关于非亚贝尔规范群的对偶荷（单磁荷）问题

李华钟　　　　洗鼎昌　　　　郭硕鸿
（中山大学物理系）（中国科学院高能物理研究所）（中山大学物理系）

（一）

杨振宁曾经指出[1]，电荷量子化*与规范群的紧致性有密切关系，他论证自然界存在电荷量子化的现象意味着总体的（Global）亚贝尔规范变换群必需是紧致的。

在许久以前，Dirac[2]曾经从规范变换有一不可积相因子这一观点出发，推测可能存在有单磁荷，单磁荷的存在则导致电荷量子化。虽然单磁荷迄今仍未被发现，但这一问题由于它带有根本的重要性，一直引起相当的理论和实验的探讨[3]。

上述两种观点，看起来都同电荷量子化有关，但是它们采取的数学形式和出发点是如此不同，它们之间的关系过去一直未有被注意过。

最近杨振宁提出了规范场的一种积分形式[4]，它的出发点是把电磁场是一不可积的相因子这一基本观点，推广到任意的非亚贝尔规范场，这种形式的规范场理论有其优越性。我们认为从杨振宁的规范场是一不可积的相因子这一观点出发，允许讨论规范群的紧致性，这就可以将杨振宁和Dirac的两种思想结合起来，从而探讨其物理含义。并且可以讨论一般的非亚贝尔规范群，这是过去并未做到的。

这样，我们从规范场的积分定义出发，可以应用类似于在紧致流形上建立的微几何定理——Gauss—Bonnet 定理[6]的论证。导致存在规范荷与对偶荷的共轭关系。电子荷与单磁荷是这种共轭关系的一例。规范荷与对偶荷的共轭关系就进一步导致这些荷的量子化，包括了电子荷的量子化。

最近'tHooft[5]也讨论过紧致非亚贝尔群的规范场方程可以存在单磁荷解，他引入自发破缺的Higgs—Kibble机制，在特殊条件下，解出一个特定的模型(SO(3)

---

* 电荷量子化（Charge Quantization）指电子和質子电荷絕对值絕对相等，一切带电物質的电荷都是这个値的倍数。

群)，当它含有$U(1)$子群时，场方程有一个独特的解，就是单磁荷。

我们讨论的方式和'tHooft不一样，我们导出的规范荷与对偶荷的共轭关系，应用到SO(3)群时，就自然得到Dirac—Schwinger—'tHooft[2,5,7]等所得的结果。但是我们无需引用Higgs—Kibble机制或任何特殊边界条件，讨论适用于任意紧致李群，单磁荷的Dirac量子化条件是自然的结果。

本文第二节将用普遍的形式论证，在纯杨—Mills场理论中，如规范群为紧致的，可存在有与规范荷相对应的对偶荷解。当规范群包含$U(1)$电磁规范群为子群时，对应于电荷有单磁荷，第三节将以SO_3群为例，具体解出单磁荷解，我们所得的量子化条件与Dirac—Schwinger—'tHooft[2,5,7]相同，单磁荷解与'tHooft相同，但无需引入奇异弦或自发破缺或Higgs机制。

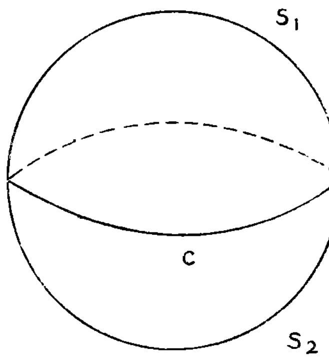
(二)

本节我们先对对偶荷问题作一般形式的推导，然后在下一节中就SO(3)规范群情形具体计算单磁荷解。

研究这问题的基础是类似于微分几何的Gauss—Bonnet公式。为了便于我们把此公式推广应用到规范场中，我们先对此公式作一点说明。

考虑一个二维闭合曲面，其高斯曲率为K。把一矢量绕一小闭合回路平移一周，矢量的旋转角度为

$$\Delta\theta = K\Delta\sigma$$



其中$\Delta\sigma$为回路所围的曲面元。把上式对曲面S_1积分，得绕其边界C平移一周后矢量的旋转角度为

$$\Delta\theta = \iint_{S_1} K d\sigma \tag{1}$$

同样对曲面S_2积分，得绕—C平移一周后矢量旋转角

$$\Delta\theta' = \iint_{S_2} K d\sigma \tag{2}$$

$\Delta\theta$不一定等于$-\Delta\theta'$（例如当K到处为正数时，$\Delta\theta$和$\Delta\theta'$都是正数）。但是由于$\Delta\theta$和$\Delta\theta'$实质上都表示矢量绕同一个回路C平行一周的旋转角，因此它们只能相差2π的整数倍。令$\Delta\theta = -\Delta\theta' + 2\pi X$，得

$$\oiint K d\sigma = 2\pi X \tag{3}$$

这就是Gauss—Bonnet公式，式中X是一个整数，其数值依赖于流形的几何性质。对于闭合的凸曲面，$X=2$。

现在我们把上述概念推广应用到规范场中。设有规范群G，其生成元为X_a，$a=1,2,\cdots\cdots n$，规范势为$W^a_{\mu\nu}$规范场为$f^a_{\mu\nu}(X)$，

$$f^a_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial W^a_\nu}{\partial X_\nu}-\frac{\partial W^a_\mu}{\partial X_\nu}+C^a_{bc}W^b_\mu W^c_\nu \tag{4}$$

C^a_{bc}为群的结构常数。根据规范场的积分定义，由x点移至$x+dx$点时规范无关波函数的不可积相因子[4]为

$$\Phi_{x,x+dx}=I+gW^a_\mu(x)X_a dx^\mu \tag{5}$$

此相因子一般为一个矩阵函数。

考虑G的一个$U(1)$不变，子群G_a，其生成元X_a在基本表示中可用i代表，这时不可积相因子为

$$\Phi_{x,x+dx}=I+igW^a_\mu dx^\mu \tag{6}$$

这是一个普通相因子，其位相为

$$d\theta=gW^a_\mu dx^\mu \tag{7}$$

把(7)式对一闭合回路C积分，得位相差

$$\Delta\theta=\frac{1}{2}\iint_S gf^a_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu} \tag{8}$$

式中S为以C为边界的一个曲面，因此，当有规范场存在时，对于相因子来说，时空具有类似于弯曲空间的特征。规范势类似于平移的christoffel符号，规范场类似于曲率张量。特别是，对于图1所示的闭合曲面，以$\Delta\theta$代表把规范场对S_1积分，$\Delta\theta'$代表对S_2积分：

$$\Delta\theta=\frac{1}{2}\iint_{S_1} gf^a_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu} \tag{9}$$

$$\Delta\theta'=\frac{1}{2}\iint_{S_2} gf^a_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu} \tag{10}$$

则$\Delta\theta$一般可以不等于$-\Delta\theta'$。但是由于$\Delta\theta$和$-\Delta\theta'$实质上都代表绕同一回路C一周后

的位相差，因此它们只可能相差2π的整数倍。

令$\Delta\theta = -\Delta\theta' + 2\pi n$，则由(9)和(10)式得

$$\frac{1}{2}\oint\!\!\oint g f^a_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = 2\pi n \qquad (11)$$

n是一个整数，把上式写为

$$\frac{1}{2}\oint\!\!\oint f^a_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \frac{2\pi}{g} n \qquad (12)$$

上式左边是一种场的通量，设场源 g 由下式定义

$$\frac{1}{2}\oint\!\!\oint f^a_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = 4\pi \mathrm{g} \qquad (13)$$

则有

$$\mathrm{g} g = \frac{n}{2} \qquad (14)$$

g叫做规范荷g的对偶荷(Dual charge)，对于每一个规范荷，都有对应的对 偶荷。关系式(14)是规范荷与对偶荷的共轭关系。

如果所考虑的$U(1)$子群是电磁规范群，则g就是电荷e，而g就是磁荷μ,两者之间有关系

$$\mu e = \frac{n}{2} \qquad (15)$$

这就是Dirac的量子化条件[2]。

关系式(11)与微分几何的 Gauss—Bonnet 公式(3)有一不同点。在微分几何情形，整数X是由流形性质唯一地确定的一个整数，而在规范场情形，整数n不是由曲面性质以及规范群特性所确定的，因此场所带的规范荷以及对偶荷都可以是相应基本荷的整数倍。

上述讨论与Dirac[2]的推理有相似之处。但是我们指出，量子化关系式(14)是规范场积分定义的自然结果。而且，Dirac 所讨论的奇异性不是实质的，当$U(1)$群作为紧致规范群的一个子群时，可以适当选择规范来避免奇异弦的引入。正像一个球而本来没有任何奇异性，但是在它上面引入球面坐标系时就在它两极上引进了奇异性。如果把球面放进三维空间中来研究就可以避免这种奇异性。在下一节的具体计算中，将会更清楚地看到这一点。同时，我们也不需要像'tHooft 那样引入自发破缺和Higgs—Kihhle 机制的特殊模型来获得对偶荷的结论。

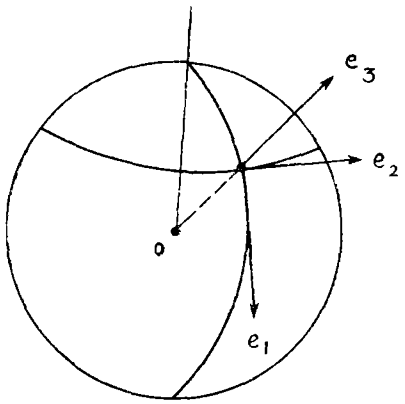
(三)

本节我们具体计算一个 SO(3)规范群的例子，在这一例子中，我们将证明上节的结论；此外还得出对偶荷的规范势的具体表式，它同'tHooft 解[5]全同。由此可

见'tHooft解实质上同他假设的Higgs机制无关。

考虑SO(3)规范群。设群的矢量表示空间的基矢为$\vec{e}_a$($a=1,2,3$)，在空间每点上，基矢$\vec{e}_a$的取向可以任意选择。群的三维表示矢量ψ^a沿时空的平移关系也不是唯一确定的。存在多种可能的平移对应关系。下面我们研究一种可能性。

考虑一球面，我们选择球面每点上$\vec{e}_a$的取向与球坐标曲线取向相对应(图2)。考虑SO(3)群的一个SO(2)子群，其二维表示矢量ψ^a($a=1,2$)可以看作为球面上的一个矢量。现在我们把球面几何上的平移关系引用作为矢量ψ^a沿球面的平移关系。这种平移关系与标架$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$的选择无关，因此自然就是一种可能的平移关系。下面我们计算与此平移关系对应的规范场。



取球面坐标θ、ϕ，球面上间隔为

$$ds^2=r^2d\theta^2+r^2sin^2d\theta\phi^2$$

度规张量$g\mu\nu$(μ、$\nu=1,2$)为

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{16}$$

由此求出矢量平移的 Chsistoffel符号$\Gamma^i_{j\mu}$($i,j,\mu=1,2$)为

$$\Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{12}=\frac{cos\theta}{sin\theta}$$

$$\Gamma_{22}=-Sin\ \theta\ cos\ \theta \tag{17}$$

其他分量$=0$。

或者写成矩阵形式$(\Gamma\theta)^i_j$和$(\Gamma_\phi)^i_j$得

$$(\Gamma\theta)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{cos\theta}{Sin\theta} \end{bmatrix} \qquad (\Gamma_\phi)=\begin{bmatrix} 0 & -sin\theta cos\theta \\ \dfrac{cos\theta}{sin\theta} & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

SO(2)子群的生成元为

$$(X_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0 & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

矩阵（Γ^{μ}）与规范标符 W_{μ}^{3}（X_3）相对应。但是还须注意一点：规范群中所用基矢 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 长度不变，但在球面几何上，其矢长度随 θ 而变（两个线元为 $rd\theta$ 和 $r\sin\theta d\phi$）因此，我们把球面上的矢量 $v^i \to \tilde{v}^i$

$$\tilde{v} = Mv \qquad M = \begin{bmatrix} r & \\ & r\sin\theta \end{bmatrix} \tag{20}$$

作此变换后，Γ_{μ} 变为

$$\tilde{\Gamma}_{\mu} = M\Gamma_{\mu}M^{-1} + M\,\partial_{\mu}M^{-1} \tag{21}$$

由此求出

$$\tilde{\Gamma}_{o} = 0 \qquad \tilde{\Gamma}_{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\theta \\ \cos\theta & 0 \end{bmatrix} = -\cos\theta X_3 \tag{21}$$

矩阵 $\tilde{\Gamma}_{\mu}$ 可以直接与 W_{μ}^{3} 联系

$$\tilde{\Gamma}_{\mu} = gW_{\mu}^{3}X_3 \tag{23}$$

由此求出

$$gW_{\theta}^{3} = 0 \ , \qquad gW_{\phi}^{3} = -\cos\theta \tag{24}$$

规范场为

$$f^3{}_{\theta\phi} = -f^3{}_{\phi\theta} = \frac{\partial W_{\phi}}{\partial\theta} - \frac{\partial W_{\theta}}{\partial\phi} = \frac{\sin o\theta}{g}$$

$$\text{其他分量} = 0 \tag{25}$$

把规范场对球面积分得

$$\iint f^{3}_{\theta\phi} d o d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{g}\sin\theta = \frac{4\pi}{g} \tag{26}$$

因此，这规范场就是由对偶荷 $g = \frac{1}{g}$ 作为源的场。假设此规范下 W_{μ}^{3} 为电磁势 A_{μ}，g 为电荷 e，则此解就是单磁荷解，磁荷为

$$\mu = \frac{1}{e} \tag{27}$$

由于球面上两个线元为 $rd\theta$ 和 $r\sin\theta d\phi$，由(24)式电磁势 A_{μ} 写成通常矢量形式为

$$e\vec{A} = \frac{-\cos\theta}{r\sin\theta}\vec{e}_{\phi} \tag{28}$$

电磁场为

$$B_r = \frac{f^3_{\theta\phi}}{r^2 \sin\theta} = \frac{1}{er^2}$$

其他分量 = 0

或

$$\vec{B} = \frac{1}{er^2}\vec{e}_r \tag{29}$$

场源就是原点处的一个单磁荷。

上面得到的场在 $r=0$ 点有奇异点，而势 $\vec{A}$ 除了在 $r=0$ 点奇异外，在两极 $\theta=0,\pi$ 处亦有奇异性，繞两极周围的小迴路积分得 $\oint \vec{A}\,\vec{de} \not\to 0$，而是 $\longrightarrow 2\pi$，我们的解对应于 Schwinger[7] 的双向奇异弦解。但是这种奇异性不是本质的，仅仅是上面所采用的特殊标架系的结果。当电磁规范群作为紧致群的一个子群时，我们可以选择另一些坐标架系，使基矢 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 不限制在球面上，这样就可以在势的表式中不出现上述奇异性。例如，我们可以作规范变换使各点上基矢 $\vec{e}_a$ 都转到平行于 X、Y、Z 轴方向，这规范变换是

$$\psi' = S\psi, \quad S = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{30}$$

作此规范变换后，新的势为

$$gW'^{a}_{\mu}X_a = gSW^{a}_{\mu}X_aS^{-1} + S\partial_{\mu}S^{-1} \tag{31}$$

把空间分量 $\mu=\theta,\phi,r$ 变回到 x,y,z，得

$$gW'^{a}_{\mu} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i= \end{array}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -r_3/r^2 & r_2/r^2 \\ r_3/r^2 & 0 & -r_1/r^2 \\ -r_2/r^2 & r_1/r^2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x & \quad y & \quad z \end{array} \end{array} \begin{array}{l} a=1 \\ a=2 \\ a=3 \\ \\ \end{array}$$

此式与 'tHooft 文中[5]所得规范势一致。在此规范中，势的表示式除了 $r=0$ 点外没有其他奇异性。因此可以不需要引入奇异弦来研究单磁荷问题。

作者感谢北京中国科学院高能物理研究所、物理究研所、兰州大学、西北大学和中山大学等的理论物理工作者们的关心、讨论和通讯。又杨振宁教授寄来了 'tHooft 的论文复制本，特表谢意。

参 考 文 献

〔1〕 C.N.Yang, Phys. Rev. D1, 2306 (1970)。

〔2〕 P.A.M.Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) A183, 60 (1931)。Phys. Rev. 74, 817 (1948)。

〔3〕 例如参看 B. Zumino, Strong and Weak Interaction ——— Present Problems。1966 Internation School of Physics, Erice Ed. A. Zichichi。

〔4〕 C.N.Yang, Phys. Rev. Lett。33 (1974)

〔5〕 G.' tHooft, Nacl. Phys. 79B, 276(1974)。

〔6〕 N.J.Hicke "Note on Differential Geometry", Vol 2.P.81。吴文俊:关于微分几何的一次报告(1974.北京)。

〔7〕 J.Schwinger, Phys. Rev. 125, 1047(1962), 144,1087(1966)。