

弹性材料护面减阻的研究

侯 晖 昌

(广东省水利水电科学研究所)

(一) 问题的提出

当粘性流体(水、空气、原油,以及其它化学溶液,等等。)在沿一固定边界流过时,不论其是属内流(管流)或外流(机翼、船舶等),由于在边界面流速 u 为零,而法向流速梯度 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 则异于零。根据牛顿定律,流速梯度存在则要在边界上产生相应的剪力。这剪力做功的结果便要消耗掉流体中一部分能量,并最终热量形式向周围发散。而为了抵消这部分损失的能量,以维持流体的运动(或者说,对外流来说,维持物体的运动),就需要外加的能量。

长期以来,从航空直到水下运动的广阔领域,人们都在找寻减少流体阻力的方法。初期的研究只是局限在型体方面,即探索物体的流线型方面。在本世纪初,当普兰特创立边界层理论以后,对流体运动阻力有了新的内容和具体计算方法^[1]。一直到五十年代,例如,在机翼研究方面,研究的主要思想都在于保持层流边界层,并不使它发展为湍流边界层以达到保持较小阻力的方法(通过用吸气或其它方法)。

六十年代以来,由于流体力学与高分子化学研究的发展,使减阻问题的研究进入了一个新的阶段。新的减阻问题的研究方向大概是由文献^[2]开始的。原作者以橡皮作为水下运动物体的护面,意外地发现,这样使物体运动所受的阻力减小了。这试验结果在初期引起所谓的柔顺边界稳定性的研究^[3,4]。这类研究,完全无视边界面上材料的性质,把边界抽象为理想的同步波动情形;而且,对减阻来说,稳定性仅仅是组成全部问题的一部分。后来的研究逐步接近到边界材料^[5],但采用的物理图形与实际还有较大出入,没有进行具体计算,并以实际资料来进行校验。因此,问题还远远没有得到解决。以高分子溶液和弹性材料作为减阻工具的广泛的实验研究^[6](特别是内流),帮助人们对减阻实质有了进一步的认识。能从这些实验得到的普遍结论和数量概念大致是:只有当高分子溶液注入管壁区域时,减阻才是有效的,而注入于流核区则是无效的^[6]。在高分子溶液实现减阻时,层流附面层流速分布改变,与此相应,流核区的流速分布亦改变。对内流来说,最大减阻值

约35%,视不同的护面材料而异。而对外流来说,则可减少阻力系数达40~50%^[7]。减阻值随着高分子溶液浓度增加而增加,逐渐趋近一极限值。

随着这方面的试验结果的大量累积,利用化学溶液以减阻在国外已广泛应用于各个领域^[8,9,10]。由于减阻问题密切地联系着节约能源、节约材料、提高效率等方面,故毫无疑问,随着我国国民经济各部门的快速发展,减阻研究也必将迅速开展。

尽管关于减阻在国外已得到各方面实验的证实,但对减阻的实质认识和理论研究状况方面,则和实验工作的进程很不相称。在这方面,大概有如下一些根本问题还没有圆满正确的解答。即:为什么只是橡皮类弹性材料能实现减阻?以及,它如何减阻?为什么高分子溶液减阻只是在近边界区域才能实现?减阻如何计算?等等。而归纳起来,则无非是减阻的条件和减阻的计算两方面的问题。

本文就是企图澄清上述这些问题。

(二) 层流附面层的性质与稳定性

我们觉得,减阻理论研究和对其实质的认识之所以进展迟缓,其重要原因之一是由于对层流附面层的力学特性揭示得不够充分。

一直到最近,文献大都还只是停留在研究层流附面层的静态,包括尽可能接近边界以观测其流速分布和高分子溶液注入后对其变形的影响。这无异承认,层流附面层总是稳定的,不变动的。只是在不久前,才有少数作者^[11,12]轮廓地提到层流附面层并不仅仅是被动的,而且,可主动地反作用于流核。减阻实验的发展促进了人们对层流附面层动态的认识,最近已开始注意到层流附面层中也存在稳定性问题^[13],但是,仍然只是定性的描述,而没有定量的计算。其实,在层流边界层中仍然存在微波扰动,这早已有直接的实验证明^[14],只不过在当时没有引起广泛的注意而已。

从对明流水流运动的一些特征出发,我们曾经在研究报告中已判断层流附面层,与层流边界层一样,同样存在稳定性的问题。也就是说,在给定雷诺数情况下,某波长的扰动是可以使附面层处于中性稳定即开始产生波动的。我们曾推导出平行板间流动与明流层流附面层流速分布型式为

$$\bar{u} = \bar{y} [A + (1 - A)\bar{y}] \quad (1)$$

在上式中,

$$A = \frac{1 - 6\frac{\delta}{D}}{1 - 4\frac{\delta}{D}}, \text{ 或 } A = \frac{2\left(\frac{h}{\delta}\right)}{2\left(\frac{h}{\delta}\right) - 1}$$

D, h 各为平行板间间距与水深。由于 $D, h \gg \delta$, δ 为附面层厚度,故 A 是接近1的数值,亦即层流附面层流速分布是接近直线分布的。

在推导出上式的基础上,应用林家翘方法^[15,16]进行了明流层流附面层稳定性计算。内流附面层的特性之一是其雷诺数基本不变($Re \approx 135$),在这情况下其计算相应中性扰动相对波长 α 值为

$$\alpha = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \approx 0.625$$

亦即

$$\frac{\delta}{\lambda} \approx 0.1$$

在上式中, λ 为扰动波长。其次,我们也计算了起始(初生)扰动波长 λ 值为0.1~1.0cm左右。这些相对与绝对数值,在河流沙浪与水轮机磨损鱼鳞坑的量测中都得到证实。

顺便要指出,后来文献^[17]亦应用与我们的研究报告相类但又有区别的流速分布进行了稳定性计算。但原作者既不是联系层流附面层图形,甚至也没有具体物理图形,工作仅仅停留在抽象的计算上面,因此,当时还不能使人们对层流附面层的认识有所发展。

(三) 层流附面层与减阻

层流附面层的稳定性计算仅仅是减阻研究的开始。从附面层稳定性到达减阻,中间还有漫长的研究道路。下一步的问题将是:当层流附面层发生如上所述数量级的中性扰动时,在什么条件下扰动能传递给边界,使边界亦发生波动?显然,没有边界的波动,没有由于边界波动所引起的附面层流速的改变和随之而来的流核流速分布的改变,便不可能有减阻。

我们设想,在刚性边界上粘结了一层弹性膜。而这弹性材料的物理力学指标(包括弹性模数、泊桑比、密度,等等)的组合选择是如此合适,以致在层流附面层发生波动时,膜的表面能产生同步波动。所谓同步波动,就是层流附面层波动频率、波速、波长、波高分别与弹性膜表面的波动频率、波速、波长、波高各各相等。

在发生同步波动的情况下,边界表面流速将大于零,而且,边界面上的流速梯度减小,从而减小边界上的剪力,减小由于剪力作用所发散的能量,从而使阻力系数与外加能源数量减小。

因此,减阻问题是流体附面层波动与弹性表面波动相结合的问题。下面就要进而分析弹性膜的波动。

(四) 弹性膜同步波动条件

由弹性力学可知,在无体力情况下,弹性体变形平衡方程为^[18,19]

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \Delta^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \Delta^2 v - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

在上式中

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

为拉梅常数, E为弹性模数, ν 为泊桑比, ρ 为密度。而

$$e = E_x + E_y + E_z,$$

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad E_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

考虑弹性膜波动属二元的, 在以后分析中相当z轴位移项均略去。
如波动为畸变的, 则(2)式首项为零, 故

$$\begin{cases} \mu \Delta^2 u_1 - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \\ \mu \Delta^2 v_1 - \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

下标「1」代表畸变波位移, 而畸变还应满足

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

如波动为无旋的, 则位移方程为

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \Delta^2 u_2 - \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \Delta^2 v_2 - \rho \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

二元无旋波还应满足

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

的条件。下标「2」代表无旋波位移。

我们可把畸变波与无旋波位移方程归纳成

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 v \end{cases} \quad (6)$$

对畸变波来说,

$$a = c_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = C_2 \sqrt{\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}} \quad (7)$$

对无漩波来说,

$$a = c_2 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (8)$$

现今 x 轴与弹性膜和金属接触界面相合。 x 方向就是弹性波传递方向, y 轴垂直向上, 膜厚度为 h , 如图 1 所示:

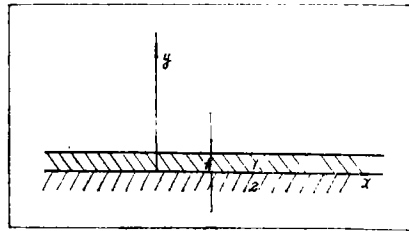


图 1

兹以下标第一数字「1」代表弹性膜, 「2」代表原边界物质(金属); 而下标第二数字「1」与「2」则代表畸变波与无漩波。例如, u_{12} 代表无漩波在弹性膜内 x 方向位移, 等等。

现今在弹性膜内满足(5)式的畸变位移为

$$u_{11}, v_{11} = f_{11}(y) e^{i(kx - \omega t)} = f_{11} e^{ik(x - c_3 t)} \quad (9)$$

在上式中, $c_3 = \frac{\omega}{k}$, 为弹性波实际传递速度。在弹性波与层流附面层波动处于同步情况下, 它也就是附面层波动速度。因

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \sqrt{gk}, \quad C_3 = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

由于附面层起始扰动波长 $\lambda = 0.1 \sim 1.0 \text{ cm}$, 则由上式可估算

$$C_3 \approx 1.8 \text{ cm/s} \sim 4.0 \text{ cm/s} \quad (10)$$

考虑到 u, v 互相垂直, 把(9)写成

$$\begin{cases} u_{11} = f_{11} \cos(kx - \omega t) \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} v_{11} = f_{11} \sin(kx - \omega t) \end{cases} \quad (12)$$

例如, 将(11)代入(6)中, 第1式, 则得到

$$f''_{11} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{C_{11}^2}\right) f_{11} \tag{13}$$

在以后的分析中，将几次碰到如下方程

$$f'' = k^2 \left(1 - \frac{C_3^2}{C_{ij}^2}\right) f \tag{14}$$

在上式中， $C_{ij}(i, j = 1, 2)$ 代表第1、2层的畸变波或无漩波波速。为求解(14)，必须先确定括号为正或为负，即须确定 C_3 与 C_{ij} 的比值关系。在本文中将以橡皮作为弹性膜，以低碳钢作为原边界材料，以此作为研究对象。二者诸常数列如下表：

表 1

材料名称	$E \times 10^9$ (kg/cm ²)	ν	μ (kg/cm ²)	ρ (g/cm ³)	C_2 (m/s)	C_1 (m/s)
低碳钢	2.0~2.2	0.25~0.33	$\sim 8.1 \times 10^5$	$\sim 8 \times 10^{-6}$	~ 5800	~ 3100
橡皮	0.000008	0.47	~ 27.0	$\sim 9.3 \times 10^{-4}$	~ 2.20	$\sim 0 \sim 0.52$

将(10)式与上表比较可见，由于波速计算精度的限制，特别是由于材料性质不同，实际上存在着

$$(1) C_2 > C_3 > C_1, \quad (2) C_2 > C_1 > C_3$$

两种情形。

以下，先研究第一种情形。

在第一层 $C_3 > C_1$ 考虑到弹性膜较薄，忽略波动沿 y 的变化，则 (13) 式的解可写成

$$f_{11} = A \sin \sqrt{\frac{\omega^2}{C_{11}^2} - k^2} y + B \cos \sqrt{\frac{\omega^2}{C_{11}^2} - k^2} y$$

此处 A, B 为待定常数。在以后的推演中，为简写起见，根号

$$\sqrt{\frac{w^2}{C_{ij}^2} - k^2} \quad \text{或} \quad \sqrt{k^2 - \frac{w^2}{C_{ij}^2}}$$

概以 X_{ij} 代表。因此，

$$u_{11} = [A \sin X_{11} y + B \cos X_{11} y] \cos(kx - \omega t) \tag{15}$$

同理

$$v_{11} = [C \sin X_{11} y + D \cos X_{11} y] \sin(kx - \omega t) \tag{16}$$

由于畸变波满足(4), 即满足

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{\partial v_{11}}{\partial y} = 0$$

则将(15), (16)代入上式, 得到

$$-k[A\sin X_{11}y + B\cos X_{11}y] + X_{11}[C\cos X_{11}y - D\sin X_{11}y] = 0 \quad (17)$$

现分析第二层畸变波位移。从表1可见, $C_{21} \gg C_3$, 如令

$$u_{21} = f_{21}\cos(kx - wt) \quad (18)$$

$$v_{21} = f_{21}\sin(kx - wt) \quad (19)$$

则相应(18)的常微分方程为

$$f_{21}'' = \left(k^2 - \frac{w^2}{C_{21}^2}\right)f_{21}$$

上式解为

$$f_{21} = Fe^{a_{21}y} + Ge^{-a_{21}y}$$

考虑到第二层位移随 y 减小而增大, 与我们的图形相矛盾, 故捨去。则

$$\begin{cases} f_{21} = Fe^{a_{21}y} \\ u_{21} = Fe^{a_{21}y}\cos(kx - wt) \end{cases} \quad (20)$$

同理

$$v_{21} = He^{a_{21}y}\sin(kx - wt)$$

满足畸变条件

$$\frac{\partial u_{21}}{\partial x} + \frac{\partial v_{21}}{\partial y} = 0$$

后得到

$$-kF + X_{21}H = 0 \quad (21)$$

现研究无旋波在第一、二层中传播。弹性膜无旋波动位移为

$$u_{12} = f_{12}\cos(kx - wt)$$

$$v_{12} = f_{12}\sin(kx - wt)$$

则

$$u_{12} = [I\sin X_{12}y + J\cos X_{12}y]\cos(kx - wt) \quad (22)$$

$$v_{12} = [K\sin X_{12}y + L\cos X_{12}y]\sin(kx - wt) \quad (23)$$

满足无旋条件

$$\frac{\partial v_{12}}{\partial x} - \frac{\partial u_{12}}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

后得到

$$k[K\sin X_{12}y + L\cos X_{12}y] - X_{12}[I\cos X_{12}y - J\sin X_{12}y] = 0 \quad (25)$$

在第二层金属中, 无漩波位移则为

$$u_{22} = f_{22}\cos(kx - wt) \quad (26)$$

$$v_{22} = f_{22}\sin(kx - wt) \quad (27)$$

则

$$u_{22} = Me^{22y}\cos(kx - wt) \quad (28)$$

$$v_{22} = Ne^{22y}\sin(kx - wt) \quad (29)$$

满足无漩条件后得到

$$kN - X_{22}M = 0 \quad (30)$$

归纳起来, 研究无漩波与畸变波在第一、二层中传递, 我们得到 8 个位移表达式

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{11} = [A\sin X_{11}y + B\cos X_{11}y]\cos(kx - wt) \\ u_{21} = Fe^{21y}\cos(kx - wt) \\ u_{12} = [I\sin X_{12}y + J\cos X_{12}y]\cos(kx - wt) \\ u_{22} = Me^{22y}\cos(kx - wt) \\ v_{11} = [C\sin X_{11}y + D\cos X_{11}y]\sin(kx - wt) \\ v_{21} = He^{21y}\sin(kx - wt) \\ v_{12} = [K\sin X_{12}y + L\cos X_{12}y]\sin(kx - wt) \\ v_{22} = Ne^{22y}\sin(kx - wt) \end{array} \right. \quad (31)$$

和包含未定常数的 4 个方程

$$\left\{ \begin{array}{l} -k[A\sin X_{11}y + B\cos X_{11}y] + X_{11}[C\cos X_{11}y - D\sin X_{11}y] = 0 \\ kF + X_{21}H = 0 \\ k[K\sin X_{12}y + L\cos X_{12}y] - X_{12}[I\cos X_{12}y - J\sin X_{12}y] = 0 \\ kN - X_{22}M = 0 \end{array} \right.$$

令在弹性膜上、下两边界面($y = 0, y = h$)的波动亦满足上方程组中 1 式与 3 式, 则

$$\left\{ \begin{array}{l} -kB + X_{11}C = 0 \\ -k[A\sin X_{11}h + B\cos X_{11}h] + X_{11}[C\cos X_{11}h - D\sin X_{11}h] = 0 \\ kF + X_{21}H = 0 \\ kL - X_{12}I = 0 \\ k[K\sin X_{12}h + L\cos X_{12}h] - X_{12}[I\cos X_{12}h - J\sin X_{12}h] = 0 \\ kN - X_{22}M = 0 \end{array} \right.$$

在如上方程组中, 包含12个未定常数; 为求解它们, 还要再找出包含诸常数的6个方程式。后者依靠考虑运动平衡与动力平衡的边界条件得到: 在弹性膜表面 ($y = h$) 承受水流剪力, 法向外力为零。弹性体平衡方程为

$$\begin{cases} \bar{X} = \lambda e l + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m \right) + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m \right) \\ \bar{Y} = \lambda e m + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial u}{\partial x} m \right) \end{cases} \quad (32)$$

在上式中, \bar{X}, \bar{Y} 为外力分量, l, m 为表面法向与 x, y 轴交角余弦。其余符号已见前述。

令水流作用于弹性膜表面剪力为 τ_0 , 由牛顿定律可知

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} \quad (33)$$

此处 μ 为流体粘性系数。须注意: 我们选择的流体运动与弹性膜波动的座标是不一致的; 但尤其要注意和复杂的是, 在弹性膜波动时, (32) 式只是对随波动运动的座标系才是正确的, 换句话说, 对固定座标系来说, l, m, \bar{X}, \bar{Y} 是周期地改变的。故以下需求出在发生正弦或余弦波动时 l, m, \bar{X}, \bar{Y} 的表达式。令当 $t = 0$ 时随正弦波运动座标 0 点与固定座标系相合; 而随余弦波运动的座标系则处于 $(0, a)$ 处, a 为波振幅。(图2, 3) 根据几何关系不难求出 l, m 表达式如表2。不难从表2估计, 在弹性膜波动研究中如不考虑 l, m 的变化 (即如采取瑞利波的边界条件) 将会产生较大的误差。

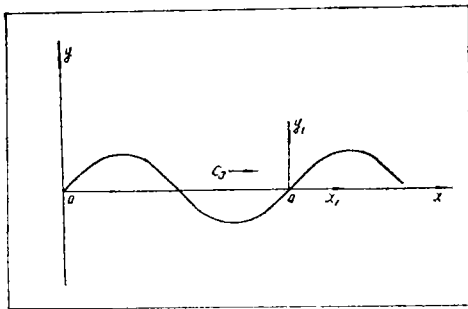


图 2

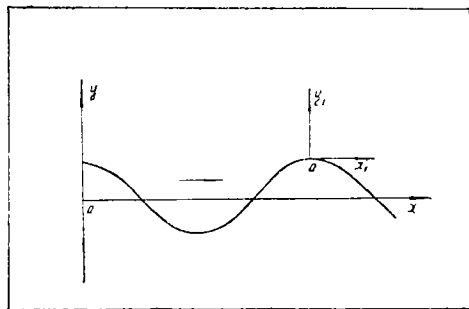


图 3

\bar{X}, \bar{Y} 的表达式则如表3。

在弹性膜与层流附面层处于同步波动情况时, 上两表中的 ak 与前述 $\alpha (\approx 0.625)$ 相等。

由(31)式与表2表3, 相对于正弦波与余弦波, (32)式可分解成(24)式。

表二

方向 余弦	波	正弦波 (S)	余弦波 (C)
l		$\frac{akc \cdot s(kx - wt)}{\sqrt{1 + a^2 k^2 \cos^2(kx - wt)}}$	$\frac{aksin(kx - wt)}{\sqrt{1 + a^2 k^2 \sin^2(kx - wt)}}$
m		$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 k^2 \cos^2(kx - wt)}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 k^2 \sin^2(kx - wt)}}$

表三

力	波	正弦波 (S)	余弦波 (C)
\bar{X}		$\frac{\tau_0}{\sqrt{1 + a^2 k^2 \cos^2(kx - wt)}}$	$\frac{\tau_0}{\sqrt{1 + a^2 k^2 \sin^2(kx - wt)}}$
\bar{Y}		$\frac{\tau_0 ak \cos(kx - wt)}{\sqrt{1 + a^2 k^2 \cos^2(kx - wt)}}$	$\frac{\tau_0 aksin(kx - wt)}{\sqrt{1 + a^2 k^2 \sin^2(kx - wt)}}$

$$\begin{cases}
 \bar{X}_S = \lambda \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \frac{\partial v_{12}}{\partial y} \right) l_S + \mu \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial x} + \frac{\partial v_{12}}{\partial x} \right) m_S \\
 \bar{X}_O = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{\partial u_{12}}{\partial x} \right) l_O + \mu \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial y} + \frac{\partial u_{12}}{\partial y} \right) m_O \\
 \bar{Y}_S = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \frac{\partial v_{12}}{\partial y} \right) m_S + \mu \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial x} + \frac{\partial v_{12}}{\partial x} \right) l_S \\
 \bar{Y}_O = \lambda \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{\partial u_{12}}{\partial x} \right) m_O + \mu \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial y} + \frac{\partial u_{12}}{\partial y} \right) l_O
 \end{cases} \quad (34)$$

现将(31)与上两表代入(34), 得到

$$\begin{cases}
 \frac{\lambda ak}{2} a_1 \sin 2(kx - wt) + \mu a_2 \cos(kx - wt) = \tau_0 \\
 -ak(\lambda + 2\mu) a_3 \sin^2(kx - wt) + \mu a_4 \cos(kx - wt) = \tau_0 \\
 \frac{(\lambda + 2\mu)}{ak} a_1 \tan(kx - wt) + \mu a_2 \cos(kx - wt) = \tau_0 \\
 -\frac{\lambda}{ak} a_3 + \mu a_4 \cos(kx - wt) = \tau_0
 \end{cases} \quad (35)$$

在上式中,

$$\begin{cases} a_1 = [X_{11}(C\cos X_{11}h - D\sin X_{11}h) + X_{12}(K\cos X_{12}h - L\sin X_{12}h)] \\ a_2 = k[C\sin X_{11}h + D\cos X_{11}h + K\sin X_{12}h + L\cos X_{12}h] \\ a_3 = k[A\sin X_{11}h + B\cos X_{11}h + I\sin X_{12}h + J\cos X_{12}h] \\ a_4 = [X_{11}(A\cos X_{11}h - B\sin X_{11}h) + X_{12}(I\cos X_{12}h - J\sin X_{12}h)] \end{cases} \quad (36)$$

从(35)中消去

$$\cos(kx - wt), \quad \sin(kx - wt)$$

作为未知数, 得到

$$\mu a_4 \tau_0 - \mu a_2 \left(\tau_0 + \frac{\lambda}{ak} a_3 \right) = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}} \left[\lambda a_1 \left(\tau_0 + \frac{\lambda}{ak} a_3 \right) \right] \quad (37)$$

$$\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \right) \frac{\mu a_4 \left[\mu a_4 \tau_0 - \mu a_2 \left(\tau_0 + \frac{\lambda}{ak} a_3 \right) \right]}{\left(\tau_0 + \frac{\lambda}{ak} a_3 \right)^2 (ak)^2} + \frac{a_2 \left(\tau_0 + \frac{\lambda}{ak} a_3 \right)}{a_4} = \tau_0 \quad (38)$$

这样, 又得到两个包含未定常数的代数方程。其余4个代数方程由满足弹性膜底部位移连续与应力连续的条件得到。

从位移连续条件

$$\begin{cases} u_{11} + u_{12} \Big|_{y=0} = u_{21} + u_{22} \Big|_{y=0} \\ v_{11} + v_{12} \Big|_{y=0} = - (v_{21} + v_{22}) \Big|_{y=0} \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} u_{11} + u_{12} \Big|_{y=0} = u_{21} + u_{22} \Big|_{y=0} \\ v_{11} + v_{12} \Big|_{y=0} = - (v_{21} + v_{22}) \Big|_{y=0} \end{cases} \quad (40)$$

得到

$$B + J = M + F \quad (41)$$

$$D + L = - (H + N) \quad (42)$$

由应力连续条件

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left[\frac{\partial(u_{11} + u_{12})}{\partial x} + \frac{\partial(v_{11} + v_{12})}{\partial y} \right] + 2\mu_1 \frac{\partial(v_{11} + v_{12})}{\partial y} = \\ & = \lambda_2 \left[\frac{\partial(u_{21} + u_{22})}{\partial x} + \frac{\partial(v_{21} + v_{22})}{\partial y} \right] + 2\mu_2 \frac{\partial(v_{21} + v_{22})}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\mu_1 \left[\frac{\partial(u_{11} + u_{12})}{\partial y} + \frac{\partial(v_{11} + v_{12})}{\partial x} \right] = \mu_2 \left[\frac{\partial(u_{21} + u_{22})}{\partial y} + \frac{\partial(v_{21} + v_{22})}{\partial x} \right]$$

得到

$$\begin{aligned} & \lambda_1 [-k(B + J) + CX_{11} + KX_{12}] + 2\mu_1 [CX_{11} + KX_{12}] = \\ & = \lambda_2 (-kF - kM + X_{21}H + X_{22}N) + 2\mu_2 (X_{21}H + X_{22}N) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\mu_1[X_{11}A + X_{12}I + k(D + L)] = \mu_2[X_{21}F + X_{22}M + k(H + N)] \quad (44)$$

这样，我们就得到了包含所有待定常数的全部代数方程式。

以上讨论的是 $C_2 > C_3 > C_1$ 情形。对 $C_2 > C_1 > C_3$ 情形，其推导方法完全相同，过程就不赘述了，下节将直接列出其结果。

(五) 数值计算方法和结果

把前节所得到的 $C_2 > C_3 > C_1$ 情形的全部12个代数方程式列下

$$\left\{ \begin{aligned} & -kB + X_{11}C = 0 \\ & -k[A\sin X_{11}h + B\cos X_{11}h] + X_{11}[C\cos X_{11}h - D\sin X_{11}h] = 0 \\ & -kF + X_{21}H = 0 \\ & kL - X_{12}I = 0 \\ & k[K\sin X_{12}h + L\cos X_{12}h] - X_{12}[I\cos X_{12}h - J\sin X_{12}h] = 0 \\ & kN - X_{22}M = 0 \\ & B + J = M + F \\ & D + L = -(H + N) \\ & \lambda_1[-k(B + J) + CX_{11} + KX_{12}] + 2\mu_1(CX_{11} + KX_{12}) \\ & \quad = \lambda_2(-kF - kM + X_{21}H + X_{22}N) + 2\mu_2(X_{21}H + X_{22}N) \\ & \mu_1[X_{11}A + X_{12}I + k(D + L)] = \mu_2[X_{21}F + X_{22}M + k(H + N)] \\ & \mu_1 a_4 \tau_0 - \mu_1 a_2 \left(\tau_0 + \frac{\lambda_1}{ak} a_3 \right) = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}} \left[\lambda_1 a_1 \left(\tau_0 + \frac{\lambda_1}{ak} a_3 \right) \right] \\ & \left(\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_1} \right) \frac{\mu_1 a_4 \left[\mu_1 a_4 \tau_0 - \mu_1 a_2 \left(\tau_0 + \frac{\lambda_1}{ak} a_3 \right) \right]}{\left(\tau_0 + \frac{\lambda_1}{ak} a_3 \right)^2 (ak)^2} + \frac{a_2 \left(\tau_0 + \frac{\lambda_1}{ak} a_3 \right)}{a_4} = \tau_0 \end{aligned} \right. \quad (45)$$

对 $C_2 > C_1 > C_3$ 情形，也可得到12个代数方程式：

$$\left\{ \begin{aligned} & -k(A + B) + X_{11}(C - D) = 0 \\ & -k(Ae^{X_{11}h} + Be^{-X_{11}h}) + X_{11}(Ce^{X_{11}h} - De^{-X_{11}h}) = 0 \\ & -kF + X_{21}H = 0 \\ & k(K + L) - X_{21}(I - J) = 0 \\ & k(Ke^{X_{12}h} + Le^{-X_{12}h}) - X_{12}(Ie^{X_{12}h} - Je^{-X_{12}h}) = 0 \\ & kN - X_{22}M = 0 \\ & A + B + I + J = F + M \\ & C + D + K + L = -(H + N) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1[-k(A+B+I+J)+X_{11}(C-D)+X_{12}(K-L)] \\
 & \quad + 2\mu_1[X_{11}(C-D)+X_{12}(K-L)] \\
 & = \lambda_2[-k(F+M)+X_{21}H+X_{22}N]+2\mu_2[X_{21}H+X_{22}N] \\
 & \mu_1[X_{11}(A-B)+X_{12}(I-J)+k(C+D+K+L)]=\mu_2[X_{21}F+X_{22}M \\
 & \quad +k(H+N)] \\
 & \mu_1 a_4 \tau_0 - \mu_1 a_2 \left(\tau_0 + \frac{\lambda_1}{ak} a_3 \right) = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}} \left[\lambda_1 a_1 \left(\tau_0 + \frac{\lambda_1}{ak} a_3 \right) \right] \\
 & \left(\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_1} \right) \frac{\mu_1 a_4 \left[\mu_1 a_4 \tau_0 - \mu_1 a_2 \left(\tau_0 + \frac{\lambda_1}{ak} a_3 \right) \right]}{\left(\tau_0 + \frac{\lambda_1}{ak} a_3 \right)^2 (ak)^2} + \frac{a_2 \left(\tau_0 + \frac{\lambda_1}{ak} a_3 \right)}{a_4} = \tau_0
 \end{aligned} \tag{46}$$

虽(45), (46)方程组中最后两式形式完全相同, 但 a_1, a_2, a_3, a_4 内容不同。对 $C_2 > C_3 > C_1$ 情形言, 即对(45)言, 其表达式已见(36); 对 $C_2 > C_1 > C_3$ 情形言, 它们等于

$$\begin{cases} a_1 = [X_{11}(Ce^{x_{11}h} - De^{-x_{11}h}) + X_{12}(Ke^{x_{12}h} - Le^{-x_{12}h})] \\ a_2 = k[Ce^{x_{11}h} + De^{-x_{11}h} + Ke^{x_{12}h} + Le^{-x_{12}h}] \\ a_3 = k[Ae^{x_{11}h} + Be^{-x_{11}h} + Ie^{x_{11}h} + Je^{-x_{11}h}] \\ a_4 = [X_{11}(Ae^{x_{11}h} - Be^{-x_{11}h}) + X_{12}(Ie^{x_{12}h} - Je^{-x_{12}h})] \end{cases} \tag{47}$$

此外, 两方程组的 X_{ij} 内容也不同。

给定了弹性膜的几何(厚度)与力学特征数值和弹性膜表面所受剪力如表4所列数值以后, 应用电子计算机进行了(45), (46)两种情形的数值计算, 以求解 A, B, \dots, M, N 。

计算结果表明, (45)方程组是有解的, 而(46)方程组则无解。因上两方程组是在同步波动的前提下推导出来的。因此, 有解就是能产生同步波动, 而无解则不能产生同步波动。也就是说, 在 $C_2 > C_3 > C_1$ 情形下, 弹性膜能产生同步波动。而在 $C_2 > C_1 > C_3$ 情形下, 则弹性膜不能产生同步波动。这就是弹性膜与附面层能够产生同步波动的前提条件。

由于橡皮的力学性质能够满足 $C_2 > C_3 > C_1$ 的条件, 故在一般情况即在前述计算条件下可产生同步波动, 这就是橡皮膜能导致减阻的根本原因所在。

由(7), (8)式可见, C_1, C_2 仅与材料的物理、力学性质有关, 而与其几何尺寸无关。而如果忽略弹性膜的物理力学性质对附面层波动的影响, 即认为 C_3 值仅仅由水流自身条件所决定, 则满足弹性膜与附面层产生同步波动的前提条件是完全可以事先考虑到的。简单说, 只要某种材料的弹模泊桑比、密度等能精确确定, 就能直接判断它能否与附面层产生同步波动, 即能直接判断它能否实现减阻。这就似为弹性材料的选材提供了一个简单的标准。

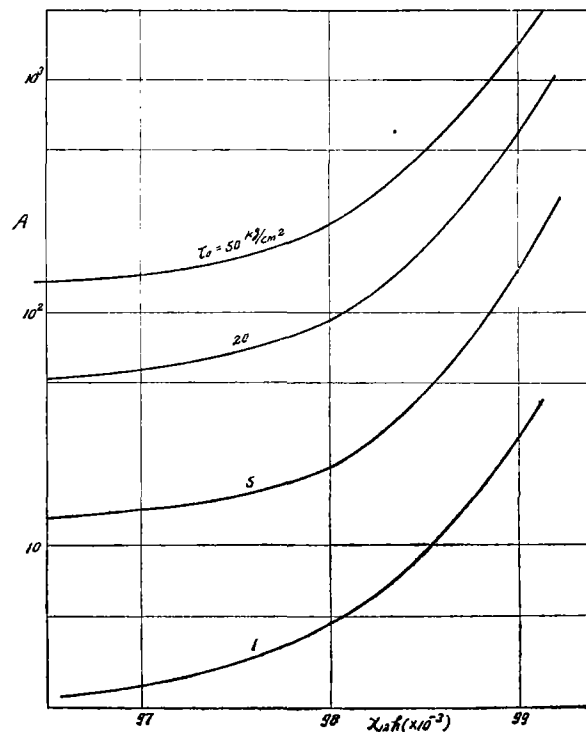
計算組次	$\tau_0 / \text{kg/cm}^2$	X_{11}	X_{12}	$X_{11}h$	$X_{12}h$	備 注
1	50	0.283	0.613	0.045	0.097	$ak=0.625$ $\mu_1=27\text{kg/cm}^2$ $\mu_2=8.0 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ $\lambda_1=426\text{kg/cm}^2$ $\lambda_2=8.0 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ $h_1=0.10$ $x_{21}h=0.10$ $x_{22}h=0.10$
2	"	0.377	0.617	0.060	0.098	
3	"	0.575	0.625	0.092	0.099	
4	20	0.283	0.613	0.045	0.097	
5	"	0.377	0.617	0.060	0.098	
6	"	0.575	0.625	0.092	0.099	
7	5.0	0.283	0.613	0.045	0.097	
8	"	0.377	0.617	0.060	0.098	
9	"	0.575	0.625	0.092	0.099	
10	1.0	0.283	0.613	0.045	0.097	
11	"	0.377	0.617	0.060	0.098	
12	"	0.575	0.625	0.092	0.099	

表 4

以表 4 的諸常數，
 當 $C_2 > C_3 > C_1$ 情形時，
 A, B, \dots, M, N 隨 $X_{12}h$
 (或 $X_{11}h$) 而變化的數值
 計算結果如圖 4—9。

常數確定後，便可
 以從 (31) 式計算諸位
 移值，以及彈性膜粘結
 面與彈性膜內由於波動
 產生的應力值。

圖 4 →



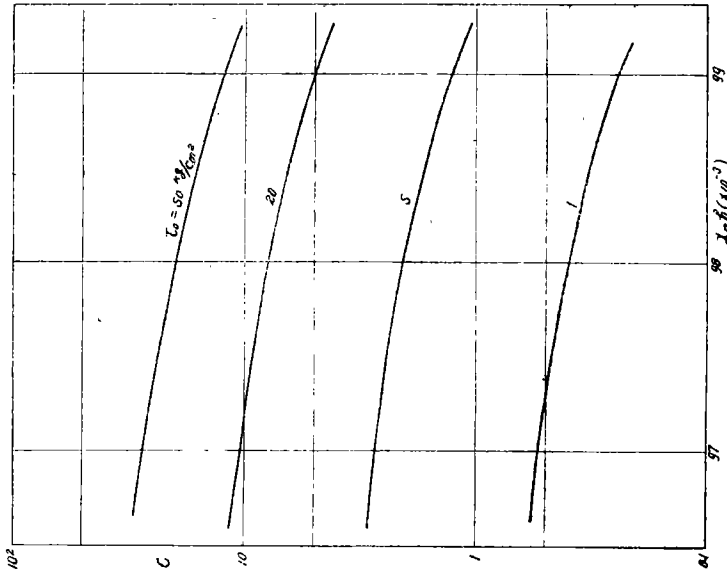


图 5

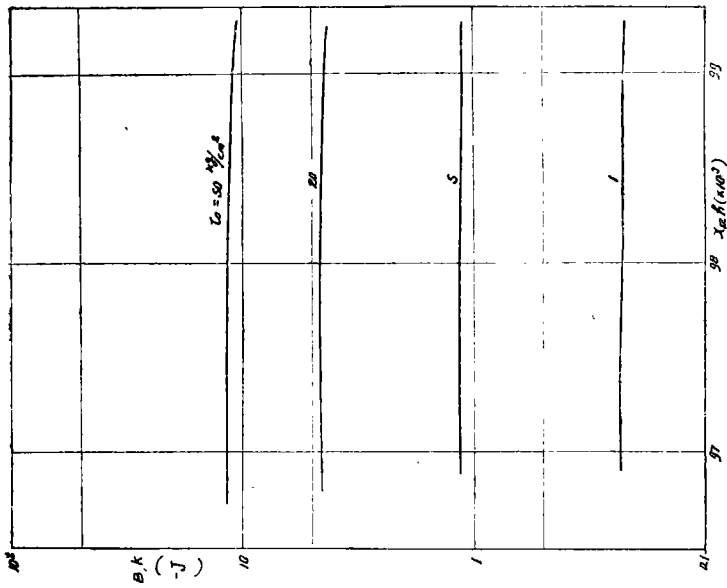


图 6

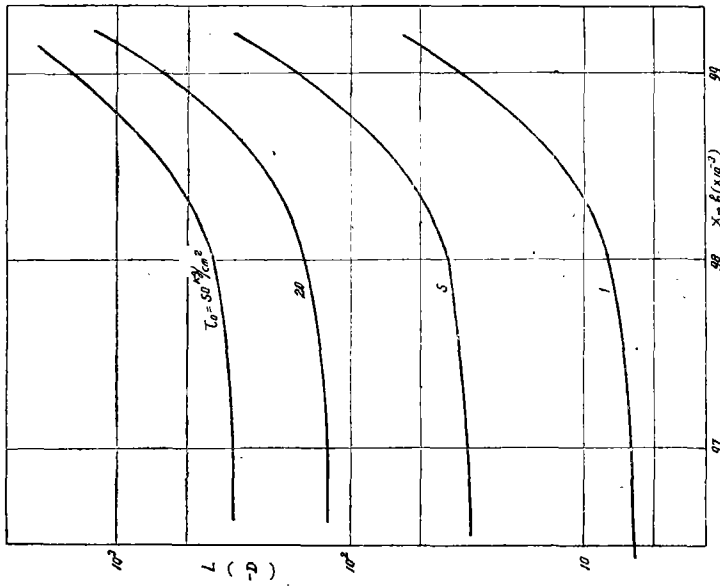


图 7

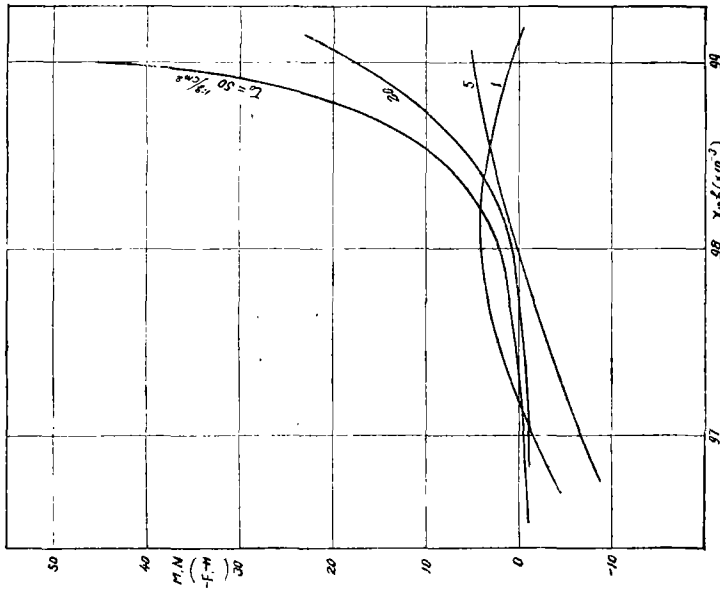


图 8

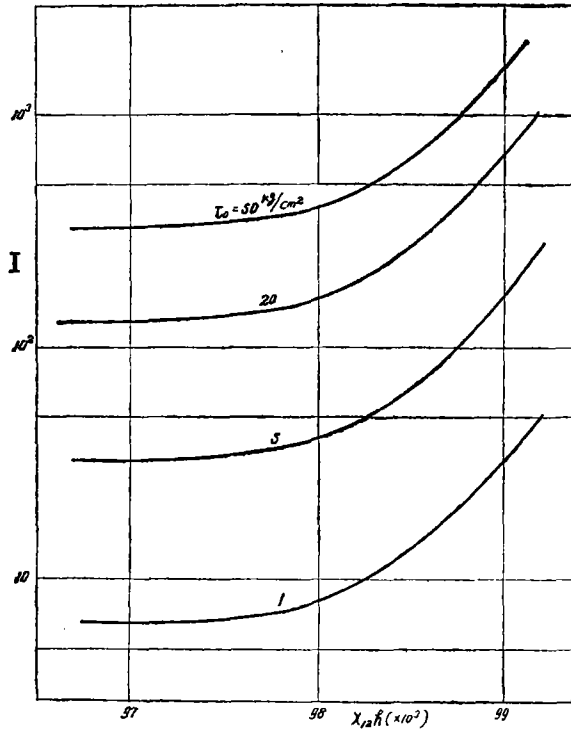


图 9

(六) 减阻成因与计算

在上两节论证了当弹性材料满足了 $C_2 > C_3 > C_1$ 条件后是可以实现弹性膜与附面层的同步波动的目的。现在，再进一步的问题就是：在实现同步波动之后，如何实现减阻？以及，减阻值如何计算？同步波动的减阻值有多少？

我们认为，不论对外流或内流来说，减阻之所以可能，是因为：在边界波动的情况下，在流场中产生了由波动所导引产生的质点纵向分速。实际的流场是由原始流场与波动流场所组成的复合流场。而由于原始纵向流速是沿边界法向随距离增大而增大的，则由边界波动所产生的复合流场的各点流速梯度与边界固定的各该点的流速梯度相比，是减小了。因此，能耗亦减少。这就是减阻的根本原因所在。

以下根据这样的图形具体进行减阻计算。

根据小振幅波动理论⁽²⁰⁾，如波速为 C ，则质点速度 u_1 可表为

$$u_1 = Ce^{-ky} \quad (48)$$

由(1), 写成有量纲形式, 令原始流场流速以 u_2 表之, 则

$$u_2 = u_0 \bar{y} [A + (1-A)\bar{y}] \quad (49)$$

则合成速度 u 为

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = Ce^{-ky} + u_0 \bar{y} [A + (1-A)\bar{y}] \\ &= Ce^{-0.625\bar{y}} + u_0 \bar{y} [A + (1-A)\bar{y}] \end{aligned} \quad (50)$$

因作用在边界面上的阻力 τ_0 为

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)_{y=0} + \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)_{y=0} \\ &= -\frac{0.625\mu C}{\delta} + \frac{\mu u_0 A}{\delta} \end{aligned}$$

令在无波动情况下阻力为 τ_0' , 同步波动时阻力为 τ_0 , 则减阻百分数 r 为

$$r = \frac{\tau_0' - \tau_0}{\tau_0'} = \frac{\Delta\tau_0}{\tau_0} = \frac{0.625\mu C}{\delta} / \frac{\mu u_0 A}{\delta} = \frac{0.625C}{u_0 A} \quad (51)$$

在上式中, $C/u_0 = \bar{C}$, 实为层流附面层中性稳定无量纲波速。根据我们的计算, 当 $Re \approx 135$ 时, $C \approx 0.53$, 而 $A \approx 1$, 故

$$r \approx 0.33 \quad (52)$$

这就是理论减阻值, 也是剪切阻力减少所能达到的极限值。这数值与文献所提到的内流减阻的最高百分数35%是接近的。当然, 由于观测与计算图形上的某些近似性和误差, 特别是由于本文探讨一般的减阻原因, 且只考虑减阻的主要部份, 亦即没有计及由于波动引起流核区流速分布的变形从而对减阻数值的影响, 故实验值稍大于理论值是可以预期的。

(七) 结论与讨论

(1) 在本文中对弹性护面材料减阻的物理图形作了详细明确的阐述: 简单说, 不论内流或外流, 减阻之所以可能, 是由于边界在给定雷诺数情况下层流附面层处于中性稳定状态。并且, 出现附面层与边界面处于同步波动的情形。本文证明, $C_2 > C_3 > C_1$ 是同步波动的前提条件。这就回答了文献^[2]提出的并到现在还没有圆满答复的, 即为何弹性膜能减阻的问题。

并且, 在同步波动的基础上进行了附面层减阻的数值计算, 结果也是与一些实验结果相接近的。

(2) 当然, 文中采用的图形是有近似性的。首先是附面层稳定性的计算没有考虑边界的波动, 即边界的柔顺性。但验算结果表明, 这些忽略是容许的, 即理论结果基本是准确的。

(3) 对从理论角度研究减阻来说, 本文仅仅只是个开端, 还有大量工作有待进一步开展。文中所得的一些结果还没有直接的实验证明。对高分子溶液减阻的分析, 既要考虑材料的粘弹性, 还要考虑扩散影响, 估计问题将远比本文所述图形为复杂。其次, 减阻与附面层和流核流速分布的内在联系, 以及具体的印证计算等等, 也还处于空白状态。对不同形式的内流外流来说, 阻力表达式表现形式也各不相同; 对具体的图形还要进行具体的分析计算, 等等。所有这些问题, 都有待于今后努力加以解决。

参 考 文 献

- [1] H.Schlichting, *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, New-York, 1968.
- [2] M.O.Kramer, *Boundary layer stabilization by distributed damping*. J. Amer. Soc. Nav.Eng. vol.72, 1960. pp.25—33. also J.Aeronautical Sci., vol.27, 1960, p.69.
- [3] T.B.Benjamin, *Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability*. J-Fluid Mech., vol.9, 1961, p.513—532.
- [4] M.T.Landahl, *On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface*. J.Fluid Mech., vol.13, 1962. pp.609—632.
- [5] E.F.Blick, *The theory of skin friction reduction by a compliant coating in a turbulent boundary layer*. in <Viscous Drag Reduction. edit. by C.S.Wells, Plenum Press, New-York, 1969>
- [6] G.Fortuna, T.J.Hanratty, *The influence of drag-reducing polymers on turbulence in the viscous sublayer*. J.Fluid Mech., vol.53, part 3, 1972. pp.575—586.
- [7] W.R.Looney and E.F.Blick, *Skin-friction coefficients compliant surfaces in turbulent flow*. J.Spacecraft and Rockets vol.3, No.10, 1966. p.1562.
- [8] L.Greiner, *Underwater Missile Propulsion*. Compass Publ., Inc., U.S.A., 1967.
- [9] J.L.Lumley, *The reduction of skin friction drag*. in <Fifth Symp. Naval Hydr. Ship Motion and Drag Reduction. Office of Naval Research, Washington, 1964.>
- [10] D. H. Fisher, and E. F. Blick, *Turbulent damping by flabby skins*. J. Aircraft, vol. 3, 1966. p.163.
- [11] H.P.Bakewell, Jr. *Viscous sublayer and adjacent wall region in turbulent pipe flow*. Phys. fluids, vol.10, No.9, 1967, p.1880.
- [12] M.T.Landahl, *Drag reduction by polymer addition* in <Proc. 13th. Intern. Congr. Theor. Appl. Mech. Springer-Verlag, Berlin, 1973>

- {13} T.J. Black, Viscous drag reduction examined in the light of a new model of wall turbulence. in <Viscous Drag Reduction. edit. by C. S. Wells, Plenum Press, New-York, 1969.>
- {14} F. X. Wertmann, Untersuchung instabiler Grenzsichtschwingungen in einem Wasserkanal mittels der Tellurmethode. in <50 Jahre Grenzsichtforschung. edit. by H. Görtler, and W. Tollmien, Braunschweig, 1955.>
- {15} C.C. Lin, On the stability of two-dimensional parallel flows. *Quart. Appl. Math.*, vol. 3, pp.117—142(July, 1945); vol.3, pp.213—234(Oct.,1945); vol.3, pp.277—301 (Jan. 1946)
- {16} C.C. Lin, The theory of hydrodynamic stability. Cambridge Univ. Press, 1955.
- {17} M.C. Potter, Linear stability of symmetrical parabolic flows. *Phys. Fluids*, vol.10, No.3, 1967. p.476,
- {18} 錢偉長, 叶开源, 彈性力学, 科学出版社, 1956.
- {19} S. Timoshenko, and J.H. Goodier, Theory of Elasticity.
- {20} Н. В. Кошкин, И. А. Кибель и Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика, часть 1. Гостехиздат, 1948.