

# 薄板弯曲的一种9自由度快速 收敛三角形单元体\*

刘世宁 陈树坚

(数学力学系力学教研室)

## 摘 要

1. 应用 $\lambda$ 乘子法将薄板势能原理推广为以挠度、转角和横向剪力等为变量的变分原理,它不要求转角与挠度预先满足法线假设(Kirchhoff假设),因而特别适合于构造离散法线假设型的有限单元体。

2. 由这个变分原理出发推导了一种半杂交离散法线假设型薄板三角形单元体,以角点为节点,以 $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$ 为未知数。典型算例表明性能良好,无论对于挠度和弯矩都可以给出较准确的数值结果。与具有代表性的同类单元体进行了比较。

3. 这个单元体的有关计算公式均已列在附录中。刚度矩阵有显式表示。因而可以方便地引入现成的计算程序中。

## I. 引 言

薄板的三角形单元体也许最具有通用性。它不但适用于各种形状的板,而且也用于任意形状的薄壳。在划分网格时,单元体大小又能较灵活地变化。

三角形单元体中,以角点为节点,以 $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$ 为未知数的9自由度单元体最为实用。从力学角度看,它直观性强,用于复杂结构时较为方便,在一般情况下,其线性变化的弯矩已能较好地反映实际结构中的应力分布状态;从计算角度看,由于“角点优势”,总未知数少,系数矩阵带宽也窄,因而对计算机的要求可以降低。然而,由于不可能用简单3次多项式同时满足 $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial n}$ 的连续条件,使得

\* 1974.10.10接稿

寻求性能优良的这种单元体成为一个相当困难的问题。

Clough 和 Tocher<sup>[1]</sup>(1965) 将单元体先分为 3 个小三角形。每个小三角形内,  $w$  均用 3 次多项式表示, 由此得到了一种完全协调型的单元体 (HCT), 但是刚度矩阵计算比较麻烦, 而且过于刚硬, 收敛较慢。

Allman<sup>[2]</sup>(1970) 利用广义变分原理, 在三角形内部弯矩满足平衡条件, 而位移只在单元体边界上定义, 这样得到了一种 9 个位移自由度的杂交单元体。

为了避免从薄板理论建立协调单元体的困难, Stricklin 等人<sup>[3]</sup>(1969) 直接从弹性理论出发, 采用离散法线假设 (离散 Kirchhoff 假设), 在计算应变能时完全不考虑横向剪应变影响。这样的单元体 (QQ3) 可以收敛到薄板理论, 不过由于对法线假设放松过多, 刚度偏低。该作者们又将 3 个 QQ3 合并成一个三角形单元体 (QQ3-3), 性能有所改善。

薄板理论是考虑横向剪应变板理论的极限情形, 根据后者来建立板单元体是一个很自然的做法。但是麻烦的是, 当板厚减小时, 总刚度矩阵却变成严重病态的。对此, Fried 等人<sup>[5],[6]</sup>(1973) 提出了一个有意义的想法: 如果目的是要趋近于薄板理论, 那末横向剪应变便可视为一种误差。因此, 当单元体特征长度  $h$  较大, 离散误差占主导地位时, 计算横向剪应变能就完全无必要用真实厚度, 而是可选择一计算厚度  $t$ , 使得离散误差与剪切误差取得平衡。依据这一概念, Fried 等人提出一种单元体, 其中比值  $c = h^2/t^2$  要经试算选择, Fried 推荐  $c = 6$ 。

由于这种类型的单元体应用很广泛, 已经有许多通用程序, 而解题时又常常需要依次计算每个单元体的刚度矩阵, 所以改进其收敛性能和减少刚度矩阵的计算时间都将是具有实际意义的。

本文所建议的单元体也采用离散法线假设, 但不是应用势能原理而是根据一个带有  $\lambda$  乘子的变分原理。这个变分原理不要求挠度与转角预先满足法线假设。文中直接从这个变分原理出发推导出的单元体 3PK9 已具有相当好的性能。为了能连续调整刚度, 使误差进一步减小, 在变分方程中引进了一个刚度调整因子  $c$ 。由此得到的, 带有  $c$  因子的单元体记为 3PK9 $c$ 。

1. 从典型算例看, 3PK9, 3PK9 $c$  ( $c = 0.4$  至 1,  $c = 1$  就是 3PK9) 都有较好的收敛性, 无论对于挠度和弯矩都能给出较准确的数值结果。特别有意义的是, 算出的弯矩 (见图 7.5) 可以与 Morley<sup>[7]</sup> 用平衡单元体以较多的未知数求出的结果媲美。

2. 3PK9 单元体的导出, 完全依据于板壳理论方面而不存在任何与计算方面有关的待定因子。这是与文献 [5], [6] 完全不同的。

3. 3PK9 $c$  单元体的刚度可以由  $c$  因子连续调整。本文推荐  $c = 0.4$ , 此时典型算例的大多数结果略优于 3PK9。

4. 当板厚用多项式表示时, 刚度矩阵都可以算出明显表达式。这也是本文方法的一个特点。这样做能节约计算时间。关于等厚度正交异性板的计算公式均已汇集在附录中, 以备程序设计之用 (也可方便地引进于现成的计算程序中)。

## II 主要符号

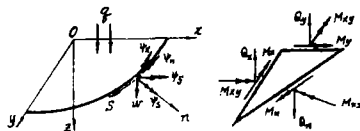


图 2.1

$x, y, z$ ——直角坐标系, 见图2.1。

$n, s$ ——边界法向与切向坐标, 见图2.1。

$t$ ——板厚度。

$E, \nu$ ——各向同性材料弹性模量与波桑比。

$D_x, D_y, D_{xy}, D_1$ ——正交异性板弹性常数。

$\mathbf{D}$ ——板的弹性矩阵。对于各向同性和正交异性板,  $\mathbf{D}$  分别为

$$\mathbf{D} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

$w, \psi_x, \psi_y$ —— $x, y, z$  坐标系中挠度与转角分量, 图2.1 所示方向为正。

$\psi_n, \psi_s$ —— $n, s$  坐标系中转角分量, 图2.1 所示方向为正。

$$\begin{cases} \psi_n = \psi_x l + \psi_y m, \\ \psi_s = -\psi_x m + \psi_y l. \end{cases} \quad (2.2)$$

$l, m$ ——边界法线  $n$  对  $x, y$  轴的方向余弦。

$q$ ——板面法向分布载荷密度, 以正  $z$  方向为正。

$c$ ——单元体刚度调整因子, 见式(3.8)。

$\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ —— $x, y, z$  坐标系中的应变曲率及扭率。

$\mathbf{X}$ ——见式(3.4)。

$M_x, M_y, M_{xy}$ —— $x, y$  坐标系的弯矩及扭矩。

$\mathbf{M}$ ——见式(3.3)。

$M_n, M_{ns}$ ——板边界的弯矩及扭矩,

$$\begin{cases} M_n = M_x l^2 + M_y m^2 + 2M_{xy} l m, \\ M_{ns} = M_{xy}(l^2 - m^2) + (M_y - M_x) l m. \end{cases} \quad (2.3)$$

$Q_x, Q_y$ —— $x, y, z$  坐标系中的横向剪力。

$Q_n$ ——板边界剪力,

$$Q_n = Q_x l + Q_y m. \quad (2.4)$$

$R_n$ ——板边界等效剪力,

$$R_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.5)$$

$\overline{M}_n$ ——边界  $C_M$  上给定的弯矩。

$\overline{R}_n$ ——边界  $C_R$  上给定的等效剪力。

$C_T$ ——代表板整个边界。

$C_M, C_\psi$ ——给定  $M_n$  和给定  $\psi_n$  的边界,  $C_M + C_\psi = C_T$ 。

$C_R, C_W$ ——给定  $R_n$  和给定  $w$  的边界,  $C_R + C_W = C_T$ 。

$A$ ——代表板整个中面。

$A_e$ ——代表板一个单元体的中面。

$U$ ——板弯曲应变能密度, 见式(3.2)。

$\mathbf{W}$ ——单元体节点广义位移向量, 见式(4.1)。

$\mathbf{V}$ ——见式(4.7)。

$A$ ——三角形单元体中面面积。

$x_i, y_i (i=1, 2, 3)$ ——单元体节点坐标。

$L_i (i=1, 2, 3)$ ——三角形面积坐标, 见式(4.5)。

$w_i, \psi_{wi}, \psi_{yi} (i=1, 2, 3, 1', 2', 3')$ ——三角形单元体角点和边中的挠度和转角分量。

$\psi_{ni}, \psi_{ti} (i=1, 2, 3, 1', 2', 3')$ ——三角形单元体角点和边中的法向和切向转角。

$\mathbf{T}$ ——转换矩阵, 见式(4.13), (4.8)。

$\mathbf{Q}$ ——见式(4.18), (A.7)。

$\mathbf{K}_M$ ——弯矩矩阵, 见式(4.19), (A.10)。

$\mathbf{K}_Q$ ——剪力矩阵, 见式(4.20), (A.11)。

$\mathbf{E}$ ——见式(5.2), (A.6)。

$\mathbf{H}$ ——见式(5.3), (A.9)。

$\mathbf{K}_e$ ——单元体刚度矩阵, 见式(5.4)。

$\mathbf{Z}_c$ ——协调型节点载荷, 见式(6.1), (A.12)。

$\mathbf{Z}_l$ ——离散型节点载荷, 见式(6.2), (A.13)。

### III 变分原理

由薄板理论的势能原理可得下列变分式

$$\delta \left\{ \iint_A U(\psi_x, \psi_y) dx dy - \iint_A q w dx dy - \int_{C_R} \overline{R}_n w ds + \int_{C_M} \overline{M}_n \psi_n ds \right\} = 0, \quad (3.1)$$

其中  $U(\psi_x, \psi_y)$  为板弯曲应变能密度

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{M} = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X}, \quad (3.2)$$

而

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{X}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial\psi_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial\psi_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x} + \frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right) \end{Bmatrix}, \quad (3.4)$$

$\mathbf{D}$  是弹性矩阵 (见第 I 节)。转角分量  $\psi_x, \psi_y$  与挠度  $w$  满足法线假设

$$\psi_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \psi_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.5)$$

为了推导离散法线假设型的单元体, 最好是将关系式(3.5)化为变分式的自然条件。为此应用  $\lambda$  乘法, 于是得

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \iint_A U(\psi_x, \psi_y) dx dy + \iint_A \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) Q_x + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) Q_y \right] dx dy \right. \\ \left. - \iint_A q w dx dy - \int_{C_R} \bar{R}_n w ds + \int_{C_M} \bar{M}_n \psi_n ds \right. \\ \left. - \int_{C_x} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \psi_s \right) M_{ns} ds \right\} = 0, \quad (3.6) \end{aligned}$$

其中剪力  $Q_x, Q_y$  和扭矩  $M_{ns}$  都是  $\lambda$  乘子。

经过变分运算, 并注意  $w, \psi_n$  应预先满足  $C_w$  和  $C_\psi$  上给定的边界条件 (即在  $C_w$  上  $\delta w = 0$ , 在  $C_\psi$  上  $\delta \psi_n = 0$ ), 则式(3.6)可以变换成

$$\begin{aligned} \iint_A \left[ \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right) \delta \psi_x + \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y \right) \delta \psi_y \right] dx dy \\ - \iint_A \left[ \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \right) \delta w dx dy \right. \\ \left. + \iint_A \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \delta Q_x + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \delta Q_y \right] dx dy \right. \\ \left. - \int_{C_M} (M_n - \bar{M}_n) \delta \psi_n ds + \int_{C_R} \left( Q_x l + Q_y m + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} - \bar{R}_n \right) \delta w ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{C_T} \left[ M_{ns} - (M_y - M_x)lm - M_{xy}(l^2 - m^2) \right] \delta\phi_s ds \\
 & - \int_{C_T} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \phi_s \right) \delta M_{ns} ds = 0, \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

式中  $M_x, M_y, M_{xy}$  都是以  $\phi_x, \phi_y$  表示的 (通过式(3.3), (3.4))。由于式(3.7)中各变分的任意性, 所以变分方程(3.6)完全等价于薄板理论的平衡方程,  $C_R, C_M$  上边界条件以及法线假设(3.5)。

为了使所推导出的单元体能连续改变刚度, 在变分式(3.6)中再增加一个刚度调整因子  $c$ , 于是得

$$\begin{aligned}
 \delta \left\{ \iint_A U(\phi_x, \phi_y) dx dy + c \iint_A \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) Q_x + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) Q_y \right] dx dy \right. \\
 - \iint_A q w dx dy - \int_{C_R} \bar{R}_n w ds + \int_{C_M} \bar{M}_n \phi_n ds \\
 \left. - \int_{C_T} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \phi_s \right) M_{ns} ds \right\} = 0. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

显然,  $c$  因子不是来自力学方面, 而是基于计算误差方面的考虑。合理选择  $c$  可以使离散误差和偏离法线假设误差的综合影响减小。 $c$  可以由一些典型问题的数值结果选定。

下面将以变分式(3.8)为出发点, 推导离散法线假设型的三角形单元体 3PK9c。当  $c=1$  时, 式(3.8)又回到式(3.6), 此时单元体记为 3PK9, 以表示其完全依据于力学方面的考虑而不含有待定因子  $c$ 。

### IV 形 函 数

考虑三角形单元体, 如图4.1所示, 以角点1, 2, 3为节点。三边中点记为1', 2', 3', 以后它们不作为节点。

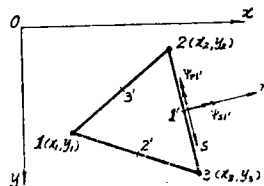


图 4.1

定义单元体节点位移向量  $\mathbf{W}$  为

$$\mathbf{W} = \left[ w_1, \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1, \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_1, w_2, \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_2, \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_2, w_3, \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3, \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \right]^T. \quad (4.1)$$

为了构成以  $\mathbf{W}$  为未知数的单元体，挠度选 3 次多项式。转角分量选 2 次多项式，但限制边界法向转角按线性变化，并规定边界切向转角与挠度满足法线假设。选择  $Q_x, Q_y$  予先满足力矩平衡方程。

这样，挠度  $w(x,y)$  可以表示为

$$w(x,y) = \mathbf{A}\mathbf{W}, \quad (4.2)$$

其中

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3], \quad (4.3)$$

$$\mathbf{A}_i^T = \left\{ \begin{array}{l} L_i^2(L_1 + 3L_2 + 3L_3) + 2L_1L_2L_3 \\ L_i^2(c_3L_2 - c_2L_3) + \frac{c_3 - c_2}{2}L_1L_2L_3 \\ L_i^2(b_2L_3 - b_3L_2) + \frac{b_2 - b_3}{2}L_1L_2L_3 \end{array} \right\}. \quad (4.4)$$

$$L_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2A \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.5)$$

为面积坐标， $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 以及  $A$  见附录式 (A.1) 至 (A.3)。

转角分量  $\psi_x(x,y), \psi_y(x,y)$  暂时写成

$$\begin{Bmatrix} \psi_x(x,y) \\ \psi_y(x,y) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{V}, \quad (4.6)$$

式中向量  $\mathbf{V}$  为

$$\mathbf{V} = [\psi_{x1}, \psi_{x2}, \psi_{x3}, \psi_{y1}, \psi_{y2}, \psi_{y3}, \psi_{x1}', \psi_{x2}', \psi_{x3}', \psi_{y1}', \psi_{y2}', \psi_{y3}']^T, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & 0 & 0 & 0 & B_1' & B_2' & B_3' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 & 0 & 0 & B_1' & B_2' & B_3' \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

而

$$B_i = 2L_i^2 - L_i, \quad B_i' = 4L_1L_2L_3/L_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.9)$$

根据前面所述，进一步规定：

1. 边界法向转角  $\psi_n$  沿边线线性地变化，即

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{n1}' = \frac{1}{2}(\psi_{n2} + \psi_{n3}), \\ \psi_{n2}' = \frac{1}{2}(\psi_{n3} + \psi_{n1}), \\ \psi_{n3}' = \frac{1}{2}(\psi_{n1} + \psi_{n2}). \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

2. 在边中  $1', 2', 3'$  点切向转角  $\psi_t$  与  $w$  满足法线假设，即

$$r_{i'} = \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \psi_s \right) \Big|_{i'} = 0 \quad (i' = 1', 2', 3'). \quad (4.11)$$

3. 在角点1,2,3满足法线假设, 即

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i = \psi_{xi}, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i = \psi_{yi} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.12)$$

由此可以建立V与W的关系

$$\mathbf{V} = \mathbf{T} \mathbf{W}, \quad (4.13)$$

T是一个转换矩阵(见附录公式(A.6))。

将式(4.13)代入(4.6), 得转角分量

$$\begin{Bmatrix} \psi_x(x,y) \\ \psi_y(x,y) \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{W}. \quad (4.14)$$

再把式(4.14)代入式(3.4), 得

$$\mathbf{X} = -\mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{W}, \quad (4.15)$$

其中C是由 $B_i, B_{i'}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 分别对  $x, y$  取导数所组成的矩阵。由此广义应力 M 为

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \mathbf{X} = -\mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{W}, \quad (4.16)$$

命  $Q_x, Q_y$  予先满足下列平衡方程

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \\ Q_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

将式(4.16)代入, 得

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{W}. \quad (4.18)$$

对于等厚度板, Q与  $x, y$  无关, 其表达式见附录公式(A.7)。

不难由式(4.16)和(4.18)求出节点弯矩和剪力的表达式

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{K}_M \mathbf{T} \mathbf{W}, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{K}_Q \mathbf{T} \mathbf{W}, \quad (4.20)$$

其中  $\mathbf{M}_e$  是节点弯矩

$$\mathbf{M}_e = [\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3]^T, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{M}_i = [\mathbf{M}_{xi}, \mathbf{M}_{yi}, \mathbf{M}_{xyi}]^T \quad (i = 1, 2, 3); \quad (4.22)$$

$Q_e$ 是节点剪力

$$Q_e = [Q_1, Q_2, Q_3]^T, \quad (4.23)$$

$$Q_i = [Q_{xi}, Q_{yi}]^T \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.24)$$

$K_M, K_Q$ 见附录式(A.12), (A.13)。

## V 单元体刚度矩阵

先看变分式(3.8)的第1个积分。

$$U = \frac{1}{2} X^T M = \frac{1}{2} W^T T^T C^T D C T W,$$

其中仅 $C^T D C$ 与 $x, y$ 有关, 故

$$d \iint_{A_e} U dxdy = d W^T T^T E T W, \quad (5.1)$$

$$E = \iint_{A_e} C^T D C dxdy, \quad (5.2)$$

$\iint_{A_e}$ 表示对一个单元体区域积分。对于等厚度正交异性板,  $E$ 的显式表示见附录公式(A.6)。

把式(4.2), (4.6)代入变分式(3.8)中的第2个积分, 并仅对一个单元体面积积分, 对于等厚板得

$$c [Q_x, Q_y] \iint_{A_e} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \end{array} \right\} dxdy = c W^T T^T Q^T H W,$$

$H$ 的表达式见附录公式(A.9)。取微分得

$$cd W^T (T^T Q^T H + H^T Q T) W \quad (5.3)$$

根据定义, 由式(5.1), (5.3)得3PK9c单元体的刚度矩阵

$$K_e = T^T E T + c (T^T Q^T H + H^T Q T) \quad (5.4)$$

取 $c = 1$ , 便是3PK9单元体的刚度矩阵。

## VI 节点载荷

法向载荷 $q$ 产生的节点载荷按照通常的方法求得

$$Z_0 = \iint_{A_e} \mathbf{A}^T q dx dy \quad (6.1)$$

$Z_0$ 常称为协调型节点载荷。在实际计算中,还可采用一种较简便的离散型节点载荷  $Z_i$ 。 $Z_i$ 的定义如下

$$Z_i = \iint_{A_e} \mathbf{L}^T q dx dy \quad (6.2)$$

其中

$$\mathbf{L} = [L_1, 0, 0, L_2, 0, 0, L_3, 0, 0] \quad (6.3)$$

对于均布载荷  $Z_0$ ,  $Z_i$ 的计算公式由附录(A.10)(A.11)给出。

在边界  $C_M$  和  $C_R$ ,  $\bar{\mathbf{M}}_n$  和  $\bar{\mathbf{R}}_n$  对一个单元体所产生的节点力为

$$\bar{\mathbf{M}}_n = \int_{C_{Me}} \mathbf{T}^T \mathbf{B}^T \mathbf{n}^T \bar{\mathbf{M}}_n ds \quad (6.4)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_n = \int_{C_{Re}} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{R}}_n ds \quad (6.5)$$

其中向量

$$\mathbf{n} = [l, m] \quad (6.6)$$

$C_{Me}, C_{Re}$  表示单元体边界与  $C_M, C_R$  重合的那条边。

### VII 试验算例结果及比较

用本文所建议的单元体试算了简支、固支方板受均布和集中载荷作用的问题,并与表7.1中所列出的几种同类型单元体进行了比较。

表7.1 若干具有代表性的薄板三角形单元体

记号	特点	文考参献
HCT	完全协调型	{1}
ALL	杂交型(线性法向转角)	{2}
QQ3	离散法线假设型	{3}
QQ3-3	三个QQ3组合	{3}
Fried	( $c$ , 刚度可连续调节)	{5}、{6}

单元体划分如图7.5所示。节点载荷采用离散型(另有说明者除外),因为它既简单而又不失准确性。波桑比取 0.3。

图7.1—7.4显示了刚度调整因子  $c$  的影响。 $c$  增大,刚度增大。 $c=1$  即是3PK9。

$c=0$ ，恰好与  $QQ3^{(3)}$  单元体重合，它是普通势能原理导出的离散法线假设型单元体，其刚度显得过软。由图可见，从本文变分原理出发，单元体性能显著改善。

表7.2 中心挠度计算值

支持情况	简支方板				固支方板			
	均布载荷		集中载荷		均布载荷		集中载荷	
	3PK9c	3PK9	3PK9c	3PK9	3PK9c	3PK9	3PK9c	3PK9
2×2	382.0	346.5	1146	1040	146.7	109.8	440.0	329.4
4×4	398.1	390.2	1138	1103	145.6	137.2	551.4	520.0
6×6	402.9	399.4	1149	1133	135.9	131.8	557.8	541.2
8×8	404.5	402.5	1154	1144	131.9	129.7	559.3	549.4
10×10	405.1	403.9	1156	1150	130.0	128.6	560.0	553.4
12×12	405.5	404.6	1157	1153	129.0	128.0	560.4	555.6
14×14	405.7	405.1	1158	1155	128.3	127.6	560.6	557.0
16×16	405.8	405.3	1159	1156	127.9	127.4	560.7	557.9
分析解	406.2		1160		126		560	
乘子	$(qL^4/D) \times 10^{-5}$		$(PL^2/D) \times 10^{-5}$		$(qL^4/D) \times 10^{-5}$		$(PL^2/D) \times 10^{-5}$	

表7.3 板中及边中弯矩  $M_x$  计算值

支持情况	简支方板		固支方板					
	均布载荷		均布载荷				集中载荷	
	板中		板中		边中		边中	
单元体	3PK9c	3PK9	3PK9c	3PK9	3PK9c	3PK9	3PK9c	3PK9
2×2	559.3	476.5	404.8	303.0	-352.0	-267.5	-1056	-790.5
4×4	488.7	462.7	287.4	274.6	-464.7	-399.0	-1205	-1084
6×6	481.8	468.0	258.0	249.0	-483.7	-431.8	-1206	-1116
8×8	480.1	471.8	245.5	239.7	-489.9	-448.2	-1218	-1146
10×10	479.4	474.0	239.8	235.9	-493.5	-459.0	-1225	-1165
12×12	479.1	475.3	236.6	233.9	-496.2	-466.8	-1229	-1180
14×14	479.0	476.1	234.9	232.6	-498.2	-472.7	-1232	-1188
16×16	478.9	476.7	233.4	231.8	-499.8	-477.3	-1235	-1195
分析解	479		231		-513		-1257	
乘子	$qL^2 \times 10^{-4}$		$qL^2 \times 10^{-4}$				$P \times 10^{-4}$	

对于 3PK9, 3PK9c ( $c=0.4$ ), 一直试算到分格为  $16 \times 16$  的主要结果列于表 7.2-7.4。试算时线性代数方程组采用直接法求解。

表7.4 简支方板的角点反力

载 荷 单 元 体	均 布 载 荷 $ M_{xy} /qL^2$		集 中 载 荷 $ M_{xy} /P$	
	3PK9c	3PK9	3PK9c	3PK9
2×2	0.04942	0.04590	0.14836	0.13770
4×4	0.05890	0.05756	0.12388	0.12238
8×8	0.06308	0.06248	0.12220	0.12152
分 析 解	0.065		0.1219	

图7.5, 7.6绘出了由 3PK9 和 3PK9c ( $c=0.4$ )所算出的弯矩分布。可以看出大部分结果 3PK9c 较好。另外, 比较图7.5与7.6, 表明采用协调型 载荷  $Z_0$  略为好些。与几种同类型单元体的比较见图7.7, 7.8和表7.5, 7.6。

表7.5 简支方板受均布载荷的中心挠度 ( $w_0 D/qL^4$ ) 比较

分 格	3PK9	3PK9c	HCT	ALL	QQ3-3
2×2	0.003465	0.003820	0.00220	0.00328	0.003666
4×4	0.003902	0.003981	0.00371	0.00386	0.003942
8×8	0.004025	0.004045	0.00392	0.00401	0.004036
分 析 解	0.00406	0.00406	0.00406	0.00406	0.00406

表7.6 固支方板受均布载荷的中心挠度 ( $w_0 D/qL^4$ ) 比较

分 格	3PK9	3PK9c	HCT	ALL	QQ3-3
2×2	0.001098	0.001476	0.00026	0.00087	0.001533
4×4	0.001372	0.001456	0.00120	0.00132	0.001452
8×8	0.001297	0.001319	0.00121	0.00128	0.001318
分 析 解	0.00126	0.00126	0.00126	0.00126	0.00126

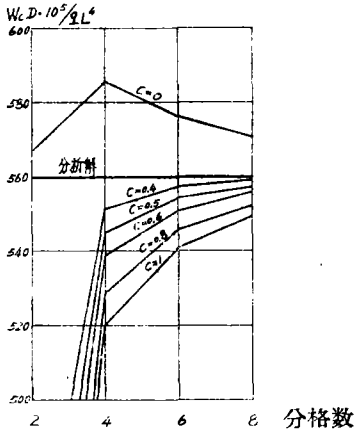


图7.1 固支板受集中载荷的中心挠度

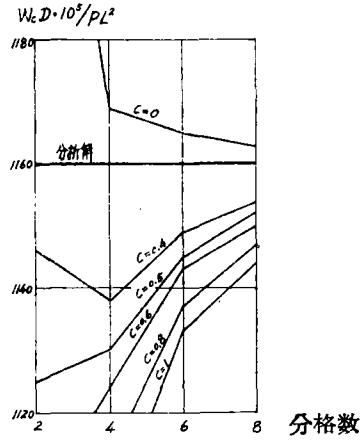


图7.2 简支板受集中载荷的中心挠度

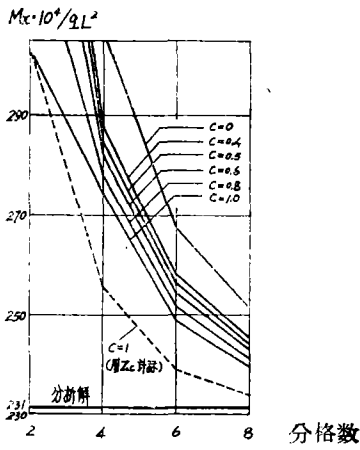


图7.3 固支板受均布载荷的板中弯矩

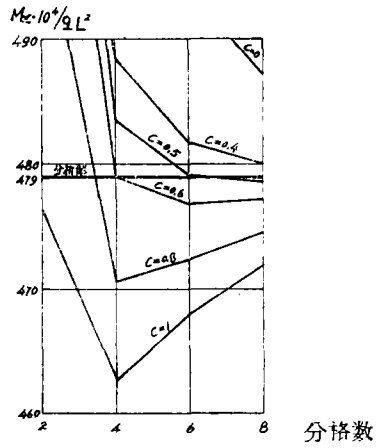


图7.4 简支板受均布载荷的板中弯矩

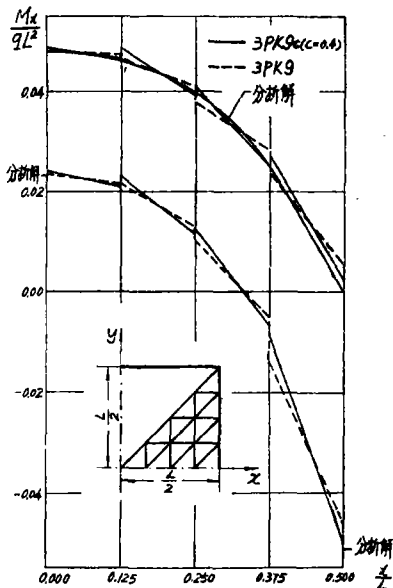


图7.5 受均布载荷板沿中心线  $M_x$  分布(用协调型节点载荷  $Z_c$ )

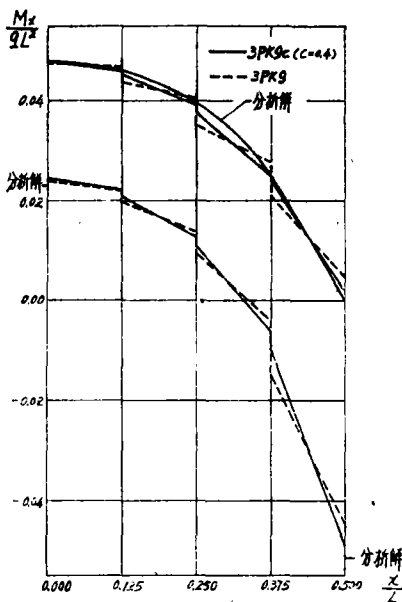


图7.6 受均布载荷板沿中心线  $M_x$  分布(用离散型节点载荷  $Z_i$ )

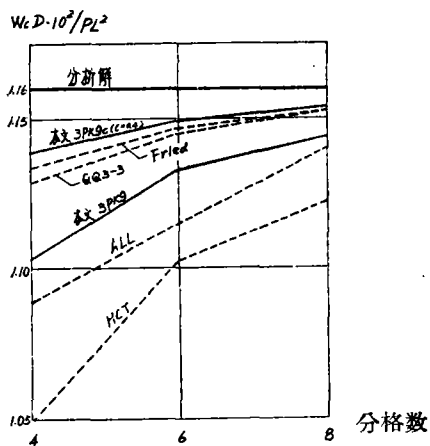


图7.7 简支板受集中载荷的中心挠度比较

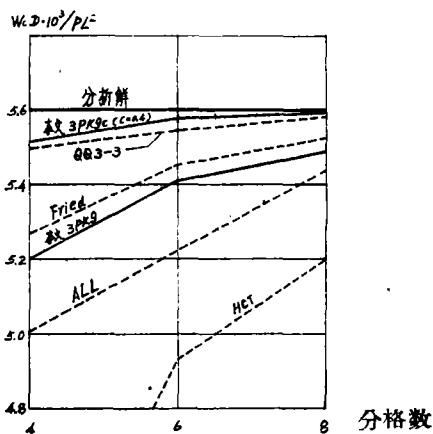


图7.8 固支板受集中载荷中心挠度比较

## VIII 结 束 语

1. 本文所建议的薄板变分原理, 由于法线假设是其自然条件, 所以特别适用于构造离散法线假设型的有限单元体。这种做法显然也可以用于壳体, 甚至还可以用于具有同样数学特点的其他问题。

2. 本文提出的单元体是属于位移模型与杂交 (hybrid) 模型<sup>[8]</sup>之间的一种模型, 因为剪力  $Q_x$ ,  $Q_y$  在单元体内部是按平衡条件确定的。由于最后的未知数全是位移, 所以刚度矩阵仍是半正定的 (当限制刚体位移后, 就是正定的)。

## 参 考 文 献

- [1] Clough, R. W. and Tocher, J. L., Finite element stiffness matrices for the analysis of plate bending, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- [2] Allman, D. J., Triangular finite elements for plate bending with constant and linearly varying bending moments, in Colloquium of The IUTAM on High-Speed Computing of Elastic Structures, University of Liege, Belgium, 1970.
- [3] Stricklin, J. A., Haisler, W. E., Tisdale, P. R. and Gunderson, R., A rapidly converging triangular plate element, AIAA J. 7, 180-181, 1969.
- [4] Wempner, G. A., Oden, J. T. and Kross, D. K., Finite element analysis of thin shell, J. Engineering Mech. Div. ASCE 94, 1273-1294, 1968.
- [5] Fried, I., Shear in  $C^0$  and  $C^1$  plate bending elements, Int. J. Solids Structures 9, 449-460, 1973.
- [6] Fried, I. and Shok keng Yang, Triangular, nine-degrees-of-freedom,  $C^0$ , plate bending element of quadratic accuracy, Quarterly of Applied Mathematics, 31, 3, 303-312, 1973.
- [7] Morley, L. S. D., The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems, Aero. Quart., 19, 149-169, 1968.
- [8] Pian, T. H. H., Finite element stiffness methods by different variational principles in elasticity, vol. 2, SIAM-AMS. Proceedings, Numerical Solution of Field Problems in Continuum Physics, 1970.

附录:

计算公式汇编

编制计算程序时所需公式汇集于下:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2, \\ b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3, \\ b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned} \right\} \quad (A.2)$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{三角形面积}. \quad (A.3)$$

三角形各边边长及方向余弦

$$S_i = \sqrt{l_i^2 + c_i^2} \quad (i=1,2,3), \quad (A.4)$$

$$\left. \begin{aligned} l_i &= -l_i / S_i \\ m_i &= -c_i / S_i \end{aligned} \right\} \quad (i=1,2,3). \quad (A.5)$$

$$E = \frac{1}{12A} \begin{pmatrix} E_{11} & & & \text{对} \\ E_{21} & E_{22} & & \text{称} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} \end{pmatrix} \quad (A.6)$$

其中

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 3(b_1^2 D_x + c_1^2 D_{xy}) & & \text{对} \\ -(b_1 b_2 D_x + c_1 c_2 D_{xy}) & 3(b_2^2 D_x + c_2^2 D_{xy}) & \text{称} \\ -(b_1 b_3 D_x + c_1 c_3 D_{xy}) & -(b_2 b_3 D_x + c_2 c_3 D_{xy}) & 3(b_3^2 D_x + c_3^2 D_{xy}) \end{pmatrix}.$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 3b_1 c_1 (D_1 + D_{xy}) & -(c_1 b_2 D_1 + b_1 c_2 D_{xy}) & -(c_1 b_3 D_1 + b_1 c_3 D_{xy}) \\ -(c_2 b_1 D_1 + b_2 c_1 D_{xy}) & 3b_2 c_2 (D_1 + D_{xy}) & -(c_2 b_3 D_1 + b_2 c_3 D_{xy}) \\ -(c_3 b_1 D_1 + b_3 c_1 D_{xy}) & -(c_3 b_2 D_1 + b_3 c_2 D_{xy}) & 3b_3 c_3 (D_1 + D_{xy}) \end{pmatrix}.$$

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 3(c_1^2 D_y + b_1^2 D_{xy}) & & \text{对} \\ -(c_1 c_2 D_y + b_1 b_2 D_{xy}) & 3(c_2^2 D_y + b_2^2 D_{xy}) & \text{称} \\ -(c_1 c_3 D_y + b_1 b_3 D_{xy}) & -(c_2 c_3 D_y + b_2 b_3 D_{xy}) & 3(c_3^2 D_y + b_3^2 D_{xy}) \end{pmatrix}.$$

$$E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 4(b_2 b_3 D_x + c_2 c_3 D_{xy}) & 4(b_3 b_2 D_x + c_3 c_2 D_{xy}) \\ 4(b_1 b_3 D_x + c_1 c_3 D_{xy}) & 0 & 4(b_3 b_1 D_x + c_3 c_1 D_{xy}) \\ 4(b_1 b_2 D_x + c_1 c_2 D_{xy}) & 4(b_2 b_1 D_x + c_2 c_1 D_{xy}) & 0 \end{pmatrix}.$$

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 4(c_2 b_3 \Gamma_1 + b_2 c_3 \Gamma_{xy}) & 4(c_3 b_2 \Gamma_1 + b_3 c_2 \Gamma_{xy}) \\ 4(c_1 b_3 D_1 + b_1 c_3 \Gamma_{xy}) & 0 & 4(c_3 b_1 D_1 + b_3 c_1 \Gamma_{xy}) \\ 4(c_1 b_2 D_1 + b_1 c_2 \Gamma_{xy}) & 4(c_2 b_1 D_1 + b_2 c_1 \Gamma_{xy}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{33} = \begin{bmatrix} 4(f\Gamma_x + hD_{xy}) & \text{对} & \\ 8(b_1 b_2 \Gamma_x + c_1 c_2 \Gamma_{xy}) & 4(f\Gamma_x + h\Gamma_{xy}) & \text{称} \\ 8(b_1 b_3 \Gamma_x + c_1 c_3 \Gamma_{xy}) & 8(b_2 b_3 \Gamma_x + c_2 c_3 \Gamma_{xy}) & 4(f\Gamma_x + h\Gamma_{xy}) \end{bmatrix},$$

$$E_{41} = \begin{bmatrix} 0 & 4(b_2 c_3 D_1 + c_2 b_3 \Gamma_{xy}) & 4(b_3 c_2 D_1 + c_3 b_2 \Gamma_{xy}) \\ 4(b_1 c_3 D_1 + c_1 b_3 \Gamma_{xy}) & 0 & 4(b_3 c_1 D_1 + c_3 b_1 \Gamma_{xy}) \\ 4(b_1 c_2 D_1 + c_1 b_2 \Gamma_{xy}) & 4(b_2 c_1 D_1 + c_2 b_1 \Gamma_{xy}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 4(c_2 c_3 \Gamma_y + b_2 b_3 \Gamma_{xy}) & 4(c_3 c_2 \Gamma_y + b_3 b_2 \Gamma_{xy}) \\ 4(c_1 c_3 \Gamma_y + b_1 b_3 \Gamma_{xy}) & 0 & 4(c_3 c_1 \Gamma_y + b_3 b_1 \Gamma_{xy}) \\ 4(c_1 c_2 \Gamma_y + b_1 b_2 \Gamma_{xy}) & 4(c_2 c_1 \Gamma_y + b_2 b_1 \Gamma_{xy}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{43} = \begin{bmatrix} 4g(D_1 + \Gamma_{xy}) & \text{对} & \\ 4(b_1 c_2 + b_2 c_1)(D_1 + \Gamma_{xy}) & 4g(D_1 + \Gamma_{xy}) & \text{称} \\ 4(b_1 c_3 + b_3 c_1)(D_1 + \Gamma_{xy}) & 4(b_2 c_3 + b_3 c_2)(D_1 + \Gamma_{xy}) & 4g(D_1 + \Gamma_{xy}) \end{bmatrix},$$

$$E_{44} = \begin{bmatrix} 4(h\Gamma_y + f\Gamma_{xy}) & \text{对} & \\ 8(c_1 c_2 \Gamma_y + b_1 b_2 \Gamma_{xy}) & 4(h\Gamma_y + f\Gamma_{xy}) & \text{称} \\ 8(c_1 c_3 \Gamma_y + b_1 b_3 \Gamma_{xy}) & 8(c_2 c_3 \Gamma_y + b_2 b_3 \Gamma_{xy}) & 4(h\Gamma_y + f\Gamma_{xy}) \end{bmatrix},$$

而

$$g = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3,$$

$$f = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2,$$

$$h = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2.$$

$$Q = -\frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \end{bmatrix} \quad (A.7)$$

其中

$$Q_{11} = [D_x b_1^2 + D_{xy} c_1^2 \quad \Gamma_x b_2^2 + \Gamma_{xy} c_2^2 \quad D_x b_3^2 + D_{xy} c_3^2],$$

$$Q_{12} = [(D_1 + D_{xy}) b_1 c_1 \quad (D_1 + D_{xy}) b_2 c_2 \quad (D_1 + D_{xy}) b_3 c_3],$$

$$Q_{13} = [2(D_x b_2 b_3 + D_{xy} c_2 c_3) \quad 2(D_x b_3 b_1 + \Gamma_{xy} c_3 c_1) \quad 2(D_x b_1 b_2 + D_{xy} c_1 c_2)],$$

$$Q_{14} = [(D_1 + D_{xy})(b_2 c_3 + b_3 c_2) \quad (D_1 + D_{xy})(b_3 c_1 + b_1 c_3) \quad (D_1 + \Gamma_{xy})(b_1 c_2 + b_2 c_1)],$$

$$Q_{21} = Q_{12},$$

$$Q_{22} = [D_{xy} c_1^2 + D_{xy} b_1^2 \quad D_{xy} c_2^2 + D_{xy} b_2^2 \quad D_{xy} c_3^2 + D_{xy} b_3^2],$$

$$Q_{23} = Q_{14},$$

$$Q_{24} = [2(D_{xy} c_2 c_3 + D_{xy} b_2 b_3) \quad 2(D_{xy} c_3 c_1 + D_{xy} b_3 b_1) \quad 2(D_{xy} c_1 c_2 + D_{xy} b_1 b_2)].$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3m_1}{2S_1} & \frac{l_1^2 m_1^2}{2} - \frac{3l_1 m_1}{4} & \frac{l_1^2 m_1^2}{2} - \frac{3l_1 m_1}{4} & -\frac{3m_1}{2S_1} & \frac{l_1^2 m_1^2}{2} - \frac{3l_1 m_1}{4} & \frac{3l_1 m_1}{4} & \frac{l_1^2 m_1^2}{2} - \frac{3l_1 m_1}{4} & \frac{3l_1 m_1}{4} \\
 -\frac{3m_2}{2S_2} & \frac{l_2^2 m_2^2}{2} - \frac{3l_2 m_2}{4} & \frac{3l_2 m_2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3m_2}{2S_2} & \frac{l_2^2 m_2^2}{2} - \frac{3l_2 m_2}{4} & \frac{3l_2 m_2}{4} & \frac{l_2^2 m_2^2}{2} - \frac{3l_2 m_2}{4} & \frac{3l_2 m_2}{4} \\
 \frac{3m_3}{2S_3} & \frac{l_3^2 m_3^2}{2} - \frac{3l_3 m_3}{4} & \frac{3l_3 m_3}{4} & -\frac{3m_3}{2S_3} & \frac{l_3^2 m_3^2}{2} - \frac{3l_3 m_3}{4} & \frac{3l_3 m_3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{3l_1}{2S_1} & \frac{3l_1 m_1}{4} & \frac{l_1^2 m_1^2}{2} - \frac{3l_1 m_1}{4} & \frac{3l_1 m_1}{4} & \frac{l_1^2 m_1^2}{2} - \frac{3l_1 m_1}{4} & -\frac{3l_1}{2S_1} & \frac{3l_1 m_1}{4} & \frac{l_1^2 m_1^2}{2} - \frac{3l_1 m_1}{4} & \frac{3l_1 m_1}{4} \\
 \frac{3l_2}{2S_2} & \frac{3l_2 m_2}{4} & \frac{m_2^2 l_2^2}{2} - \frac{l_2^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3l_2}{2S_2} & \frac{3l_2 m_2}{4} & \frac{m_2^2 l_2^2}{2} - \frac{l_2^2}{4} & \frac{3l_2 m_2}{4} & \frac{m_2^2 l_2^2}{2} - \frac{l_2^2}{4} \\
 -\frac{3l_3}{2S_3} & \frac{3l_3 m_3}{4} & \frac{m_3^2 l_3^2}{2} - \frac{l_3^2}{4} & \frac{3l_3}{2S_3} & \frac{3l_3 m_3}{4} & \frac{m_3^2 l_3^2}{2} - \frac{l_3^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

(A.8)

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^T & \mathbf{H}_2^T \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

其中

$$\mathbf{H}_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(5b_1 + 2b_2 + 2b_3) - \frac{A}{2} \left( -\frac{m_2}{S_2} + \frac{m_1}{S_3} \right) \\ \frac{1}{48}(5b_1(c_3 - c_2) + b_2(5c_3 - c_2) + b_3(c_3 - 5c_2)) - \frac{A}{6} \left( l_2^2 + l_3^2 - \frac{m_2^2 + m_1^2}{2} \right) \\ \frac{1}{48}(5b_1(b_2 - b_3) + b_2(b_2 - 5b_3) + b_3(5b_2 - b_3)) - \frac{A}{4}(l_2 m_2 + l_3 m_3) \\ \frac{1}{6}(2b_1 + 5b_2 + 2b_3) - \frac{A}{2} \left( -\frac{m_3}{S_3} + \frac{m_1}{S_1} \right) \\ \frac{1}{48}(b_1(c_1 - 5c_3) + 5b_2(c_1 - c_3) + b_3(5c_1 - c_3)) - \frac{A}{6} \left( l_3^2 + l_1^2 - \frac{m_3^2 + m_1^2}{2} \right) \\ \frac{1}{48}(b_1(5b_3 - b_1) + 5b_2(b_3 - b_1) + b_3(b_3 - 5b_1)) - \frac{A}{4}(l_3 m_3 + l_1 m_1) \\ \frac{1}{6}(2b_1 + 2b_2 + 5b_3) - \frac{A}{2} \left( -\frac{m_1}{S_1} + \frac{m_2}{S_2} \right) \\ \frac{1}{48}(b_1(5c_2 - c_1) + b_2(c_2 - 5c_1) + 5b_3(c_2 - c_1)) - \frac{A}{6} \left( l_1^2 + l_2^2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} \right) \\ \frac{1}{48}(b_1(b_1 - 5b_2) + b_2(5b_1 - b_2) + 5b_3(b_1 - b_2)) - \frac{A}{4}(l_1 m_1 + l_2 m_2) \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{H}_2^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(5c_1 + 2c_2 + 2c_3) - \frac{A}{2} \left( \frac{l_2}{S_2} - \frac{l_1}{S_3} \right) \\ \frac{1}{48}(5c_1(c_3 - c_2) + c_2(5c_3 - c_2) + c_3(c_3 - 5c_2)) - \frac{A}{4}(l_2 m_2 + l_3 m_3) \\ \frac{1}{48}(5c_1(b_2 - b_3) + c_2(b_2 - 5b_3) + c_3(5b_2 - b_3)) - \frac{A}{6} \left( m_2^2 + m_3^2 - \frac{l_2^2 + l_3^2}{2} \right) \\ \frac{1}{6}(2c_1 + 5c_2 + 2c_3) - \frac{A}{2} \left( \frac{l_1}{S_3} - \frac{l_1}{S_1} \right) \\ \frac{1}{48}(c_1(c_1 - 5c_3) + 5c_2(c_1 - c_3) + c_3(5c_1 - c_3)) - \frac{A}{4}(l_3 m_3 + l_1 m_1) \\ \frac{1}{48}(c_1(5b_3 - b_1) + 5c_2(b_3 - b_1) + c_3(b_3 - 5b_1)) - \frac{A}{6} \left( m_3^2 + m_1^2 - \frac{l_1^2 + l_1^2}{2} \right) \\ \frac{1}{6}(2c_1 + 2c_2 + 5c_3) - \frac{A}{2} \left( \frac{l_1}{S_1} - \frac{l_2}{S_2} \right) \\ \frac{1}{48}(c_1(5c_2 - c_1) + c_2(c_2 - 5c_1) + 5c_3(c_2 - c_1)) - \frac{A}{4}(l_1 m_1 + l_2 m_2) \\ \frac{1}{48}(c_1(b_1 - 5b_2) + c_2(5b_1 - b_2) + 5c_3(b_1 - b_2)) - \frac{A}{6} \left( m_1^2 + m_2^2 - \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} \right) \end{bmatrix}.$$

$$K_M = \frac{1}{D_4}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccccccc}
 -D_x \frac{3b_1}{2} & D_x \frac{b_2}{2} & D_x \frac{b_2}{2} & -D_1 \frac{3c_1}{2} & D_1 \frac{c_2}{2} & D_1 \frac{c_3}{2} & 0 & -2D_x b_2 & -2D_1 c_3 & -2D_1 c_2 \\
 -\Gamma_x \frac{3b_1}{2} & D_1 \frac{b_2}{2} & D_1 \frac{b_2}{2} & -\Gamma_y \frac{3c_1}{2} & -\Gamma_y \frac{c_2}{2} & \Gamma_y \frac{c_3}{2} & 0 & -2D_1 b_2 & -2D_1 c_3 & -2D_1 c_2 \\
 -D_{xy} \frac{3c_1}{2} & \Gamma_{xy} \frac{c_2}{2} & \Gamma_{xy} \frac{c_2}{2} & -\Gamma_{xy} \frac{3b_1}{2} & \Gamma_{xy} \frac{b_2}{2} & \Gamma_{xy} \frac{b_2}{2} & 0 & -2D_{xy} c_2 & 0 & -2\Gamma_{xy} b_3 & -2D_{xy} b_2 \\
 D_x \frac{b_1}{2} & -D_x \frac{3b_2}{2} & D_x \frac{b_2}{2} & D_1 \frac{c_1}{2} & -D_1 \frac{3c_2}{2} & D_1 \frac{c_3}{2} & -2D_x b_3 & 0 & -2\Gamma_x b_1 & -2D_1 c_3 & 0 & -2D_1 c_1 \\
 D_1 \frac{b_1}{2} & -D_1 \frac{3b_2}{2} & D_1 \frac{b_2}{2} & D_y \frac{c_1}{2} & -D_y \frac{3c_2}{2} & D_y \frac{c_3}{2} & -2D_1 b_3 & 0 & -2D_1 b_1 & -2D_1 c_3 & 0 & -2\Gamma_y c_1 \\
 D_{xy} \frac{c_1}{2} & -D_{xy} \frac{3c_2}{2} & \Gamma_{xy} \frac{c_2}{2} & D_{xy} \frac{b_1}{2} & -\Gamma_{xy} \frac{3b_2}{2} & D_{xy} \frac{b_2}{2} & -2\Gamma_{xy} c_3 & 0 & -2D_{xy} c_1 & -2\Gamma_{xy} b_3 & 0 & -2D_{xy} b_1 \\
 D_x \frac{b_1}{2} & \Gamma_x \frac{b_2}{2} & -\Gamma_x \frac{3b_2}{2} & D_1 \frac{c_1}{2} & D_1 \frac{c_2}{2} & -D_1 \frac{3c_3}{2} & -2D_x b_2 & -2D_x b_1 & 0 & -2D_1 c_2 & -2D_1 c_1 & 0 \\
 D_1 \frac{b_1}{2} & D_1 \frac{b_2}{2} & -D_1 \frac{3b_2}{2} & \Gamma_y \frac{c_1}{2} & D_y \frac{c_2}{2} & -D_y \frac{3c_3}{2} & -2D_1 b_2 & -2D_1 b_1 & 0 & -2D_y c_2 & -2D_y c_1 & 0 \\
 D_{xy} \frac{c_1}{2} & D_{xy} \frac{c_2}{2} & -D_{xy} \frac{3c_2}{2} & \Gamma_{xy} \frac{b_1}{2} & D_{xy} \frac{b_2}{2} & -D_{xy} \frac{3b_2}{2} & -2D_{xy} c_2 & -2D_{xy} c_1 & 0 & -2D_{xy} b_2 & -2\Gamma_{xy} b_1 & 0
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

(A.10)

$$K_Q = \begin{Bmatrix} Q \\ Q \\ Q \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

其中 $Q$ 为由式(A.8)定义的 $2 \times 12$ 矩阵。

$$Z_C^T = q_d \left[ \frac{1}{3} \quad \frac{c_3 - c_2}{12} \quad \frac{b_2 - b_3}{24} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{c_1 - c_3}{24} \quad \frac{b_3 - b_1}{12} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{c_2 - c_1}{24} \quad \frac{b_1 - b_2}{24} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$Z_L^T = q_d \left[ \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \right]. \quad (\text{A.13})$$