

薄板混合型有限单元体及其在船坞底板计算中的应用

(数学力学系)

蔡承武 陈树坚 刘世宁

摘 要

本文提出的有限单元法,是基于薄板的广义变分原理。采用有四个节点的矩形单元体,以 w , $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 为广义节点位移。

文中对于正方形单元体,估计了离散化带来的误差;并用典型算例检验其收敛性。应用本文推荐的方法计算了某船坞底板的内力分布,其结果已为设计部门采用。

基于最小势能原理的有限单元法,要求位移函数满足协调条件。为了获得协调的单元体,不是把位移函数搞得十分复杂,就是增加单元体的自由度,以至小容量的电子计算机难以计算一般工程问题。克服这一困难的一个途径是抛弃直线假设或离散地满足直线假设;另一个途径是应用薄板广义变分原理⁽¹⁾,放松单元体之间的协调性要求⁽²⁾。

本文在薄板弯曲的广义变分原理的基础上,得到了适合于有限单元法的变分方程。在相邻单元体的公共边界上要求变量函数 w 满足“简支条件”(w, M_n 的连续条件)。这样就有可能选择较简单的位移函数严格满足变分原理的要求。

I、薄板弯曲的混合型单元体

一、符 号

x, y, z ——坐标,如图1.1。

n, s ——板或单元体边界的外法向和切向坐标,如图1.1。

h ——板的厚度或正方形单元体的边长。

E ——弹性模量。

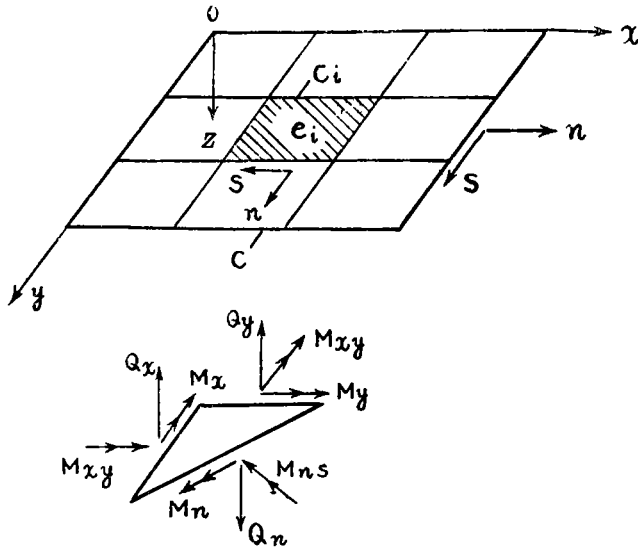


图 1.1

ν —— 泊桑比。

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}。$$

D_x, D_y, D_{xy}, D_1 —— 正交各向异性板弹性常数。

w —— z 方向的位移。

q —— z 方向载荷密度。

$$l = \cos(\alpha, n), \quad m = \cos(\alpha, y)。$$

M_x, M_y, M_{xy} —— 弯矩和扭矩，如图 1.1。

$$M_n = M_x l^2 + M_y m^2 + 2M_{xy} l m。$$

$$M_{ns} = (M_y - M_x) l m + M_{xy} (l^2 - m^2)。$$

Q_x, Q_y —— 剪力，如图 1.1。

$$Q_n = Q_x l + Q_y m = \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) l + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) m。$$

$$R_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}。$$

χ_x, χ_y —— x, y 方向的曲率。

k —— 基础的弹性常数。

C, C_i —— 板的边界线与单元体的边界线。

F —— C 所围的区域。

e_i —— 第 i 个单元体。

C_w, C_α, C_M, C_R —— 分别是指定 $w, \frac{\partial w}{\partial n}, M_n, R_n$ 的相应边界。

$\bar{w}, \bar{\alpha}, \bar{M}, \bar{R}$ —— 相应边界上指定 $w, \frac{\partial w}{\partial n}, M_n, R_n$ 的值。

K_e —— 单元体广义刚度矩阵。

二、变分原理

定义如下泛函

$$\begin{aligned} \Pi[w] = & \iint_F \left(G + \frac{k}{2} w^2 - qw \right) dx dy + \sum_i \int_{C_i} M_n \frac{\partial w}{\partial n} ds - \\ & - \int_{C_R} \bar{R} w ds - \int_{C_\alpha} \bar{\alpha} M_n ds, \end{aligned} \quad (1.1)$$

式中 G , M_n 均可用 w 表示

$$G = -\frac{1}{2} \left[M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right], \quad (1.2)$$

$$M_n = M_x l^2 + M_y m^2 + 2M_{xy} lm, \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4a)$$

泛函 $\Pi[w]$ 的变量函数 $w(x,y)$ 指定满足如下条件(以后称“简支条件”):

$$\left. \begin{aligned} & \text{在 } C_w \text{ 上 } w = \bar{w}, \\ & \text{在 } C_M \text{ 上 } M_n = \bar{M}, \\ & \text{在 } C_t \text{ 上 } w, M_n \text{ 连续.} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

$\Pi[w]$ 的一阶变分为:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \sum_i \iint_{e_i} (D \Delta \Delta w + kw - q) \delta w dx dy + \int_{C_R} (R_n - \bar{R}) \delta w ds + \\ & + \int_{C_\alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \bar{\alpha} \right) \delta M_n ds + \sum_{i < j} \int_{C_i \cap C_j} (R_n^i + R_n^j) \delta w ds + \\ & + \int_{C_i \cap C_j} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^i + \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^j \right] \delta M_n ds \left\} + \sum_k (\Delta M_{ns})_k \delta w_k, \end{aligned} \quad (1.6)$$

式中 $(\Delta M_{ns})_k$ 代表与节点 k 有关的各单元体, 沿单元体边界切向坐标 s 的正向经过节点 k 时, M_{ns} 的跳跃值的代数和。

从(1.6)式可以看出, 泛函 $\Pi(w)$ 的一阶变分等于零的充分必要条件是:

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w + kw &= q && \text{在 } e_i \text{ 内;} \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= \bar{a} && \text{在 } C_\alpha \text{ 上;} \\ R_n &= \bar{R}_n && \text{在 } C_R \text{ 上;} \\ \frac{\partial w}{\partial n}, R_n &&& \text{在相邻单元体的公共边界上连续;} \\ (\Delta M_{ns})_k &= 0 && \text{在节点 } k \text{ 上。} \end{aligned}$$

最后一个等式是节点上集中力的平衡条件。

由此可见, 当 w 指定满足“简支条件”(1.5)时, 泛函 $\Pi(w)$ 的逗留函数即为弹性基础板小挠度理论的解答。

上述变分原理可以推广到正交各向异性板的情形, 只要将(1.4a)式改为下式即可。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ M_y &= -D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ M_{xy} &= -2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4b)$$

其中 D_x, D_y, D_{xy}, D_1 是决定正交各向异性板弹性性质的四个独立常数, 它们可以用两个主方向的弹性模量、泊桑比及剪切模量来表示, 但是, 保留(1.4b)式的形式更为方便, 它可以推广到结构上的正交各向异性的情形, 例如, 加肋板, 波纹板等。

当单元体的形状为矩形时, 可取直角坐标的 x, y 轴分别平行于矩形单元体的两条边。应用格林公式, 将(1.1)式中沿单元体边界 C_i 的闭路积分化为 e_i 上的面积分, 从而得到

$$\Pi(w) = \iint_F (G + L + \frac{k}{2} w^2 - qw) dx dy - \int_{C_R} \bar{R} w ds - \int_{C_\alpha} \bar{a} M_n ds, \quad (1.7)$$

式中

$$L = M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.8)$$

在满足“简支条件”(1.5)式的可能位移中, 用直接法求泛函 $\Pi(w)$ 的逗留函数的近似解, 就是本文建议的有限单元法的依据。

三、广义刚度矩阵

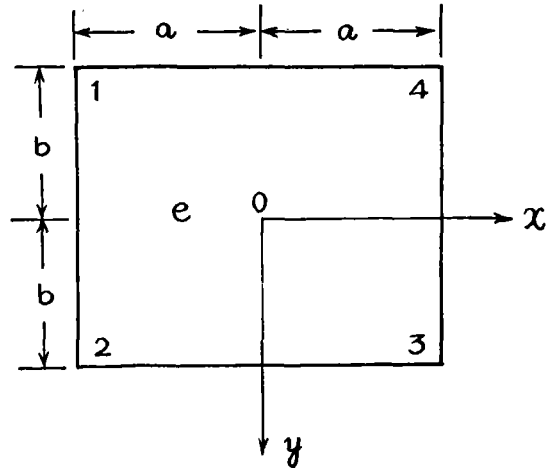


图 1.2

取局部坐标系 oxy 如图1.2所示。矩形单元体 e 的四个节点依次记作1、2、3、4，每一节点有三个自由度，节点 i 的广义位移可以表示为 w_i 、 χ_{xi} 、 χ_{yi} 。曲率与挠度的关系为

$$\left. \begin{aligned} \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \chi_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

在单元体 e 上构造位移函数 $w(x, y)$

$$w(x, y) = \mathbf{N} \mathbf{W}_e \quad (1.10)$$

式中 \mathbf{W}_e 代表单元体 e 的广义位移列矩阵，它的转置矩阵可以表示为

$$\mathbf{W}_e^T = [w_1, w_2, w_3, w_4, \chi_{x1}, \chi_{x2}, \chi_{x3}, \chi_{x4}, \chi_{y1}, \chi_{y2}, \chi_{y3}, \chi_{y4}], \quad (1.11)$$

\mathbf{N} 是 1×12 的矩阵

$$\mathbf{N} = [N_1, N_2, \dots, N_{12}], \quad (1.12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{x_i} \right) \left(1 + \frac{y}{y_i} \right), \\ N_{i+4} &= \frac{a^2}{24} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \left(3 + \frac{x}{x_i} \right) \left(1 + \frac{y}{y_i} \right), \\ N_{i+8} &= \frac{b^2}{24} \left(\frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(3 + \frac{y}{y_i} \right) \left(1 + \frac{x}{x_i} \right), \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (1.13)$$

式中 x_i, y_i 代表节点 i 的坐标; a, b 分别代表矩形单元体两条边长的一半, 如图1.2所示。

容易验证(1.10)~(1.13)所表达的函数 $w(x, y)$ 满足如下条件:

$$w(x_i, y_i) = w_i,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, y_i) = \chi_{xi}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x_i, y_i) = \chi_{yi}.$$

沿矩形单元体的公共边界, w 按三次多项式分布, 完全可以由两端节点上的 w 和 w 沿边界的二阶偏导数确定。因此, w 在相邻单元的公共边界上连续。 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 在单元体的公共边界上为线性分布, 由两端节点上的值可以确定其分布规律, 故 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 在单元体的公共边界上也连续, 从而保证了 M_x, M_y 连续。由此可见, 位移函数 $w(x, y)$ 满足单元体之间的“简支条件”, 至于边界 C_w, C_M 上的“简支条件”, 可以通过给边界节点的广义位移以相应的约束来实现。必须指出, 位移函数 $w(x, y)$ 包含了单元体的任意刚体位移和均匀形变状态, 这对改善收敛性是必要的。

将(1.10)式代入(1.7), 泛函 Π 可表达为节点位移的二次式。对于通常遇到的 $\bar{R} = 0, \bar{a} = 0$ 的情形

$$\Pi = \sum_i \left(\frac{1}{2} \mathbf{W}_{ei}^T \mathbf{K}_{ei} \mathbf{W}_{ei} - \mathbf{W}_{ei}^T \mathbf{q}_{ei} \right), \quad (1.14)$$

其中 i 是单元体的编号, \mathbf{K}_e 是单元体广义刚度矩阵(见附录), \mathbf{q}_{ei} 是载荷列阵, 可按下列式计算。

$$\mathbf{q}_{ei} = \iint_{e_i} q \mathbf{N}^T dx dy. \quad (1.15)$$

(1.14)式中的节点位移并不完全独立, 位于边界 C_w, C_M 上的节点, 其广义位移必须满足“简支条件”。 Π 对每一个独立的节点位移求偏导数, 并令这些偏导数等于零, 即得到一组以独立的节点位移为未知量的线性代数方程组。代数方程组的系数矩阵可以根据单元体广义刚度矩阵在电子计算机上自动形成。

当求得了节点位移后, 就可以按(1.10)式计算单元体的形变与内力。

形变矩阵:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = BW_e, \tag{1.16}$$

其中

$$B = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 N_{12}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^2 N_{12}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y}, \dots, 2\frac{\partial^2 N_{12}}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

内力矩阵:

$$M = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = DX = DBW_e, \tag{1.18}$$

式中D为弹性矩阵,对正交各向异性板

$$D = \begin{pmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

对各向同性板,只要令 $D_x = D_y = D$, $D_1 = \nu D$, $D_{xy} = \frac{1-\nu}{2} D$ 即可。

四、收敛速率

本节就薄板(各向同性)在分布载荷作用下的弯曲问题,讨论有限单元法离散化的误差。

单元体的形状取正方形,正方形各边分别平行于 x, y 轴,边长记作 h 。对于任一内部节点均可列出三个平衡方程式,三个方程式中包含的未知量是与该节点有关的四个单元体的广义节点位移。

为了书写简便起见,引入如下记号:

$a_{i-1,j+1}$	$a_{i,j+1}$	$a_{i+1,j+1}$
$a_{i-1,j}$	$a_{i,j}$	$a_{i+1,j}$
$a_{i-1,j-1}$	$a_{i,j-1}$	$a_{i+1,j-1}$

$$U(x,y) \equiv \sum_{n=i-1}^{i+1} \sum_{m=j-1}^{j+1} a_{n,m} U(x_n, y_m), \tag{1.20}$$

式中 x_n, y_m 为节点坐标, $x_{i\pm 1} = x_i \pm h$, $y_{j\pm 1} = y_j \pm h$ 。

根据单元体广义刚度矩阵 K_e (基础弹性常数 $k=0$ 的情况),可以对任一内部节点 (x_i, y_j) 列出三个平衡方程式:

$\frac{1-\nu}{2}$	$-(1-\nu)$	$\frac{1-\nu}{2}$
$-(1-\nu)$	$2(1-\nu)$	$-(1-\nu)$
$\frac{1-\nu}{2}$	$-(1-\nu)$	$\frac{1-\nu}{2}$

$w +$

$\frac{1+\nu}{6}$	$-\frac{1}{3} + \frac{2\nu}{3}$	$\frac{1+\nu}{6}$
$\frac{2}{3} - \frac{\nu}{3}$	$-\frac{4}{3}(1+\nu)$	$\frac{2}{3} - \frac{\nu}{3}$
$\frac{1+\nu}{6}$	$-\frac{1}{3} + \frac{2\nu}{3}$	$\frac{1+\nu}{6}$

$\frac{h^2}{4} \chi_w +$

$\frac{1+\nu}{6}$	$\frac{2}{3} - \frac{\nu}{3}$	$\frac{1+\nu}{6}$
$-\frac{1}{3} + \frac{2\nu}{3}$	$-\frac{4}{3}(1+\nu)$	$-\frac{1}{3} + \frac{2\nu}{3}$
$\frac{1+\nu}{6}$	$\frac{2}{3} - \frac{\nu}{3}$	$\frac{1+\nu}{6}$

$\frac{h^2}{4} \chi_w = \frac{h^2}{4D} q_1,$

(1.21)

$\frac{1+\nu}{6}$	$-\frac{1}{3} + \frac{2\nu}{3}$	$\frac{1+\nu}{6}$
$\frac{2}{3} - \frac{\nu}{3}$	$-\frac{4}{3}(1+\nu)$	$\frac{2}{3} - \frac{\nu}{3}$
$\frac{1+\nu}{6}$	$-\frac{1}{3} + \frac{2\nu}{3}$	$\frac{1+\nu}{6}$

$w +$

$-\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{15}$
$-\frac{2}{15}$	$-\frac{16}{15}$	$-\frac{2}{15}$
$-\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{15}$

$\frac{h^2}{4} \chi_w +$

$-\frac{7}{45} - \frac{\nu}{9}$	$-\frac{1}{45} - \frac{4\nu}{9}$	$-\frac{7}{45} - \frac{\nu}{9}$
$-\frac{1}{45} - \frac{4\nu}{9}$	$-\frac{32}{45} - \frac{16\nu}{9}$	$-\frac{1}{45} - \frac{4\nu}{9}$
$-\frac{7}{45} - \frac{\nu}{9}$	$-\frac{1}{45} - \frac{4\nu}{9}$	$-\frac{7}{45} - \frac{\nu}{9}$

$\frac{h^2}{4} \chi_w = \frac{q_2}{D},$

(1.22)

$\frac{1+\nu}{6}$	$\frac{2}{3} - \frac{\nu}{3}$	$\frac{1+\nu}{6}$
$-\frac{1}{3} + \frac{2\nu}{3}$	$-\frac{4}{3}(1+\nu)$	$-\frac{1}{3} + \frac{2\nu}{3}$
$\frac{1+\nu}{6}$	$\frac{2}{3} - \frac{\nu}{3}$	$\frac{1+\nu}{6}$

$w +$

$\frac{7}{45} - \frac{\nu}{9}$	$-\frac{1}{45} - \frac{4\nu}{9}$	$\frac{7}{45} - \frac{\nu}{9}$
$-\frac{1}{45} - \frac{4\nu}{9}$	$-\frac{32}{45} - \frac{16\nu}{9}$	$-\frac{1}{45} - \frac{4\nu}{9}$
$\frac{7}{45} - \frac{\nu}{9}$	$-\frac{1}{45} - \frac{4\nu}{9}$	$\frac{7}{45} - \frac{\nu}{9}$

$\frac{h^2}{4} \chi_w +$

$-\frac{4}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{4}{15}$
$-\frac{4}{5}$	$-\frac{16}{15}$	$-\frac{4}{5}$
$-\frac{4}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{4}{15}$

$\frac{h^2}{4} \chi_w = \frac{q_3}{D},$

(1.23)

式中函数 w, x_x, x_y 在节点上的值等于节点位移, 而 q_1, q_2, q_3 是作用在有关的四个单元上的载荷在该节点上产生的节点载荷的代数和。它们的大小与载荷在四个单元上的分布情况有关。将分布载荷 $q(x, y)$ 在节点 (x_i, y_j) 展成戴劳级数

$$q(x, y) = q(x_i, y_j) + (x - x_i) \frac{\partial q}{\partial x} + (y - y_j) \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{1}{2!} \left[(x - x_i)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2(x - x_i)(y - y_j) \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} + (y - y_j)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right] + \dots \quad (1.15)$$

按 (1.15) 式, 分别计算作用在有关四个单元上的载荷在公共节点 (x_i, y_j) 上产生的节点载荷, 其代数和为

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= h^2 q + \frac{h^4}{12} \Delta q + O(h^6), \\ q_2 &= -\frac{h^4}{12} q + O(h^6), \\ q_3 &= -\frac{h^4}{12} q + O(h^6). \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

在方程式 (1.21). (1.22). (1.23) 中, w, x_x, x_y 在各节点上的值用相应函数在节点 (x_i, y_j) 处的戴劳展式表达, 于是化为如下形式

$$\begin{aligned} & 2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \Delta(x_x + x_y) - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 x_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x_y}{\partial x^2} \right) + \\ & + \frac{h^2}{3!} \left\{ (1-\nu) \left(\frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + (1+\nu) \left(\frac{\partial^4 x_x}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 x_y}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^4 x_x}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 x_x}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 x_y}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 x_y}{\partial x^4} \right) \right\} + O(h^4) = \frac{1}{D} \left(q + \frac{h^2}{12} \Delta q \right), \quad (1.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (x_x + \nu x_y) + \frac{h^2}{3!} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \right. \\ & \left. + (1+\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \Delta x_x - \frac{\partial^2 x_x}{\partial y^2} - \left(\frac{1}{2} + \nu \right) \Delta x_y \right\} + \\ & + O(h^4) = -\frac{h^2}{12D} q, \quad (1.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (x_y + \nu x_x) + \frac{h^2}{3!} \left\{ \frac{\nu}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \right. \\ & \left. + (1+\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \left(\frac{1}{2} + \nu \right) \Delta x_x - \Delta x_y - \frac{\partial^2 x_y}{\partial x^2} \right\} + \\ & + O(h^4) = -\frac{h^2}{12D} q. \quad (1.27) \end{aligned}$$

从方程组(1.25)、(1.26)、(1.27)中消去 x_x, x_y 即得:

$$\Delta \Delta w + O(h^4) = \frac{q}{D}. \quad (1.28)$$

由此可见,有限单元法得到的节点平衡方程组等价于薄板小挠度微分方程式的差分方程,其截断误差的数量级为步长 h 的四次方。

对于边界条件的满足程度可作类似的讨论,其结论如下:

C_w, C_M 上的边界条件是预先指定满足的。

C_α 上的边界条件是变分方程的自然边条件。误差为 $O(h^2)$ 。

C_R 上的边界条件也是变分方程的自然边条件。误差的量级为 $O(h)$ 。

从以上的讨论来看,本文建议的有限单元法对周边简支的情形收敛最快。

对四边简支及四边固定的正方形薄板,在均布载荷作用下,用有限单元法求得的中点挠度与弯矩的数值分别列于表1.1与表1.2中,计算时取 $\nu = 0.3$ 。

表1.1 四边简支的方板受均布载荷作用

网 格	节 点 数	中点挠度 wD/qL^4	中点弯矩 M/qL^2
2×2	9	0.004404	0.05676
4×4	25	0.004162	0.04159
6×6	49	0.004070	0.04749
准 确		0.004062	0.0479

表1.2 四边固定的方板受均布载荷作用

网 格	节 点 数	中点挠度 wD/qL^4	中点弯矩 M/qL^2	固定边中点弯矩 M/qL^2
2×2	9	0.001987	0.01771	-0.06982
4×4	25	0.001196	0.03409	-0.03622
6×6	49	0.001261	0.02394	-0.05854
准 确		0.00126	0.0231	-0.0513

表中所列数值表明收敛速率是高的,用 6×6 的网格就能得到满意的结果。但是收敛的趋势不是单调的,不能估计准确解的界限。产生这种现象的原因是精确的挠度函数 $w(x,y)$ 只使泛函 $\Pi(w)$ 取逗留值,而不是极小值。因此总广义刚度矩阵也不是正定的,求解时应注意选择适当的解法。

II、在船坞底板计算中的应用

本文所提出的混合型单元体已在两个船坞底板计算中应用。

第一个船坞是排水分离式。坞底板分中板与边板两种，均视为四边自由的弹性基础板，并认为基础服从“温克尔”假定。龙骨墩上的载荷当作均匀分布，以 45° 扩散角扩散至底板中面。

中板平面尺寸为6米 \times 15米，厚1.2米，单元体划分方式取6 \times 10网格。边板平面尺寸为8米 \times 15米，厚1.2米，取8 \times 10网格。两种板都要求计算出各种可能情形下的挠度、弯矩、扭矩及剪力的最大、最小值包络。

第二个船坞是分段浮体式。每段的坞墙与底板连成一整体，底板是双层组合式结构，现将其平均化为一弹性基础上的正交各向异性板。在分段处的边界当作自由边处理。坞墙中面与底板中面的交线当作“刚性边”，即该边只能像刚体一样沉陷。另外，忽略了坞墙的抗扭刚度，把作用于墙上的各种载荷对“刚性边”的力矩直接看作是作用于底板边缘的分布弯矩。底板划分成8 \times 10个单元体。要求提供的结果与第一个问题相同。

这两个问题均在我系121机上计算。程序用该机算法语言（以ALGOL—60为基础）编写。为了节约内存，我们采取了以下措施。

将每一问题都分解为四种情况的迭加：

1. 对 x, y 轴均对称的情况；
2. 对 x 轴对称，对 y 轴反对称的情况；
3. 对 x 轴反对称，对 y 轴对称的情况；
4. 对 x, y 轴均反对称的情况。

对于每一种情况都只需计算四分之一块板，这样虽然程序复杂一些，但却能大量节约内存。

在程序中，未知数全部自动编号，数据中只需提供 x 方向和 y 方向单元体划分数。在 C_w, C_M 上边界条件的处理是在方程组形成之前和形成过程中自动进行。所以凡可以由边界条件消去的未知数均不出现在最后的方程组中。

为了进一步节约存贮单元，系数矩阵采用变半带宽存贮法。系数矩阵存入磁鼓中备用，求解时再轮流调入内存。

程序输出的主要结果如下：

1. 对于每一种龙骨墩载荷分布，打印节点挠度、弯矩及单元体中点的扭矩、剪力。（混合型单元体由于以 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 为广义节点位移，所以节点弯矩 M_x, M_y 有唯一确定的值，这是与普通位移法单元体很不同的地方）。
2. 最后打印上述各物理量的最大、最小值包络及相应的工况。
3. 对于第二个问题还输出门式吊车在各个位置的结果，以及由龙骨墩载荷所

得包络与门式吊车所得包络迭加的总包络。

数值结果举例。

1. 混合型单元体结果与差分法结果的比较。

分离式船坞底板(中板)取 6×10 网格,每一龙骨墩均受210吨载荷,按 $E = 2.0 \times 10^6$ 吨/米², $\nu = \frac{1}{6}$, $k = 4000$ 吨/米³计算。节点挠度值列在图2.1中,其中括号内的数值是我系计算数学教研室提供的差分法结果,差分法网格划分与有限单元法相同。两种方法计算的挠度的最大相对偏差还不到百分之一。

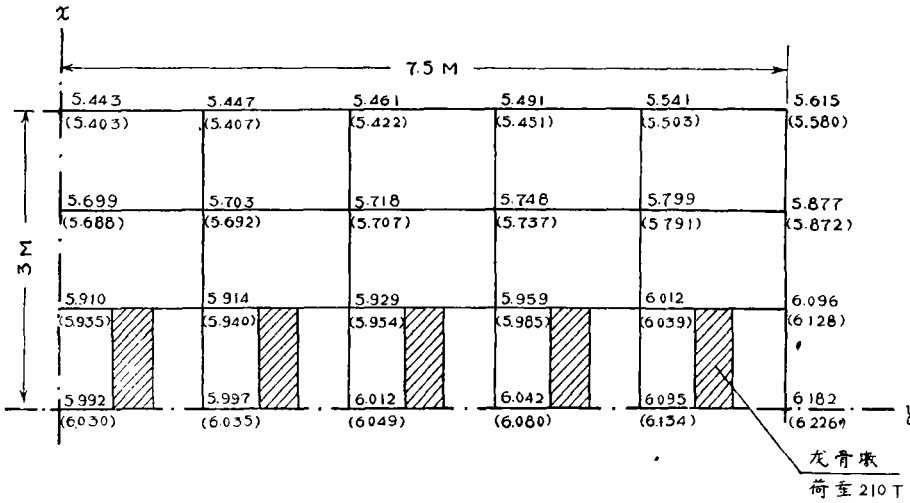


图2.1 分离式船坞底板节点挠度值(mm)
括号中的数值是差分法成果

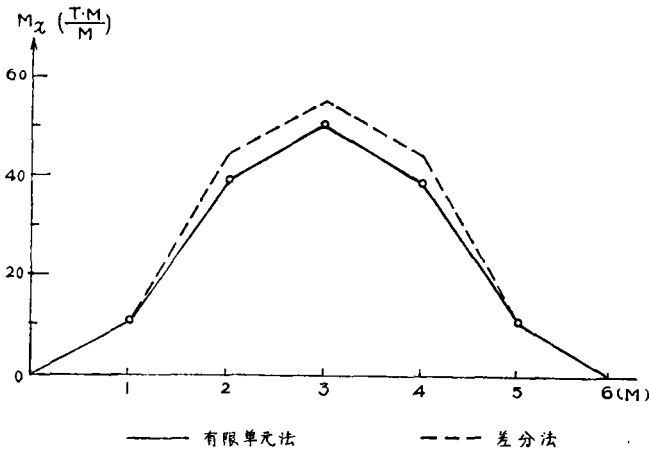


图2.2 中横剖面 M_x 比较

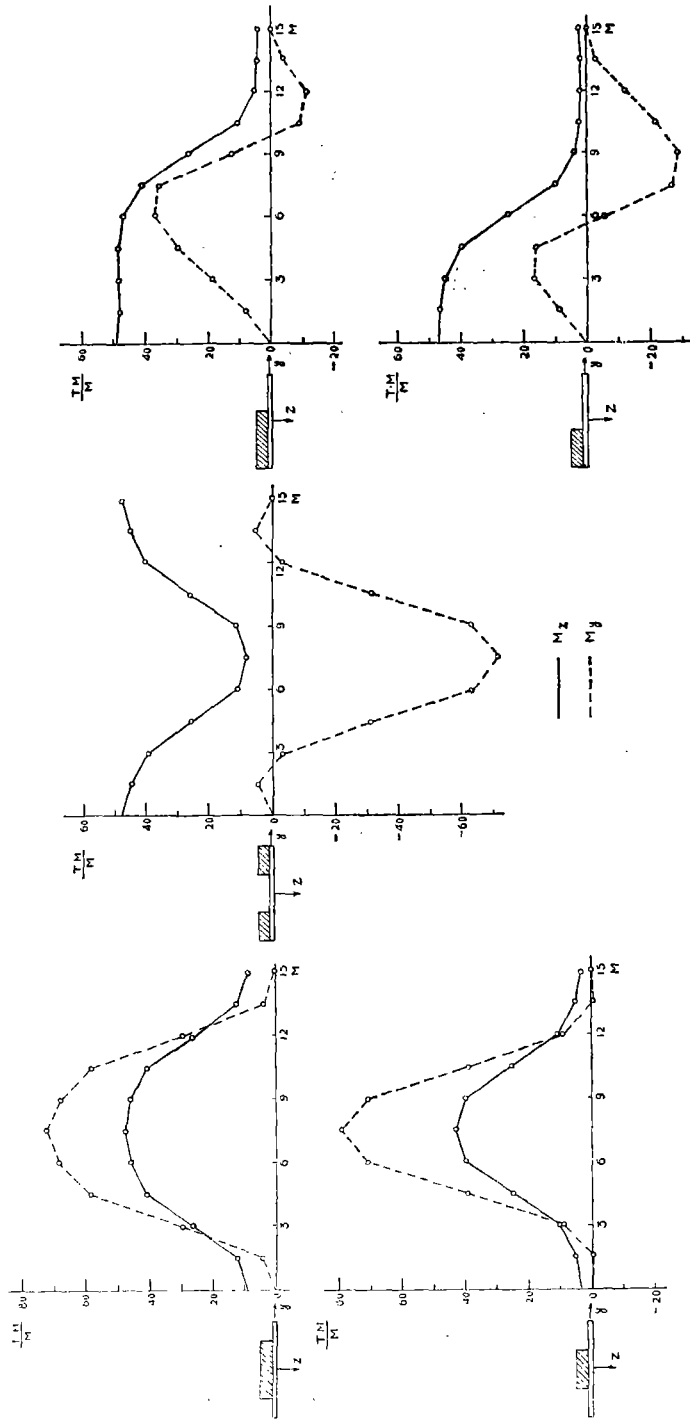


图2.3 中板中縱剖面弯矩分布

图2.2画出了底板中横剖面的弯矩分布。有限单元法计算的结果大体上比差分法略小。

2. 分离式船坞底板(中板)中纵剖面弯矩分布,

图2.3绘出了几种主龙骨墩布置情况下的弯矩分布。可以看出 M_y 对龙骨墩载荷分布情况较为敏感, 而 M_x 则具有明显的局部性特点。图中弯矩分布都用直线连成而未经光滑处理, 以便显示由这种单元体所得结果的原来面目。

计算中采用了温克尔弹性基础假定, 所以可以出现负(向下)基础反力。由于设计要求中已对负反力大小作了限制性的规定, 所以对这种情况就未作进一步的修正计算。

船坞计算工作是分别与交通部第四航务工程局设计研究院、广东省航运局水运规划设计院共同进行的, 对他们的帮助在此表示衷心的感谢。

附录 广义刚度矩阵

弹性基础板的广义刚度矩阵 $K_0 = [K_{ij}]_{12 \times 12}$, 其元素表达如下:

$$K_{1,1} = K_{2,2} = K_{3,3} = K_{4,4} = \frac{D_{xy}}{ab} + 60\lambda,$$

$$K_{1,2} = K_{2,3} = K_{3,4} = K_{1,4} = -\frac{D_{xy}}{ab} + 30\lambda,$$

$$K_{1,3} = K_{2,4} = \frac{D_{xy}}{ab} + 15\lambda,$$

$$K_{1,5} = K_{2,6} = K_{3,7} = K_{4,8} = -\frac{b}{3a} D_x - \frac{a}{3b} D_1 - 16a^2\lambda,$$

$$K_{1,6} = K_{2,5} = K_{3,8} = K_{4,7} = -\frac{b}{6a} D_x + \frac{a}{3b} D_1 - 8a^2\lambda,$$

$$K_{1,7} = K_{2,8} = K_{3,5} = K_{4,6} = \frac{b}{6a} D_x + \frac{a}{6b} D_1 - 7a^2\lambda,$$

$$K_{1,8} = K_{2,7} = K_{3,6} = K_{4,5} = \frac{b}{3a} D_x - \frac{a}{6b} D_1 - 14a^2\lambda,$$

$$K_{1,9} = K_{2,10} = K_{3,11} = K_{4,12} = -\frac{b}{3a} D_1 - \frac{a}{3b} D_y - 16b^2\lambda,$$

$$K_{1,12} = K_{2,11} = K_{3,10} = K_{4,9} = \frac{b}{3a} D_1 - \frac{a}{6b} D_y - 8b^2\lambda,$$

$$K_{1,11} = K_{2,12} = K_{3,9} = K_{4,10} = \frac{b}{6a} D_1 + \frac{a}{6b} D_y - 7b^2\lambda,$$

$$K_{1,10} = K_{2,9} = K_{3,12} = K_{4,11} = -\frac{b}{6a} D_1 + \frac{a}{3b} D_y - 14b^2\lambda,$$

$$K_{5,5} = K_{6,6} = K_{7,7} = K_{8,8} = -\frac{4ab}{9} D_x + \frac{8a^3}{45b} H + \frac{128}{21} a^4\lambda,$$

$$K_{5,8} = K_{7,8} = -\frac{2ab}{9} D_x - \frac{8a^3}{45b} H + \frac{64}{21} a^4 \lambda,$$

$$K_{5,7} = K_{6,8} = -\frac{ab}{9} D_x - \frac{7a^3}{45b} H + \frac{62}{21} a^4 \lambda,$$

$$K_{5,8} = K_{6,7} = -\frac{2ab}{9} D_x + \frac{7a^3}{45b} H + \frac{124}{21} a^4 \lambda,$$

$$K_{9,9} = K_{10,10} = K_{11,11} = K_{12,12} = -\frac{4ab}{9} D_y + \frac{8b^3}{45a} H + \frac{128}{21} b^4 \lambda,$$

$$K_{9,12} = K_{10,11} = -\frac{2ab}{9} D_y - \frac{8b^3}{45a} H + \frac{64}{21} b^4 \lambda,$$

$$K_{9,11} = K_{10,12} = -\frac{ab}{9} D_y - \frac{7b^3}{45a} H + \frac{62}{21} b^4 \lambda,$$

$$K_{9,10} = K_{11,12} = -\frac{2ab}{9} D_y + \frac{7b^3}{45a} H + \frac{124}{21} b^4 \lambda.$$

$$K_{5,9} = K_{6,10} = K_{7,11} = K_{8,12} = \frac{4b^3}{45a} D_x + \frac{4a^3}{45b} D_y - \frac{4ab}{9} D_1 + \frac{64}{15} a^2 b^2 \lambda,$$

$$K_{5,10} = K_{6,9} = K_{7,12} = K_{8,11} = \frac{7b^3}{90a} D_x - \frac{4a^3}{45b} D_y - \frac{2ab}{9} D_1 + \frac{56}{15} a^2 b^2 \lambda,$$

$$K_{5,11} = K_{6,12} = K_{7,9} = K_{8,10} = -\frac{7b^3}{90a} D_x - \frac{7a^3}{90b} D_y - \frac{ab}{9} D_1 + \frac{49}{15} a^2 b^2 \lambda,$$

$$K_{6,12} = K_{6,11} = K_{7,10} = K_{8,9} = -\frac{4b^3}{45a} D_x + \frac{7a^3}{90b} D_y - \frac{2ab}{9} D_1 + \frac{56}{15} a^2 b^2 \lambda,$$

式中

$$H = D_1 + 2D_{xy},$$

$$\lambda = \frac{ab}{135} k_0.$$

其他元素可由对称性得到。

对各向同性板，只要取 $D_x = D_y = D$ ， $D_1 = \nu D$ ， $D_{xy} = \frac{1-\nu}{2} D$ ，即可得到相应的广义刚度矩阵。

参 考 文 献

- [1] 舒德坚, 施振东: 弹性薄板的广义变分原理及其应用, 北京航空学院学报, 1, 27-40, 1957.
- [2] Jones, R. E., A Generalization of the Direct-stiffness Method of Structural Analysis. AIAA J. 2, 5, 1964.
- [3] Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, London 1971.