则换成：

$$S^{(j)}(x_i)=y_i^{(j)}\ (0\leqslant j\leqslant r_i,\ i=1,2,\cdots,N-1)\tag{3.10}$$

j不一定要求取遍由0到r_i的各整数，即不一定要求是埃尔米特型的插值条件，可以是伯尔柯夫型插值条件，即所谓HB问题[3]。但要求插值条件(3.10)中的j的变化和广义结点样条函数中j的变化完全一致。

作此推广以后，本节定理6到定理11依然成立。关键是此广义结点样条函数属于$H^{m+1}[a,b]$。

参 考 文 献

〔1〕Ahlberg, J. H., Nilson, E. N., amd Walsh, J. L., The Theory of Splines and Their Applications (1967)

〔2〕李岳生，δ函数的逼近与应用(Ⅰ)，吉林大学学报，自然科学版，1974年第2期

〔3〕Schoenberg, J. H., J. Math. Anal Appl. 21,207—231(1968)