条件独立随机变量序列与重随机布阿松序列

数学力学系　戴永隆

§1 引言与摘要

设 (Ω,F,P) 是给定的概率空间，$\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为定义在 (Ω,F,P) 上的随机变量，记 $\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 为使 $(\xi_1\cdots\xi_n)$ 可测的最小 σ 代数。设 F_0 是 F 的子 σ 代数，假定对任意 $A_1\in\sigma(\xi_1),\cdots,A_n\in\sigma(\xi_n)$，$a.e$ 成立：

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|F_0)=P(A_1|F_0)\cdots\cdots P(A_n|F_0) \tag{1}$$

则称 $\xi_1\cdots\xi_n$ 对 F_0 条件独立，记作 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)\ c.i|F_0$。如果随机变量序列 $\xi_1,\cdots,\xi_n\cdots$ 之中任意有限个对 F_0 条件独立，则称 $\{\xi_n\ n\geqslant 1\}$ 为对 F_0 是条件独立的，记作 $(\xi_n,n\geqslant 1)\ c.i|F_0$。

任给 (Ω,F,P) 上的非负随机变量序列 $\{l_n\ n\geqslant 1\}$，设 $F_0=\sigma(l_n,n\geqslant 1)$ 是使 $(l_n,n\geqslant 1)$ 可测的最小 σ 代数，如果 $N_1,N_2,\cdots,N_n,\cdots$ 是 (Ω,F,P) 上定义的、取非负整数值的随机变量序列，假定对任意的正整数 m 及 $n_1,\cdots\cdots,n_m$，以及任意的非负整数 $k_1,\cdots,k_m$，$a.e$ 成立：

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{n_j}=k_j\}\ |F_0\right)=\prod_{j=1}^{m}\frac{e^{-l_j}}{k_j!}l_j^{k_j} \tag{2}$$

则称 $\{N_n\ n\geqslant 1\}$ 是重随机布阿松序列，$(l_n,n\geqslant 1)$ 称为相应的强度序列，从(2)式见到 $\{N_n,n\geqslant 1\}\ c.i|F_0$。

上面是本文所要用到的两个基本定义，前一个定义是众所周知的，第二个定义来源于随机点过程的理论（例如见〔5〕）。

关于重随机布阿松过程（序列）的概念，见〔1〕）。首先由 D.R.Cox 引进[1]。从1976年出版的新书〔6〕以及书后所列举的参考文献中可以了解国外近几年关于这方

本文1978年8月23日收到。

面的研究概况。

本文的目的是：首先讨论条件独立随机变量序列的某些性质，然后应用这些性质于重随机布阿松序列获得一些相应的结果。最后讨论几个简单的例子，从这些例子可见，将重随机布阿松序列与其它随机过程一些已有的知识结合起来可以解决某些实际问题。

§2 条件独立随机变量序列的性质

A、关于条件独立随机变量序列的收敛性在〔B〕中有所讨论，首先将〔13〕中几个主要结果列举如下：

引理 1 设 $\{\xi_n\ \ n\geqslant 1\}$ $c.i|F_0$ $S\epsilon\sigma(\xi_n,\xi_{n+1},\cdots)$（即$S$是'尾巴'事件），$n\geqslant 1$，则

$$P(w:P(S|F_0)=0)+P(w:P(S|F_0)=1)=1 \tag{3}$$

即$P(S|F_0)$几乎处处取0或1的值．

引理 2 假定 $\{\xi_n, n\geqslant 1\}$ $c.i|F_0$，c 为任意正实数，令 $F_n=\{w:|\xi_n|<c\}$ $(n=1,2,\cdots)$再令：

$$A=\{w:\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n收敛\}$$

A_1 是下列三级数同时收敛的集合：

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E(\chi_{\Omega-F_n}|F_0)$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E(\chi_{F_n}\xi_n|F_0)$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}D(\chi_{F_n}\xi_n|F_0)$

其中χ_A是A的示性函数，$D(\chi_{F_n}\xi_n|F_0)$是$\chi_{F_n}\xi_n$的条件方差，则有

$$P(A)=P(A_1)=P(A\cap A_1) \tag{4}$$

引理 3 设 $\{\xi_n, n\geqslant 1\}$ $c.i|F_0$，且 $E(\xi_n|F_0)=0(a,e)$，$(n\geqslant 1)$，若令

$$A=\{w:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}D(\xi_n|F_0)<\infty\}$$

$$A_1=\{w:\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i 收敛于 0\}$$

则

$$P(A)=P(A\cap A_1)\ 即\ (A\subseteq A_1)\ (a,e)$$

（引理1，2，3的证明，分别见〔13〕中定理2，3，4）。

B、平稳序列条件均值的估计问题。

现设$\{\xi_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$是$(\Omega, F, P)$上的随机变量序列，$F_0$是$F$的子$\sigma$代数，且$\{\xi_n, n=0, \pm 1, \cdots\}c.i|F_0$，令

$$\eta_n = E(\xi_n|F_0) \qquad n=0 \quad \pm 1, \cdots \tag{5}$$

则$\{\eta_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$亦是$(\Omega, F, P)$上的随机变量序列，称为$\{\xi_n \quad n=0, \pm 1 \cdots\}$的条件均值序列。

今设$\{\xi_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$是弱平稳序列，且$E(\xi_n)=m$ $(n=0, \pm 1, \cdots)$以及$r_{K-j}=Cov(\xi_K, \xi_j)$ $(k, j=0, \pm 1, \cdots)$，并有谱展式：

$$r_K = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iKx} dF(x) \quad r=0, \pm 1, \cdots \tag{6}$$

于是$F'(x)$几乎处处存在。

在上面的假定之下，我们有：

$$E(\eta_n) = E(E(\xi_n|F_0)) = m \qquad n=0, \pm 1, \cdots \tag{7}$$

以及当$k \neq j$时，由于$\{\xi_n, n=0, \pm 1, \cdots\}c.i|F_0$，所以：

$$\begin{aligned} Cov(\eta_K, \eta_j) &= E(\eta_K, \eta_j) - m^2 = E(E(\xi_K|F_0)E(\xi_j|F_0)) - m^2 \\ &= E(E(\xi_k\xi_j|F_0)) - m^2 = E(\xi_k\xi_j) - m^2 \\ &= cos(\xi_k \quad \xi_j) \qquad k \neq j \end{aligned} \tag{8}$$

然而当$k=j$时，则只能得到：

$$Var(\eta_K) = E(\eta_K - m)^2 = E(\xi_K - m)^2 - E(\xi_K - \eta_K)^2 = r_0 - c_K \tag{9}$$

其中令$c_K = E(\xi_K - \eta_K)^2$, $k=0, \pm 1 \cdots$ 如果c_K是不依赖于K的常数，则由(7)、(8)、(9)知$\{\eta_n \quad n=0, \pm 1, \cdots\}$亦是弱平稳序列，然而由目前的条件得不出$c_K$是常数的结论。

由(8)、(9)知，如果$\{\xi_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$的协方差矩阵是$R^{(n)}$，$R^{(n)} = \{r_{k-j}\}$ $(1 \leqslant k, j \leqslant n)$，则$\{\eta_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$的协方差矩阵就是$R^{(n)} - C^{(n)}$，其中$C^{(n)}$是对角形矩阵，对角线上第$k$个元是$c_k$，$1 \leqslant k \leqslant n$.

平稳序列的一个重要问题是线性估计问题。例如线性过滤，予测和内扦问题，对于目前考虑的两个序列$\{\xi_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$，$\{\eta_n, n=0 \quad \pm 1, \cdots\}$，我们首先考虑如下的估计问题。

设$\{\xi_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$已被观测，$m$ $R^{(n)}$及$C^{(n)}$为已知，如何估计ξ_k的条件均值$\eta_k = E(\xi_k | F_0)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$？对于有最小均方误差的线性估计问题是容易解决的，令

$$\eta_K^* = m + \sum_{j=1}^{n} b_{K\cdot j}(\xi_j - m) \qquad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{10}$$

为其线性估计，欲使$E(\eta_K - \eta_K^*)^2$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$为最小，则系数矩阵$B^{(n)} = \{b_{K\cdot j}\}$ $(1 \leqslant k, j \leqslant n)$必须满足条件：

$$B^{(n)} = (R^{(n)} - C^{(n)})(R^{(n)})^{-1} \tag{11}$$

(11)式的推导可见(〔12〕$p54$)，并注意$E(\eta_K \xi_j) = E(\eta_K \eta_j)$，如将估计(10)的均方误差矩阵记为

$$G^{(n)} = \{cos(\eta_K - \eta_K^*, \eta_j - \eta_j^*)\} \quad 1 \leqslant k, j \leqslant n$$

则有(见〔12〕$p.54$)：

$$\begin{aligned} G^{(n)} &= (R^{(n)} - C^{(n)}) - (R^{(n)} - C^{(n)})(R^{(n)})^{-1}(R^{(n)} - C^{(n)}) \\ &= C^{(n)} - C^{(n)}(R^{(n)})^{-1}C^{(n)} \end{aligned} \tag{12}$$

上面所述可认为是线性估计的简单事实，下面我们将进一步实际算出序列$\{\xi_K, 1 \leqslant k \leqslant n\}$最末一个条件均值估计$\eta_n^*$的均方误差，即求$E(\eta_n - \eta_n^*)^2$，如令$G^{(n)} = \{g_{K,j}\}$ $(1 \leqslant k, j \leqslant n)$，则显然$g_{nn} = E(\eta_n - \eta_n^*)^2$，由(12)式展开，我们得：

$$g_{nn} = E(\eta_n - \eta_n^*)^2 = c_n - c_n^2 \frac{|R^{(n-1)}|}{|R^{(n)}|} \tag{13}$$

其中$|R^{(n)}|$表$R^{(n)}$的行列式，上式之所以成立是因为$(R^{(n)})^{-1}$的第n行n列的元素就是$|R^{(n-1)}|/|R^{(n)}|$

特别，当$n \to \infty$时，$|R^{(n-1)}|/R^{(n)}|$的极限可以求出(见〔5〕定理2)：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|R^{(n-1)}|}{|R^{(n)}|} = \frac{1}{2\pi} exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} logF'(x)dx\right) \tag{14}$$

其中$F(x)$由(6)式确定。

从(13)、(14)式，如果c_n有极限存在，则$\lim\limits_{n \to \infty} E(\eta_n - \eta_n^*)^2$也有极限存在。

综上所述，得到如下结果：

引理 4　设$\{\xi_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ $c.i|F_0$，且是弱平稳序列，记$E(\xi_n) = m$，$(n = 0, \pm 1, \cdots)$及$r_{K-j} = cov(\xi_K, \xi_j)$ $(k, j = 0, \pm 1, \cdots)$，并有谱展式：

$$r_K = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iKx} dF(x) \quad k = 0, \pm 1, \cdots$$

又记$\eta_K = E(\xi_K | F_0)$，$c_K = E(\xi_K - \eta_K)^2$ $(k = 0, \pm 1, \cdots)$，如果$(\xi_K, 1 \leqslant k \leqslant n)$已被观测，则(10)、(11)是$\{\eta_K, 1 \leqslant k \leqslant n\}$的最小均方误差线性估计，最小均方误差矩阵由(12)式确定，特别有：

$$E(\eta_n-\eta_n^*)^2=c_n-c_n^2\,|R^{(n-1)}|\Big/|R^{(n)}|$$

其中 $|R^{(n)}|$ 是 $R^{(n)}$ 的行列式之值，而 $R^{(n)}$ 是 $\{\xi_k,\ 1\leqslant k\leqslant n\}$ 的协方差矩阵，如果还有子序列 n_k，使 $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k}=c$，则

$$\lim_{k\to\infty} E(\eta_{n_k}-\eta_{n_k}^*)^2=c-\frac{c^2}{2\pi}exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log F'(x)dx\right).$$

C、平稳序列条件均值的预测及内扦问题。

仍设 $\{\xi_n,\ n=0,\ \pm1,\cdots\}$ $c.i|F_0$ 且是弱平稳序列，m、$\{r_{k-j}\}$，$\{c_n\}$，$F(x)$ 等记号都如上一段所述。

现设 $\{\xi_{-k},\ 1\leqslant k\leqslant n\}$ 被观测，假定 $s>0$ 是正整数，令

$$\eta_s^*=m+\sum_{k=1}^{m}\beta_k\xi_{-k} \tag{15}$$

是 η_s 根据观测结果 $\{\xi_{-k},\ 1\leqslant k\leqslant n\}$ 所获得的最小均方误差线性估计，则有关系：

$$E(\xi_s-\eta_s^*)^2=E(\xi_s-\eta_s)^2+E(\eta_s-\eta_s^*)^2$$

即

$$E(\eta_s-\eta_s^*)^2=E(\xi_s-\eta_s^*)-c_s \tag{16}$$

然而，c_s 并不依赖于 $\{\xi_{-k},\ 1\leqslant k\leqslant n\}$，因此欲使误差 $E(\eta_s-\eta_s^*)^2$ 最小，充分而必要的是使 $E(\xi_s-\eta_s^*)^2$ 最小、因此：如将 η_s^* 看成是 ξ_s 依据观测结果 $\{\xi_{-k},\ 1\leqslant k\leqslant n\}$ 的一个线性估计，它也是均方误差最小的，所以有结论：当观测 $\{\xi_{-k},\ 1\leqslant k\leqslant n\}$ 已经出现时，ξ_s 与 $\eta_s=E(\xi_s|F_0)$ 的最小均方误差线性估计是一致的，然而均方误差却不相同，由(16)确定。

所以，对于条件独立的平稳序列，条件均值的预测问题，化成了平稳序列本身的预测问题，而平稳序列本身的预测问题是众所周知的了，有如下的结果：

引理 5 设 $\{\xi_n,\ n=0,\ \pm1,\ \cdots\}$ $c.i|F_0$，且是平稳序列，又记 $E(\xi_n)=m$，$r_{k-j}=cov(\xi_k,\xi_j)(n,k,j=0,\pm1,\cdots)$，并有谱展式：

$$r_k=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}\,dF(x)\quad k=0,\pm1,\cdots$$

又记 $\eta_k=E(\xi_k|F_0)$，$c_k=E(\xi_k-\eta_k)^2$，$(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$，如果 $(\xi_{-k},\ 1\leqslant k\leqslant n)$ 已被观测，$s\geqslant o$ 是非负整数，则：

1) η_s 根据观测 $\{\xi_{-k},\ 1\leqslant k\leqslant n\}$ 的最小均方误差线性估计 $\eta_s^*(n)$ （注意：

这里的 $\eta_S^*(n)$ 与上文的 η_S^* 是一致的，加上(n)表示观测值的个数。)与ξ_s的最小均方误差线性预测 $\xi_S^*(n)$是一致的，而均方误差有关系：

$$E(\eta-\eta_s^*(n))^2=E(\xi_s-\xi_s^*(n))^2-c_s$$

2）当$n\to\infty$时，我们有：

$$\lim_{n\to\infty} E(\eta_s-\eta_s^*(n))^2=(1+p_1^2+\cdots p_s^2)exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log2\pi F'(x)dx\right) \tag{17}$$

其中$\{p_K\}$由下面的关系确定：

$$\left.\begin{aligned} &exp\{(a_1r+\alpha_2r^2+\cdots)\}=1+p_1r+p_2r^2+\cdots\\ &\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}cos\,kxlogF'(x)dx \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

3）对于内扦有相似的结果，如果$\{\cdots\xi_{-1},\xi_1,\cdots\}$被观测，则$\eta_0=E(\xi_0|F_0)$的最小均方误差线性估计如果是$\eta_0^*$，必有：

$$E(\eta_0-\eta_0^*)^2=4\pi^2/\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{F'(x)}-c_0 \tag{19}$$

§3 重随机布阿松序列的性质

A、将上述结果应用于重随机布阿松序列是我们的目的，首先证明几个极限定理。

定理1　设$\{N_n,\ n\geqslant1\}$是重随机布阿松序列，$\{l_n,\ n\geqslant1\}$是相应的强度序列，令

$$A=\{w:\sum_{n=1}^{\infty}N_n<\infty\} \tag{20}$$

$$A_1=\{w:\sum_{n=1}^{\infty}l_n<\infty\} \tag{21}$$

则：

$$P(A)=P(A_1)=P(A\cap A_1) \tag{22}$$

证明　由于$\{N_n,n\geqslant1\}c.i|F_0=\sigma(l_n,n\geqslant1)$，现设$0<c<1$，令$F_n=\{w:|N_n|$

$<e\} = \{w: N_n = 0\}$）因为N_n只取非负整值）。

由于N_n在F_n上恒为零，故

$$E(\chi_{F_n} N_n | F_0) = 0 \qquad (a,e)$$
$$D(\chi_{F_n} N_n | F_0) = 0 \qquad (a,e)$$

$$E(\chi_{\Omega - F_n} | F_0) = \sum_{K=1}^{\infty} P(N_n = k | F_0) = 1 - P(N_n = 0 | F_0) = 1 - e^{-l_n}$$

应用上面的引理2，如令

$$A = \{w: \sum_{n=1}^{\infty} N_n < \infty\}$$

$$A_1' = \{w: \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-l_n}) < \infty\}$$

则

$$P(A) = P(A_1') = P(A \cap A_1') \qquad (a,e)$$

然而，因为 $l_n \geqslant 0$，对任意正数序列 $\{x_n, n \geqslant 1\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - e^{-x_n})$ 的收敛性是等价的。于是 $A = A_1'$。因此定理 1 得证。

定理 2　如定理 1 的条件，A及A_1为(20)，(21)所确定的集合，则有：

1. $P(A|F_0) = 0$，或 1 (a,e)
2. 若令$A_0 = \{w: P(A|F_0) = 1\}$

则

$$P(A) = P(A_0) = P(A_1) = P(A_0 \cap A_1 \cap A) \qquad (23)$$

证明．第一点直接应用引理 1，又因$A_0 \epsilon F_0$，则有

$$\int_{\Omega} E(\chi_A | F_0) P(dw) = \int_{\Omega} \chi_A P(dw) = \int_{A_0} \chi_A P(dw)$$

故$P(A) = P(A_0) = P(A \cap A_0)$，结合定理 1 得(23)。

定理 3　设$\{N_n, n \geqslant 1\}$是重随机布阿松序列，$\{l_n, n \geqslant 1\}$是强度序列，令

$$A = \left\{w: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} l_n < \infty\right\}$$

$$A_1 = \left\{w: \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (N_i - l_i) = 0\right\}$$

则

$$P(A)=P(A\cap A_1) \text{ 即 } A\subset A_1 \quad (a,e) \tag{24}$$

证明　由于$\{N_n,\ n\geq 1\}c\cdot i|F_0(=\sigma(l_n,n\geq 1)$，因此为了应用引理3，需要求$D(N_n-l_n|F_0)$及$E(N_n-l_n|F_0)$。

根据定义（见(2)式）：

$$E(N_n-l_n|F_0)=E(N_n|F_0)-l_n$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}kP(N_n=k|F_0)-l_n$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k!}e^{-l_n}\ l_n{}^K-l_n=l_n-l_n=0 \tag{25}$$

再由(2)式得：

$$E(N_n{}^2|F_0)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P(N_n=k|F_0)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{1}{k!}e^{-l_n}\ l_n{}^K=l_n{}^2+l_n \tag{26}$$

由(25)、(26)式得

$$D(N_n-l_n|F_0)=E\left\{\left[(N_n-l_n)^2-E(N_n-l_n|F_0)\right]|F_0\right\}$$

$$=E\Big((N_n-l_n)^2|F_0\Big)=l_n \tag{27}$$

将引理3应用于序列$\{N_n-l_n,\ n\geq 1\}$得定理3的结论。

B、强度序列的估计问题。

如果$\{N_n,\ n=0,\ \pm 1,\cdots\}$是重随机布阿松序列，$\{l_n,\ n=0,\ \pm 1,\cdots\}$是相应的强度序列，假定$\{l_n,\ n=0,\ \pm 1,\cdots\}$又是弱平稳的，并有

$$E(l_n)=m,\ cov(l_K,l_j)=r_{K-j},n,k,\ j=0,\ \pm 1,\cdots \tag{28}$$

$$r_K=\int_{-\pi}^{\pi}e^{iKx}dF(x) \qquad k=0,\ \pm 1,\cdots \tag{29}$$

则$\{N_n,\ n=0,\ \pm 1,\cdots\}$亦是弱平稳序列，而且

$$\left.\begin{aligned}&E(N_n)=m,\ cov(N_K,\ N_j)=r_{K-j}\quad k\neq j,\ n,k,j=0,\ \pm 1\cdots\\&cov(N_K,\ N_K)=r_0+m\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

因此，我们可以应用引理4，5的结果。

定理4　设$\{N_n,\ n=0,\ \pm 1,\cdots\}$是重随机布阿松序列，$\{l_n,n=0,\pm 1,\cdots\}$是相应的强度序列，如果$\{l_n\}$还是弱平稳的，满足（28），（29）。现假定$\{N_K,$

$1\leqslant k\leqslant n$}已被观测，记{l_K，$1\leqslant k\leqslant n$}的最小均方误差线性估计为：

$$l_K^*(n)=m+\sum_{j=1}^{n}b_{K,j}(N_j-m) \tag{31}$$

则　$B^{(n)}=\{b_{K,j}\}\ \{1\leqslant k,j\leqslant n\}$满足：

$$B^{(n)}=R^{(n)}(R^n+M^{(n)})^{-1}=R^{(n)}(R^{(n)}+I_nm)^{-1} \tag{32}$$

其中$R^{(n)}=\{r_{K-j}\}$　$1\leqslant k,j\leqslant n$。$M^{(n)}$是对角线上为常数$m$的对角形矩阵。$I_n$是$n$阶单位矩阵，又其误差协方差矩阵$G^{(n)}=\{g_{K,j}\}(1\leqslant k,j\leqslant n)$是$\Big($其中$g_{K,j}=E(l_K-l_K^*(n))(l_j-l_j^*(n))\Big)$：

$$G^{(n)}=R^{(n)}-R^{(n)}(R^{(n)}+mI_n)^{-1}R^{(n)} \tag{33}$$

特别，有

$$g_{n,n}=E\Big(l_n-l_n^*(n)\Big)^2=r_0-r_0^2\frac{|R^{(n-1)}+mI_{n-1}|}{|R^{(n)}+mI_n|} \tag{34}$$

而当$n\to\infty$时，有极限：

$$\lim_{n\to\infty}E\left(l_n-l_n^*(n)\right)^2=r_0-r_0^2\frac{1}{2\pi}\,exp\left(-\frac{1}{2\pi}\right.$$

$$\left.\int_{-\pi}^{\pi}log\left(\frac{m}{2\pi}+F'(x)\right)dx\right) \tag{35}$$

定理4是引理4的直接结果，但要注意这里的$R^{(n)}$是{$l_K,1\leqslant k\leqslant n$}的协方差矩阵。

定理4实际上是〔5〕中的主要结果之一，我们这理主要说明，定理4可作为引理4这个一般结果的推论而得到，而引理4指出了如何估计条件独立的平稳序列的条件均值。还应当指出，引理4似乎不能由〔5〕中的方法直接得到。

最后，由引理5得到：

定理5　{N_n，$n=0$，$\pm1,\cdots$}与{l_n，$n=0$，$\pm1,\cdots$}的条件如定理4，假定(N_k，$1\leqslant k\leqslant n$)被观测，s是非负整数，则

1）N_n的最优线性予测$N_n^*(n)$与l_n的最小均方误差线性估计是一致的，而均方误差有关系：

$$E\Big(l_s-l_s^*(n)\Big)^2=E\Big(N_s-N_s^*(n)\Big)^2-m$$

2）当$n\to\infty$时，有：

$$\lim_{n\to\infty}E\Big(l_s=l_s^*(n)\Big)^2=(1+p_1^2+\cdots+p_s^2)exp\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}log(m+2\pi F'(x)\Big)dx-m$$其

中 $\{p_K\}$ 由下面的关系确定：

$$exp(a_1r+a_2r^2+\cdots)=1+p_1r+p_2r^2+\cdots$$

$$a_K=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos kx\cdot\log\left(F'(x)+\frac{m}{2\pi}\right)dx$$

3） 如果（$\cdots N_{-1}, N_1,\cdots$）被观测，则$l_0=E(N_0|F_0)$的最小均方误差线性估计$l_0^*$的均方误差是：

$$E(l_0-\overset{*}{l_0})^2=4\pi^2\Big/\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\frac{m}{2\pi}+F'(x)}-m$$

$$=2\pi^4\Big/\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{m+2\pi F'(x)}dx-m$$

§4 重随机布阿松序列的例子

A、设 $\{l_n, n\geqslant 1\}$ 是相互独立的非负随机变量序列，则$(N_n,n\geqslant 1)$亦是相互独立随机变量序列。于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}l_n$（及级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}l_n$）或者以概率为1收敛，或者以概率为1发散。所以定理1（及定理3）中的Λ或者有$P(\Lambda)=1$，或者$P(\Lambda)=0$。

例如：当l_n遵从布阿松分布$P(l_n=k)=\frac{1}{k!}e^{-\lambda n}\lambda_n^K$，$k=0,1,\cdots$则$\sum_{n=1}^{\infty}l_n<\infty\,(a,e)$当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n<\infty$（由通常的三级数定理）。所以$\sum_{n=1}^{\infty}N_n<\infty(a,e)$当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n<\infty$。如令$\lambda_n=1$（对一切$n$）。则$\sum_{n=1}^{\infty}N_n=\infty(a,e)$。然而这时容易验证，它满足中心极限定理的条件。即若令$S_n=\sum_{K=1}^{\infty}N_K$，则$E(S_n)=0$，$VarS_n=2n$，应用中心极限定理就有：

$$P\left(\frac{S_n-n}{\sqrt{2n}}<x\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

特别，取$x=0$，则上式给出：

$$P(S_n<n)\to\frac{1}{2}$$

即得：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{n^h}{h!}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^K}{k!}\right)e^{-n}\right)e^{-n}=\frac{1}{2}\qquad(36)$$

$\left(\text{因为}P(S_n<n)=\sum\limits_{K=0}^{n-1}P(S_n=k)=\sum\limits_{h=0}^{\infty}P(l_1+\cdots+l_n=h)\cdot P(S_n=k\,|\,l_1+\cdots+l_n=h)\right)$

同理，如果强度序列 $(l_n\ n\geqslant1)$ 是贝努利序列，$P(l_n=0)=\frac{1}{2}$，$P(l_n=1)=\frac{1}{2}$，则可用上述方法证明 $P(S_n<\frac{n}{2})\rightarrow\frac{1}{2}(n\rightarrow\infty)$，即得：

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\sum_{K=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{1}{k!}h^K/e^h\right)=\frac{1}{2} \tag{37}$$

(36)、(37)是用概率方法解决分析问题的例子，如果用通常数学分析的办法来证明(36)、(37)，至少不是很显然的。

B、如果强度序列$\{l_n,n=0,1\cdots\}$是马尔科夫链则$\{N_n,n\geqslant0\}$就不一定是马尔科夫链了。

设l_n的状态空间是 $0\leqslant i\leqslant s$，i是整数，初始条件为$p_h=1\ \ 0<h<s$，转移概率是：

$$p_{i,i+1}=p,\ p_{i,i-1}=q=1-p.\quad 0<i<S\quad p_{00}=p_{ss}=1\quad 0<p<1.$$

这是有两个吸收壁的随机游动。对于这个例子，容易证明：

$$A=\left\{w:\sum_{n=0}^{\infty}l_n<\infty\right\}=\left\{w:\sum_{n=0}^{\infty}N_n<\infty\right\}=\left\{w:\lim_{n\rightarrow\infty}l_n=0\right\}$$

从而根据著名的输光问题（例如，可见〔13〕）：

$$P(A)=\left(\left(\frac{q}{p}\right)^i-\left(\frac{q}{p}\right)^s\right)\Big/\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^s\right)$$

下设$\{l_n,n\geqslant0\}$是有状态空间$I=(0,1,\cdots)$为正常返类的马尔科夫链，$\{\pi_i,i\in I\}$是平稳分布，$\sum\limits_{i\in I}\pi_i=1$。又设$f(i)\ (i\in I)$是定义于$I$上的任意非负函数，则按〔1〕§15定理2有：

$$P\left(\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{n}f(l_K)=\sum_{j\in I}\pi_i f(j)\right)=1 \tag{38}$$

今假定$\{N_n,n\geqslant0\}$是以$\{f(l_n)n\geqslant0\}$为强度序列的重随机布阿松序列，由定理3，如令

$$A=\left\{w:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}f(l_n)<\infty\right\}$$

$$A_1=\left\{w:\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(N_k-f(l_K))\rightarrow0\right\}$$

则$P(\Lambda)=P(\Lambda\cap\Lambda_1)$. 然而由(38), $P(\Lambda_1)=1$的充要条件是 $\sum_{j\in I}\pi_j f(j)<\infty$. 从而推得:

推论 对于有正常返类的马氏链,如以概率为1成立 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n_2}f(l_n)<\infty$,则 $\sum_{j\in I}\pi_j f(j)<\infty$.

C、如果$\{l_n,\ n\geqslant 1\}$是Galton－Watson分支过程,令$P(l_1=k)=p_K$,$0\leqslant k<\infty$。k是整数。l_1的母函数是$f(s)=\sum_{K=0}^{\infty}p_K s^K$。则$l_n$的母函数是$f_n(s)=\sum_{K=0}^{\infty}P(l_n=k)s^k=f(f_{n-1}(s))$, $|s|\leqslant 1$(参看[7])。

如果$\{N_n, n\geqslant 1\}$是以$\{l_n,\ n\geqslant 1\}$为强度序列的重随机布阿松序列,则有

$$P(N_n=k)=E\left(\frac{1}{k!}e^{-l_n}l_n^K\right)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}e^{-j}j^K P(l_n=j)$$

所以N_n的母函数是,

$$g_n(s)=\sum_{K=0}^{\infty}P(N_n=k)s^K=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{-j}j^K P(l_n=j)s^K$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-j}e^{js}P(l_n=j)=f_n(e^{(s-1)})$$

对于这样一个重随机布阿松序列,当$E(l_1)=\sum_{K=0}^{\infty}kp_k\leqslant 1$时,$P(\wedge)=P\left(\sum_{n=1}^{\infty}l_n<\infty\right)=P\left(\sum_{n=1}^{\infty}N_n<\infty\right)=1$。如果$E(l_1)>1$,则$P(\Lambda)$的值是方程$s=f(s)$的解$(s>0)$。

参考文献

〔1〕 Chung, K. L., *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities* Springer, Berlin, 1960.

〔2〕 Cox, D. R., *Soma Statistical Models Conneted with Series of Events*, *J. R. Statist Soc.*, *B.* 17 (1955), 129—164.

〔3〕 Cox, D. R. and Lewis, P. A. W., *The Statistical Analysis of Series of Events*, London: Methuon and New York: Barnes and Noble, 1966.

〔4〕 Grandell, J., *Statistical Inference for Dobly Stochastic Poisson Processes*, *Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications*, Ed. by Lewis, P. A. W., Wiley-Interscience, NewYork, 1972, 90—121.

〔5〕 Grandell, J., *On the estimation of intensties in a Stochastic Sequence*, *J. Appl. Prob.*, 9 (1972), 542—556.

〔6〕 Grandell, J., *Doubly Stochastic Poisson Processes*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 529, Spring-verlag, Berlin, 1976.

〔7〕 Harris, T. E., *The Theory of Branching Processes*, Springer, Berlin, 1963.

〔8〕 Kingman, J. F. C., *On Doubly Stochastic Poisson Processes*, *Proc. Cormb. Phil. Soc.*, 60 (1964), 923—932.

〔9〕 Rudemo, M., *Dobly Stochastic Poisson Processes and Process Control*, *Advance. Appl. Prob.* 4 (1972), 318—338.

〔10〕 Serfozo. R. F., *Conditional Poisson Processes*, *J. Appl. Prob.*, 9 (1972), 288—302.

〔11〕 Serfozo, R. F., *Processes with Conditional Stationary Indenpondent Inercment*, *J. Appl. Prob.*, 9 (1972), 303—315.

〔12〕 Snyder, D. L., *Random Point Processes*, Wiley, New York, 1975.

〔13〕 戴永隆，条件独立級数的收斂性，中山大学学报（自然科学版），(1962), 2, 1—3。

〔14〕 中国科学院数学研究所編著，离散时間系統濾波的数学方法，国防工业出版社，北京，1975。