关于重随机布阿松过程的某些研究

数学力学系　戴永隆

1、引　言

随机点过程的理论，近年来已成为概率论与数理统计的一个重要分支。

本文讨论的是一种特殊的随机点过程：重随机布阿松过程，并获得了几个理论方面的结果。下面先引进一些常用的述语和记号，较为详细地叙述重随机布阿松过程的定义。

(Ω, F, Π)：基本概率空间；

R：数直线$\{x: -\infty<x<\infty\}$；

B：R中一切$Borel$集组成的σ代数；

L：(R, B)上的勒贝格测度；

$\bar{B}$：由B中一切有界集组成的代数；

I_+：全体非负整数集；$I_+=(0,1,2,\cdots)$；

$\bar{I}_+$：$I_+\cup\{\infty\}$

$\chi_A(\cdot)$：表示A的示性函数，即当$x\in A$时，$\chi_A(x)=1$，$x\bar{\in} A$时，$\chi_A(x)=0$；

可测空间(N, S)的定义：设ν是B上定义，取值于$\bar{I}_+$上的测度，当$A\in\bar{B}$时，$\nu(A)<\infty$，记所有这样的测度ν的集为N，S是N中全体有形式：

$$\{\nu: \nu(A)=k\}\quad(k\in I_+,\ A\in B)$$

的集所产生的σ代数，于是(N, S)是一可测空间；

随机点过程的定义：于(N, S)上任给一概率测度P，称(N, S, P)是一随机点过程；

布阿松过程的定义：假定(N, S, P)是一点过程，如果满足条件：

1．对任意$A\in\bar{B}$，$\nu(A)$服从布阿松分布：

$$P(\nu: \nu(A)=k)=\frac{e^{-\mu(A)}}{k!}(\mu(A))^k$$

其中$\mu(A)$是(R, B)上的任意测度，称为强度测度。

2．对任意$A_1, \cdots, A_k \in \bar{B}$，且$A_1, \cdots A_k$互不相交，则$\{\nu(A_i), i=1, \cdots k\}$是相互独立的。

则称(N, S, P)是布阿松过程；

（关于布阿松过程的理论，可参看[15]-[17],[2]-[4],[13]等等）

随机测度的定义：设m是定义在(R, B)上的任意Borel测度，满足：当$A \in \bar{B}$时，$m(A) < \infty$。记一切这样的测度集合为M,设G是M上的子集

$$\{m: m(A) \leqslant y\} \quad (A \in \overline{B}, m \in M, y \in R)$$

所产生的σ代数，则从基本概率空间(Ω, F, Π)至(M, G)上的任意可测映象称为随机测度；

重随机布阿松过程的定义：设$\mu(A, w)$ $(A \in B, w \in \Omega)$是由上述定义好的随机测度，固定$w \in \Omega$, 假定(N, S, P_w)是有强度测度$\mu(\cdot, w)$的布阿松过程，于$(\Omega \times N, F \times S)$上定义概率测度如下：

$$\widetilde{P}(B \times C) = \int_B P_w(C)\pi(dw) \quad B \in F,\ C \in S \tag{1}$$

记$(\Omega \times N, F \times S, \widetilde{P})$在$(N, S)$上的边缘测度为$P$, 则$(N, S, P)$称为重随机布阿松过程，$\mu(\cdot, w)$称为相应的随机强度测度。

注1：欲使上面的定义合理，首先必须证明对任意$C \in S$, $P_w(C)$是w的F可测函数。这个证明省略（见[8],p.5,引理1）。

按照上面的定义，对任意$C \in S$，有

$$P(C) = \widetilde{P}(\Omega \times C) = \int_\Omega P_w(C)\pi(dw) \tag{2}$$

以及

$$P(\nu: \nu(A) = k) = \int_\Omega \frac{1}{k!} e^{-\mu(A,w)}(\mu(A,w))^k \pi(dw) \tag{3}$$

注2：记

$$F_0 = \sigma\{w: \mu(A,w),\ A \in \bar{B}\} \tag{4}$$

则有如下结果：

$$\widetilde{P}(\Omega \times C \mid F_0 \times N) = P_w(C) \quad (a.e. \widetilde{P}) \tag{5}$$

事实上，当$B \in F_0$时，有

$$\int_{B \times N} P_w(C)\widetilde{P}(dw \times dN) = \int_B Pw(C)\pi(dw) = \widetilde{P}(B \times C)$$

显然，$P_w(C)$可看成$F_0 \times N$上的可测函数，因此，由条件期望的定义，(5)式成立。

2、过程的有序性

设$\mu(\cdot,w)$是定义在$(\Omega F,\Pi)$上取值于$(M. G)$上的随机测度，固定$w\epsilon\Omega$，$\mu(\cdot,w)$是B上的测度，所以可令：

$$A_t(w)=\begin{cases}\mu(0,t],w) & \text{当 } t>0\\ -\mu((t,0],w) & \text{当 } t\leqslant 0\end{cases} \tag{6}$$

$A_t(w)$是单调不减随机过程，令

$$\pi_t=E_\pi A_t(w) \qquad t\epsilon R \tag{7}$$

E_π表示在空间(Ω,F,Π)上取期望.

下面假定，对一切$t\epsilon R$，$|\pi_t|<\infty$，这个关系显然等价于：对一切$A\epsilon\widetilde{B}$，$E(\mu(A,w))<\infty$.

引理1　设$\mu(\cdot,w)$是随机测度，则下面的条件是等价的：

1）A_t于某点$t_0\epsilon R$　随机连续，即对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{t\to t_0}\pi(w\epsilon\Omega,\ |A_t-A_{t_0}|\geqslant\varepsilon)=0 \tag{8}$$

2）$E_\pi(\mu(\{t_0\},w))=0$

3）$\mu(\{t_0\},w)=0\quad(a.e.\pi)$

4）π_t于点t_0连续.

证明　由于$\mu(\cdot,w)$，当w固定时是测度，2）与3）等价是显然的。

欲证其它关系，首先注意，因为假定对一切$t\epsilon R$ $|\pi_t|<\infty$，应用控制收敛定理就有：

$$\pi_t-\pi_{t_0}=E_\pi(A_t-A_{t_0})=\begin{cases}E_\pi\{\mu((t_0,t],w)\}\to E_\pi\mu(\phi,w)=0 & t\downarrow t_0\\ E_\pi\{\mu((t,t_0],w)\}\to E_\pi\mu((t_0),w) & t\uparrow t_0\end{cases}$$

因此2）〈等价〉4）.

应用控制收敛定理1）⇒4）是容易的，反之，由于A_t单调上升，由关系，

$$\begin{aligned}|E_\pi A_t-E_\pi A_{t_0}|&=E_\pi|A_t-A_{t_0}|\\ &\geqslant\int_{|A_t-A_{t_0}|>\varepsilon}|A_t-A_{t_0}|\pi(dw)\\ &\geqslant\epsilon\pi(|A_t-A_{t_0}|>\varepsilon)\end{aligned}$$

所以

$$\pi(|A_t-A_{t_0}|>\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}|E(A_t-A_{t_0})|=\frac{1}{\varepsilon}|\pi_t-\pi_{t_0}|$$

因此，当π_t连续时，A_t随机连续，4)⇒1).引理证完。

定义 如果(N,S,P)是重随机布阿松过程，$\mu(\cdot,w)$为随机强度测度．如果$\mu(\cdot,w)$满足引理1中的条件，则称(N,S,P)是有序的．

定理1 重随机布阿松过程(N,S,P)是有序的充分必要条件是：对任意$h\in R$，有

$$P(\nu:\nu(h)=0)=1 \tag{9}$$

证明 按照重随机布阿松于过程的定义

$$P(\nu:\nu(h)=0)=E_\pi e^{-\mu(\{h\},w)}$$

由于$\mu(\{h\},w)$是非负的，因此条件(9)等价于引理1中的条件3)。

3、过程的结构

设(N,S,P)是重随机布阿松过程，A_t、π_t分别由(6)、(7)式定义，由于π_t是单调不減的，记π_t的不连续点为：

$$H=\{h_i\}: \quad \cdots\cdots<h_{-n}<\cdots<h_{-1}<0\leqslant h_0<h_1<\cdots<h_n<\cdots \tag{10}$$

依照引理1．$E_\pi(\mu(\{h_i\},w))>0$，令

$$l_i=\mu(\{h_i\},w) \quad i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{11}$$

由定理1．$P(\nu:\nu(h_i)=0)<1$，令

$$\nu_i=\nu(h_i) \quad i=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{12}$$

则$\{\nu_i\}$是(N,S,P)上取非负整数值的随机变量序列。

引理2 记F_1为$\sigma(l_i,i=0,\pm1,\cdots)$即$F_1$是$F$中使$(l_i,i=0,\pm1,\cdots)$可測的最小$\sigma$代数，则$\{\nu_i,i=0,\pm1,\cdots\}$对$F_1\times N$条件独立．

证明 只须证明，当$i\neq j$时，$(a.e,\widetilde{P})$成立：

$$\begin{aligned}&\widetilde{P}(\nu_i=k_1,\nu_j=k_2|F_1\times N)\\&=\widetilde{P}(\nu_i=k_1|F_1\times N)\widetilde{P}(\nu_j=k_2|F_1\times N)\quad k_1,k_2\in I_f\end{aligned} \tag{13}$$

由(5)，$(a.e.\widetilde{P})$成立：

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(\nu_i=k_1,\nu_j=k_2|F_0\times N)&=\frac{e^{-l_i}}{k_1!}l_i^{k_1}\cdot\frac{e^{-l_j}}{k_2!}l_j^{k_2}\\&=\widetilde{P}(\nu_i=k_1|F_1\times N)\widetilde{P}(\nu_j=k_2|F_1\times N)\end{aligned} \tag{14}$$

因为$\frac{e^{-l_i}}{k_1!}l_i^{k_1}$及$\frac{e^{-l_j}}{k_2!}l_j^{k_2}$都是$F_1$可测的，又因$F_1\subset F_0$所以由(14)及条件数学期望的性质可以推出(13)式成立。证毕。

序列$\{\nu_i, i=0,\pm1,\cdots\}$称为重随机布阿松序列，关于重随机布阿松序列可以参见〔19〕。

现对任意$A\in B$，令

$$\tilde{\mu}(A,w)=\mu(A,w)-\sum_{h_i\in H\cap A} l_i \tag{15}$$

$$\tilde{A}_t=\begin{cases}\tilde{\mu}((0,t],w) & t>0\\ -\tilde{\mu}((t,0],w) & t<0\end{cases} \tag{16}$$

$$\tilde{\pi}_t=E_\pi\tilde{A}_t \tag{17}$$

于是，容易看出：$\tilde{\pi}_t$是t的连续函数，由于$\tilde{\mu}$仍然是(Ω,F,Π)上定义取值于(M,G)上的随机测度。所以$\tilde{A}_t$，$\tilde{\pi}_t$仍然是t的不降函数。现对任意$A\in B$，令

$$\tilde{\nu}(A)=\nu(A)-\sum_{h_i\in H\cap A}\nu_i \tag{18}$$

由此定义的$\tilde{\nu}$显然属于N。事实上，还有：

$$\tilde{\nu}(A)=\nu(A-\bigcup_{h_i\in H\cap A}\{h_i\}) \tag{19}$$

因此$\tilde{\nu}\in N$. 记一切如此的$\tilde{\nu}$集合为$\tilde{N}$，则有

$$\tilde{N}\subseteq N$$

记$\tilde{N}$的子集$\{\tilde{\nu}(A)=k,k\in I_+,A\in B\}$产生的σ代数为$\tilde{S}$，则显然$\tilde{S}\subseteq S$.

现在进一步在$(\tilde{N},\tilde{S})$上给定概率测度P_1，使它满足：

$$P_1(\tilde{\nu}(A)=k)=E_\pi\frac{e^{-\tilde{\mu}(A,w)}}{k!}(\tilde{\mu}(A,w))^k \tag{20}$$

这一点是容易办到的，只要令$P_1(\tilde{\nu}(A)=k)=P(\tilde{\nu}(A)=k)$就行了，因为由(19)式有：

$$\begin{aligned}P(\tilde{\nu}(A)=k)&=P\left\{\left(\nu(A-\bigcup_{h_i\in H\cap H}\{h_i\}\right)=k\right\}=P(\nu(A-H)=k)\\&=\frac{1}{k!}E_\pi e^{-\mu(A-H)}(\mu(A-H))^k\\&=\frac{1}{k!}E_\pi e^{-\tilde{\mu}(A,w)}(\tilde{\mu}(A,w))^k\end{aligned} \tag{21}$$

如此定义的P是$(\widetilde{N},\widetilde{S})$上的概率测度。因为$(\widetilde{N},\widetilde{S})$是$(N,S)$的子空间。在$N-\widetilde{N}$上令：

$$P_1(N-\widetilde{N})=0$$

则(N,S,P_1)是点过程。而且是重随机布阿松过程。具有强度测度$\widetilde{\mu}(A,w)$。

由于(19)式，容易明白，(N,S,P_1)与序列$\{\nu_i,i=0,\pm1,\cdots\}$对$F_0\times N$是条件独立的。

总结上述，我们有定理：

定理2　设(N,S,P)是任意的重随机布阿松过程。(Ω,F,Π)是强度样本空间，$\mu(\cdot,w)$是随机强度测度，则：(N,S,P)可以分解为一重随机布阿松过程$(\widetilde{N},\widetilde{S},P_1)$与重随机布阿松序列$\{\nu_i,i=0,\pm1,\cdots\}$的迭加，$\{\nu_i,i=0,\pm1,\cdots\}$与$(\widetilde{N},\widetilde{S},P_1)$对$F_0\times N$是条件独立的，其中$F_0$如(4)式所示。$(\widetilde{N},\widetilde{S},P_1)$是有序的。

定理的证明已见上述，$(\widetilde{N},\widetilde{S},P_1)$是有序的是因为$\widetilde{\pi}_t$连续。

反面的结论（逆定理）是容易叙述的。

4、随机主导函数连续的条件

对于一般的布阿松过程：

$$P(\nu(t_0,t)=k)=\frac{1}{k!}e^{-(A_t-A_{t_0})}(A_t-A_{t_0})^k \tag{22}$$

欣钦称A_t为主导函数（见[19]）。主导函数是连续的布阿松过程一定是有序的（或称普通的）。

现在考虑重随机布阿松过程的情形，如果(N,S,P)是重随机布阿松过程，由(6)式定义的$A_t(w)$称为随机主导函数，如果$\pi_t=E_\Pi A_t$是t的连续函数，则(N,S,P)是有序的（定理1及引理1）。由重随机布阿松过程的定义，对任意固定的$w\in\Omega$，(N,S,P_w)是有主导函数$A_t(w)$的布阿松过程。当π_t连续时，$A_t(w)$未必以概率1连续。因此(N,S,P_w)未必是有序的布阿松过程，很容易构造一重随机布阿松过程，使π连续，而$A_t(w)$以概率1是不连续的。例如$A_t(w)$本身是点过程而$E_\Pi A_t(w)=\pi_t$连续的情形就是如此。

下面的定理是从过程本身的性质判断$A_t(w)$以概率为1连续的一个充分条件。首先注意一个一般的定义：随机过程$x_t(w)$与$x_t'(w)$称为等价的，如果对任意$t\in R$，$P(x_t(w)=x_t'(w))=1$。

定理3　设(N,S,P)是有序的重随机布阿松过程，$A_t(w)$为相应的随机主导函数，如果存在正数$\alpha>0,\beta>0,h_0>0$使当$k\geqslant2$时，及$|h|<h_0$时成立：

$$P(\nu(t,t+h)=k)\leqslant\frac{\beta h^{k-1+\alpha}}{k(k-1)} \tag{23}$$

则存在等价于A_t的过程A'，A_t'对几乎所有$w\in\Omega$，是t的连续函数。

证明　对任意$t, t+h$有

$$E(\nu(t,t+h]) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(\nu(t,t+h)=k]) = \sum_{k=0}^{\infty} k \times E_\pi \frac{e^{-(A_{t+h}-A_t)}}{k!}$$

$$(A_{t+h}-A_t)^k = E_\pi(A_{t+h}-A_t)$$

及

$E(\nu(t,t+h)^2) = E_\pi(A_{t+h}-A_t)^2 + E_\pi(A_{t+h}-A_t)$所以由条件(23)得：

$$E_\pi(A_{t+h}-A_t)^2 = E(\nu(t,t+h]^2) - E(\nu(t,t+h]) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p(\nu(t,t+h)=k)$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \beta h^{k-1+\epsilon} = \beta\frac{h^{1+\epsilon}}{1-h}$$

当$h_0<\frac{1}{2}$，$|h|<\frac{1}{2}$时，有

$$E_\pi(A_{t+h}-A_t)^2 \leqslant 2\beta h^{1+\epsilon}$$

按照已知的定理（见〔14〕定理6,3），存在A_t等价过程$A_t'(w)$在〔$n, n+1$〕连续，即对任意$t\in$〔$n, n+1$〕，$A_t = A_t'(n)(a,e,\pi)$（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$），又因（$N, S, P$）是有序的，于是由引理1，对任意$t_0\in R$

$$\mu(\{t_0\}, w) = 0 \qquad (a, e, \pi)$$

所以在〔$n, n+1$〕、〔$n+1, n+2$〕的公共点$n+1$处，$A_t'(n)$与$A_t'(n+1)$亦有$A_{n+1}'(n) = A_{n+1}'(n+1)$　(a, e, π)，因此令

$$A_t' = A_t'(n) \qquad n \leqslant t < n+1 \tag{24}$$

则A_t'对几乎一切w有连续轨道且$\pi(A_t - A_t') = 0$ 从而定理得证

5、某些极限定理

定理 4　设(N, S, P)是重随机布阿松过程，$\mu(\cdot, w)$是随机强度测度，令

$$A = \{\nu\in N;\ \lim_{t\to\infty} \nu(0, t] < \infty\} \tag{25}$$

$$A_1 = \{w\in\Omega;\ \lim_{t\to\infty} \mu((0,t], w) < \infty\} \tag{26}$$

则

$$\widetilde{P}(\Omega\times A) = \widetilde{P}(A_1\times N) = \widetilde{P}(A_1\times A) \tag{27}$$

证明　记：

$$\nu_i=\nu(i-1,i],\ l_i=\mu((i-1,i],w)\quad i=0,\pm1,\cdots\cdots \tag{28}$$

则对任意$k\in I_+$，由§1的注2有：

$$\widetilde{P}(\nu_i=k\mid F_0\times N)=\frac{1}{k!}e^{-l_i}\ l_i^K(a.e.\widetilde{P})$$

并且$\{\nu_i,i=0,\pm1,\cdots\cdots\}$对$F_0\times N$条件独立，于是$\{\nu_i\}(i=0,\pm1\cdots\cdots)$是重随机布阿松序列，随机强度序列是$\{l_i\}$，依照〔19〕中的定理1，如令

$$\widetilde{A}=\{\nu\in N,\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i<\infty\} \tag{29}$$

$$\widetilde{A}_1=\{w\in\Omega,\ \sum_{i=1}^{\infty}l_i<\infty\} \tag{30}$$

则有：

$$\widetilde{P}(\Omega\times\widetilde{A})=\widetilde{P}(\widetilde{A}_1\times N)=\widetilde{P}(\widetilde{A}_1\times\widetilde{A}) \tag{31}$$

然而，对于固定的$\nu\in N$，及固定的$w\in\Omega$有

$$\lim_{t\to\infty}\nu(0,t]=\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i=\lim_{n\to\infty}\nu(0,n] \tag{32}$$

$$\lim_{t\to\infty}\mu((0,t],w)=\sum_{i=1}^{\infty}l_i=\lim_{n\to\infty}\mu((0,n],w) \tag{33}$$

从而$A=\widetilde{A}$，$A_1=\widetilde{A}_1$，于是由(31)推得(27)。

注：定理4是已有的结果，见〔12〕定理3.1，我们这里使用了不同的方法。

定理5 如定理4的条件，设A及A_1是(25)(26)中所定义的集，则

1. $\widetilde{P}(\Omega\times A\mid F_0\times N)=0$或$1(a.e,\widetilde{P})$

2. 若令：$A_0=\{(w,\nu)\in\Omega\times N,\ \widetilde{P}(\Omega\times A\mid F_0\times N)=1)\}$，

则有：

$$\widetilde{P}(A_0)=\widetilde{P}(\Omega\times A)=\widetilde{P}(A_1\times N)=\widetilde{P}(A_0\cap(\Omega\times A)\cap(A_1\times N)) \tag{34}$$

证明 由定义（见(1)式）：

$$\widetilde{P}(\Omega\times A)=\int_{\Omega}P_w(A)\pi(dw) \tag{35}$$

$$\widetilde{P}(A_1\times A)=\int_{A_1}P_w(A)\pi(dw) \tag{36}$$

$$\widetilde{P}(A_1\times N)=\int_{A_1}P_w(N)\pi(dw)=\pi(A_1) \tag{37}$$

由定理4，比较(36)、(37)得$\pi(A_1)=\int_{A_1}P_w(A)\pi(dw)$，因此在$A_1$上几乎处处有：

$$P_w(A)=1\qquad w\in A_1 \tag{38}$$

又因：

$$\int_{\Omega}P_w(A)\pi(dw)=\int_{A_1}P_w(A)\pi(dw)+\int_{\Omega-A_1}P_w(A)\pi(dw)$$

由定理4，比较(35)(36)得：

$$\int_{\Omega-\Lambda_1} P_w(\Lambda)\pi(dw)=0$$

所以在$\Omega-\Lambda_1$上，几乎处处有：

$$P_w(\Lambda)=0 \qquad w\epsilon\Omega-\Lambda_1 \tag{36}$$

又由(5)式：

$$\widetilde{P}(\Omega\times\Lambda\,|F_0\times N)=P_w(\Lambda)\quad (a\cdot e\cdot\widetilde{p}\,) \tag{40}$$

从(38)、(39)、(40)得定理第一点.

第2）点的证明，因为$\Lambda_0\epsilon F_0\times N$，故由条件概率的定义应有：

$$\widetilde{P}(\Lambda_0\cap(\Omega\times\Lambda))=\int_{\Lambda_0}\widetilde{P}(\Omega\times\Lambda\,|F_0\times N)\,d\widetilde{P}=\widetilde{P}(\Lambda_0)$$

所以$\Omega\times\Lambda$与Λ_0对测度$\widetilde{P}$只差一零测集，又由定理4得证本定理.

定理6 设(N,S,P)是重随机布阿松过程，$\mu(\cdot,w)(w\epsilon\Omega)$为相应的随机强度测度，令：

$$\Lambda=\left\{w:\ \int_0^\infty\frac{d\Lambda_t}{(1+t)^2}<\infty\right\} \tag{41}$$

$$\Lambda_1=\left\{(w,\nu):\ \lim_{t\to\infty}\Big(\nu(0,t]-\mu((0,t],w)\Big)=0\right\} \tag{42}$$

则：

$$\widetilde{P}(\Lambda\times N)=\widetilde{P}((\Lambda\times N)\cap\Lambda_1) \tag{43}$$

即 $\Lambda\times N\subset\Lambda_1\,(a.\,e.\,\widetilde{P})$.

证明 令

$$\nu_i=\nu(i-1,i] \qquad l_i=\mu(i-1,i] \qquad i=0,\pm1,\cdots\cdots$$

则$\{\nu_i,\ i=0,\pm1,\cdots\cdots\}$是重随机布阿松序列。由〔18〕中定理3，如令

$$\widetilde{\Lambda}=\left\{w:\ \sum_{n=1}^\infty\frac{l_n}{n^2}>\infty\right\}$$

$$\widetilde{\Lambda}_1=\left\{(w,\nu):\ \lim_{u\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\nu_i-l_i)=0\right\}$$

则有$\widetilde{P}(\widetilde{\Lambda}\times N)=\widetilde{P}\Big(\widetilde{\Lambda}_1\Lambda(\widetilde{\Lambda}\times N)\Big)$.然而$l_n=\Lambda_n-\Lambda_{n-1}$，则级数

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\Lambda_n-\Lambda_{n-1}}{n^2}$$

与级数

$$\sum_{n=1}^\infty\int_{n-1}^n\frac{d\Lambda_t}{(1+t)^2}$$

的收敛性显然一致，于是$\widetilde{\Lambda}=\Lambda_1$，$\widetilde{\Lambda}_1=\Lambda_1$.定理得证。

参考文献

〔1〕 Cox, D. R., *Some Statistical Models Conneted with Series of Events*, J. R. Statist. Soc., B 17 (1955), 129—157.

〔2〕 Cox, D. R. and Lewis, P. A. W., *The Statistical Analysis of Series of Events*, London: Methuen and New York: Barnes and Noble, 1966.

〔3〕 Daley, D. J. and Vere-Jones, D., *A Summary of the Theory of Point Processes*, *Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications*, Ed. by Lewis, P. A. W., Wiley—Interscience, New York, 1972, 299—383.

〔4〕 Fisher, L., *A Survey of the Mathematical theory of Multidimensional Point Processes*, *Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications*, Ed. by Lewis, P. A. W., Wiley-Interscience, New York, 1972, 468—513.

〔5〕 Grandell, J., *Statistical Inference for Doubly Stochastic Poisson Processes*, *Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, theory and Applications*, Ed. by Lewis, P. A. W., Wiley-Interscience, New York, 1972, 90—121.

〔6〕 Grandell, J., *On the Estimation of Intensities in a Stochastic Seqnence*, J. Appl. Prob., 9 (1972), 542—556.

〔7〕 Grandell, J., *On Stochastic Processes Genenated by a Stochastic Intensity Function*, Skand. Aktuar. Tidskriqt, 54 (1971), 204—240.

〔8〕 Grandell, J., *Doubly Stochastic poisson processes*, Lecture Notes in Mathematic, Vol. 529, Spring-Verlag, Berlin, 1976.

〔9〕 Kingman, J. F. C., *On Donbly Stochastic Poisson Processes*, Proc. Camb. Phil. Soc., 60 (1964), 923—932.

〔10〕 Rudemo, M., *Doubly Stochastic Poisson Processes and Process Control*, Advance, Appl. Prob., 4 (1972), 2, 318—338.

〔11〕 Serfozo, R. F., *processes wich Conditional Stationary Independent Inercments*. J. Appl. Prob., 9 (1972), 303—315.

〔12〕 Serfozo, R. F., *Conditional Poisson Processes*, J. Appl. Prob., 9 (1972), 228—302.

〔13〕 Snyder, D. L., *Random Point Processes*, Wiley, New York, 1975.

〔14〕 Yeh, J., *Stochastic Processes and the Wiener Integral*, New York, 1973.

〔15〕 Хинчин, А. Я., Математические Методы Теории Массового Обслуживания, Москва, 1955.

〔16〕 Хинчин, А. Я., 无后效随机事件流，崔明奇等譯，排队论，上海科学技术出版社〔原文見：Teo. Bep. и ee Примен. 1, вып 1, 1956, 3—17〕.

〔17〕 Хинчин, А. Я., 关于随机事件的布阿松流，崔明奇等譯，排队论，上海科学技术出版社。〔原文見：Teo. Bep. и ee Примен. 1, 1956, 320—327〕.

〔18〕 戴永隆，条件独立級数的收斂性，中山大学学报（自然科学版），(1962), 2, 1—3.

〔19〕 戴永隆　本期中山大学学报　34—46.